

Fitzugh-Nagumo 方程的同宿轨线：全系统的分岔

John Guckenheimer Christian Kuehn

本文从快-慢动力系统的角度研究了 Fitzugh-Nagumo 方程的行波解。这些解是三维向量场的同宿轨线，该向量场取决于 Fitzugh-Nagumo 模型的系统参数和波速。Champneys 等人[A.R.Champneys, V.Kirk, E.Knobloch, B.E.Oldeman, J.Sneyd, 《在可激发系统中同时发现 Hopf 和 Shilnikov 时》，SIAM JoUrnal of Applied Dynamical Systems, 6(4), 2007]在二维参数空间中观察到同宿分岔曲线的急剧转弯。本文用数值方法证明了这些转弯位于参数空间中两条曲线的交点附近，该参数空间建立于三维向量场不变流形的非横向往交点处。对相关不变流形进行了可视化。受数值研究启发的几何模型显示了同宿分岔曲线的急转弯，并给出了 Fitzugh-Nagumo 模型中尚未解决的多脉冲同宿轨线和周期轨线的定量预测。进一步的观察解决了鸭解式迸发和混合模式振荡的存在。

一、引言

本文研究了由 (1) 式所定义的三维 Fitzugh-Nagumo 向量场：

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= x_2 \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= \frac{1}{\Delta} (sx_2 - x_1(x_1 - 1)(\alpha - x_1) + y - p) =: \frac{1}{\Delta} (sx_2 - f(x_1) + y - p) \quad (1) \\ \dot{y} &= \frac{1}{s} (x_1 - y) \end{aligned}$$

其中 p 、 s 、 Δ 、 α 和 ε 是参数。我们的分析是将方程 (1) 视为一个具有两个快变量和一个慢变量的快-慢系统。Champneys 等人对系统 (1) 的动力学进行了广泛的研究，他们重点介绍了代表偏微分方程行波长的同宿轨线。Champneys 等人在软件 AUTO 中使用数值延拓方法，分析了 (1) 在参数 p 和 s 变化情况下的 $\varepsilon = 0.01$ 时的分岔。在他们的研究基础上，我们选择 $\Delta = 5$ ， $\alpha = 1/10$ 作为本文的数值研究。分岔图的主要结构如图 1 所示。

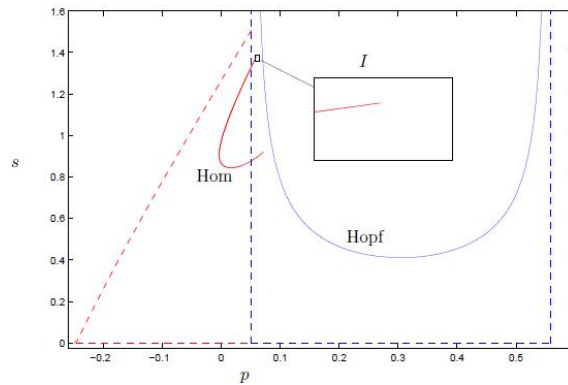


图 1: Fitzugh-Nagumo 方程 (1) 的分岔图。展示的是当 $\varepsilon = 0.01$ 时的 Shilnikov 同宿分岔 (实红线) 和 Hopf 分岔 (实蓝线)。虚线显示了同宿和 Hopf 分岔的奇异极限 ($\varepsilon = 0$) 分岔曲线; 有关图表奇异极限部分的详细信息, 请参见[15]和第 2 节。

图 1 显示了 U 形 Hopf 分岔曲线和 C 形 Shilnikov 同宿分岔曲线。Champneys 等人观察到 C-曲线是一条在到达 U-曲线之前折回自身的闭合曲线，他们讨论了一种可以“终止”同宿分岔曲线的分岔。他们的分析没有考虑向量场 (1) 的多时间尺度。本文通过对同宿曲线的快-慢分析，对同宿曲线急转弯时发生的事件有了更深的认识。我们将集中注意在 C 曲线顶端的转折点，用 I 表示这个区域。

我们将在 Fitzugh-Nagumo 方程 (1) 中的 ε 视为一个小参数。在参考文献[15]中，我们

导出了一个奇异分岔图，它表示 (p, s) -参数空间中奇异极限 $\varepsilon = 0$ 的几个重要分岔曲线。Hopf 和同宿曲线的奇异极限如图 1 中所示的虚线。在奇异极限中，Hopf 和同宿曲线之间没有间隙。我们在下面的命题 2.1 中论证， $\varepsilon > 0$ 时必然会出现间隙。本文的主要观点是，C 曲线在间隙末端的终止点是由于一个快-慢“分岔”导致形成的，这个“分岔”处平衡点的二维稳定流形与一维慢流形的二维不稳定流形相切。因为参考文献[4]中的分析没有明确考虑慢流形，所以这条切线不会在 C 曲线的终止点可能性考虑范围内。请注意，系统的慢流形只有以形式 $\exp(-c/\varepsilon)$ ， $c > 0$ 的“指数型小”量才是唯一的，因此我们的分析仅将终止点确定为参数的指数小值。

快-慢动力系统可以被写作下面的式子：

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \varepsilon \frac{dx}{d\tau} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{d\tau} = g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $(x, y) \in R^m \times R^n$ 和 ε 是一个小参数，其中 ε 大于零且远小于 1。本文对所研究的系统中的函数 $f: R^m \times R^n \times R \rightarrow R^m$ 和 $g: R^m \times R^n \times R \rightarrow R^n$ 进行了分析。变量 x 为快变量，变量 y 为慢变量。我们可以将系统 (2) 中的 τ 从慢尺度改为快尺度 $t = \tau/\varepsilon$ ，得到

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= \frac{dy}{dt} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3)$$

当奇异极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，系统 (2) 变成微分代数方程。代数约束条件定义了临界流形：

$$C_0 = \{(x, y) \in R^m \times R^n : f(x, y, 0) = 0\}$$

对于点 $p \in C_0$ ，如果 $m \times m$ 矩阵 $D_x f(p)$ 的所有特征值都有非零实部，则我们说 C_0 在 p 处是法向双曲的。 C_0 的法向双曲子集是一个真实流形，我们可以用函数 $h(y) = x$ 局部参数化它。这就产生了在 C_0 上定义的慢子系统（或简化流） $\dot{y} = g(h(y), y)$ 。在 (3) 中，使得奇异极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，从而得到以慢变量 y 作为参数的快速子系统（或边界层方程） $x' = f(x, y)$ 。参考文献[9]中的 Fenichel 定理指出，法向双曲临界流形会扰动到不变慢流形 C_ε 。慢流形 C_ε 与 C_0 的距离为 $O(\varepsilon)$ 。（局部）不变流形 C_0 上的流当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，会收敛到临界流形上的慢子系统。慢流形在固定值 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 的情况下通常不是唯一的，但对于某个 $K > 0$ ，它们彼此相距 $O(e^{-K/\varepsilon_0})$ ；然而，因为一个快-慢系统可能存在指数小误差，所以我们将参考“慢流形”。

第 2 节讨论了在区域 I 中 Fitzugh-Nagumo 方程同宿轨线的快-慢分解。这种分解已经被用来证明 ε 充分小的系统中同宿轨线的存在性，但以往的研究工作只适用于同宿轨线的平衡点为不接近折点的情况。在一个折点上，一个快-慢系统的临界流形是局部二次的，且不是法向双曲线。这个分解的较为新的方面是理解同宿曲线急转的关键。第 3 节给出了一个数值研究，重点介绍了 C 曲线的转向的几何机理。我们将 C 曲线拐弯处的相位图的相关方面可视化。在第 4 节中，我们证明了 Fitzugh-Nagumo 方程中 Shilnikov 回归图的指数收缩解释了为什么 n -同宿和 n -周期轨线的参数值非常接近一个主要的 1-同宿轨线。第 5 节给出了两个进一步的观察结果。我们确定了鸭解迸发发生的位置，并注意到系统中存在两种不同类型的混合模式振荡。

二、同宿轨线的快-慢分解

我们引入在参考文献[15]中使用的符号。系统 (1) 的临界流形由以下公式给出：

$$C_0 = \{(x_1, x_2, y) \in R^3 : x_2 = 0, y = f(x_1) + p\}$$

它与两个折点 $x_{1,\pm}$ 呈法向双曲线关系，其 $x_{1,-} < x_{1,+}$ ， $x_{1,\pm}$ 作为方程 f 的局部最小和最大值，是通过解 $f'(x_1) = 0$ 而得到的。因此， C_0 可分为三部分：

$$C_l = \{x_1 < x_{1,-}\} \cap C_0, \quad C_m = \{x_{1,-} \leq x_1 \leq x_{1,+}\} \cap C_0, \quad C_r = \{x_{1,+}\} \cap C_0$$

我们最感兴趣的是鞍型的两个分支 C_l 和 C_r ，即 C_l 和 C_r 中的点是快子系统的鞍平衡点。中间分支 $C_m - \{x_{1,\pm}\}$ 包含快子系统的不稳定焦点。Fenichel 定理所描述的慢流形将被记为 $C_{l,\varepsilon}$ 和 $C_{r,\varepsilon}$ 。 $C_{l,\varepsilon}$ 的二维稳定和不稳定流形的符号分别是 $W^s(C_{l,\varepsilon})$ 和 $W^u(C_{r,\varepsilon})$ ，它们有与 $C_{r,\varepsilon}$ 相似的符号；相关线性特征空间的符号是 $E^s(C_{l,\varepsilon})$ 。全系统 (1) 有一个唯一的平衡点，我们用 q 表示。对于 $(p,s) \in I$ 和 $\varepsilon = 0.01$ ，稳定和不稳定流形的维数分别为 $\dim(W^u(q))=1$ 和 $\dim(W^s(q))=2$ ，它们在 q 处的线性化具有一对复杂的共轭特征值对。平衡点 q 在 U 曲线和 Hopf 分岔内是完全不稳定的。我们感兴趣的是在 I 附近都是亚临界。

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，Hopf 分岔曲线收敛到 (p,s) -参数空间中的一个区域，该区域由两条垂直线 $p=p_{\pm}$ 和线段 $\{s=0, p_- \leq p \leq p_+\}$ 界定；见图 1。参数值 p_{\pm} 是平衡点 q 与折点 $x_{1,\pm}$ 重合时的精确值。该分析给出了奇异极限分岔图的一部分，显示了 $\varepsilon = 0$ 时 Hopf 分岔曲线的情况。

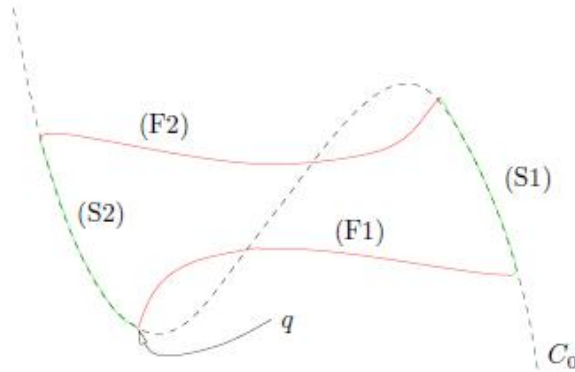


图 2：同宿轨线到唯一平衡点 q 的简图。快速（红色）和慢速（绿色）段将轨线分解为段。

当 ε 很小时， $W^u(q) \cap W^s(q)$ 中的同宿轨线可分为快、慢两段，这种快-慢分解的奇异极限分为四段：从 q 到 C_r 的快子系统异宿连接、 C_r 上的慢段、从 C_r 到 C_l 的异宿连接和在 C_l 上回到 q 的慢段；见图 2。同宿轨线的存在性证明是基于对这些段之间过渡的分析。保持接近法向双曲慢流形的轨线除了短段外必须“以指数方式接近”流形，该短段上的轨线沿着其稳定流形接近慢流形并沿着其不稳定流形离开。同宿轨线的存在取决于其快-慢分解的四个部分如何结合在一起：

(F1) 一维 $W^u(q)$ 沿着其二维稳定流 $W^s(C_{r,\varepsilon})$ 接近 C_r 。这些流形的交集不能是横向的，并且只发生在 (p,s) -参数平面中沿着曲线的参数值上。

(S1) 参考文献[19]中的交换引理用于分析沿其稳定流形接近 $C_{r,\varepsilon}$ 和沿其不稳定流形离开 $C_{r,\varepsilon}$ 的轨线的流图。

(F2) 从 $C_{r,\varepsilon}$ 邻域到 $C_{l,\varepsilon}$ 邻域的快速跳跃发生在二维 $W^s(C_{l,\varepsilon})$ 和二维 $W^u(C_{r,\varepsilon})$ 的横向交叉点

上。

(S2) 从 $C_{l,\varepsilon}$ 到 q 的连接靠近二维 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 和二维 $W^s(q)$ 的交叉点。以前的分析解决了参数区域，在该参数区域中 (S2) 中所描述的连接存在且是横向的，但它在 (p, s) -平面上不能一直坚持到的 Hopf 曲线。

命题 2.1 在 Hopf U 曲线附近的 (p, s) -参数空间中，存在一个区域使得在 $W^s(q)$ 中没有轨线靠 $C_{l,\varepsilon}$ 。

证明：(草图) 在 I 附近 Hopf 分岔的 Lyapunov 系数是正的，因此这些分岔产生的周期轨线出现在 Hopf 曲线左侧的参数区域。周期轨线是完全不稳定的。通过计算点时线性化的特征值，我们发现在 I 附近的 Hopf 曲线上没有折 Hopf 分岔，因此中心流形约简意味着在 Hopf 曲线附近有一个参数区域，其中 $W^s(q)$ 是一个以周期轨线为边界的拓扑盘 (topological disk)。距离 Hopf 曲线足够近， $W^s(q)$ 和周期轨线位于离 $C_{l,\varepsilon}$ 有限的距离上，而 $C_{l,\varepsilon}$ 到 q 之间没有连接。

这一命题意味着，从 $C_{l,\varepsilon}$ 到 q 有连接的参数区域是有界的，且远离 Hopf 曲线。下一节会说明，该参数区域的边界非常接近于一条曲线，沿着该曲线有 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 和 $W^s(q)$ 的切线交点。

备注：当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，C 曲线收敛到由快速子系统的同宿和异宿轨线定义的两条线 (图 1 中的红色虚线)。C 曲线到平衡点的同宿轨线的水平段，以及从平衡点到临界流形右分支的异宿轨线的倾斜段。注意，C 曲线以奇异极限终止于 Hopf 曲线。奇异极限分析不能解释当 $\varepsilon > 0$ 时 C 曲线的急转弯，这是下一节的重点。

三、不变流形的相互作用

慢流形 $C_{l,\varepsilon}$ 远离折点 $x_{1,-}$ 的法向双曲线，它具有一个吸引方向和一个排斥方向。我们在参考文献[14]中介绍了一种计算鞍型慢流形的方法。此算法用于确定是否存在从 $C_{l,\varepsilon}$ 邻域到平衡点 q 的连接轨线。我们找出连接轨线的数值策略有三个步骤：

1、选择横截面

$$\Sigma_{0.09} = \{(x_1, x_2, y) \in R^3 : y = 0.09\}$$

横切 $C_{l,\varepsilon}$ ：

2、用 $\Sigma_{0.09}$ 计算在 $W^s(q)$ 中的轨线的交点。这些点既可以通过从在 $W^s(q)$ 上包含 q 的小盘 D 中的初始条件向后积分来找到，也可以通过求解一个边界值问题来找到，该边界值问题的轨线一端在 $\Sigma_{0.09}$ ，另一端在 D 的边界上。

3、用 Guckenheimer 和 Kuehn 在参考文献[14]中描述的算法计算交叉点 $p_l \in C_{l,\varepsilon} \cap \Sigma_{0.09}$ ，并确定快速子系统在 p_l 处的 Jacobian 矩阵的正负特征向量的方向。

图 3 显示了当 $\varepsilon = 0.01$ 、 $s = 1.37$ 时的， p^3 三个值对应的计算结果 $W^s(q)$ 与 $\Sigma_{0.09}$ 的交点靠近 $W^s(C_{l,\varepsilon})$ 。

ε	$D = d$ (切线, Hopf)
10^{-2}	$\approx 1.07\varepsilon$
10^{-2}	$\approx 1.00\varepsilon$
10^{-2}	$\approx 0.98\varepsilon$

表 1: 在 (p, s) -参数空间中，Hopf 曲线与 $W^s(q)$ 和 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 之间切点位置之间的欧几里得距离。

后向轨线流以快速的指数速率沿 $C_{l,\varepsilon}$ 收敛到其稳定流形上。这一事实也是对观察到的

$W^s(q) \cap \Sigma_{0.09}$ 做了一个急转弯的解释。在图 3 (a) 中, 很明显转向位于 $W^u(C_{l,\varepsilon}) \cap \Sigma_{0.09}$ 的左侧, 而 $W^s(q) \cap W^u(C_{l,\varepsilon})$ 是非空的。在图 3 (c) 中, 转弯处位于 $W^u(C_{l,\varepsilon}) \cap \Sigma_{0.09}$ 的右侧。我们还计算了距参数 Hopf 曲线的距离, 在该曲线上, $W^s(q)$ 和 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 在几个不同的 ε 值下似乎有一个切向交点; 从表 1 中我们观察到此距离为 $O(\varepsilon)$ 。

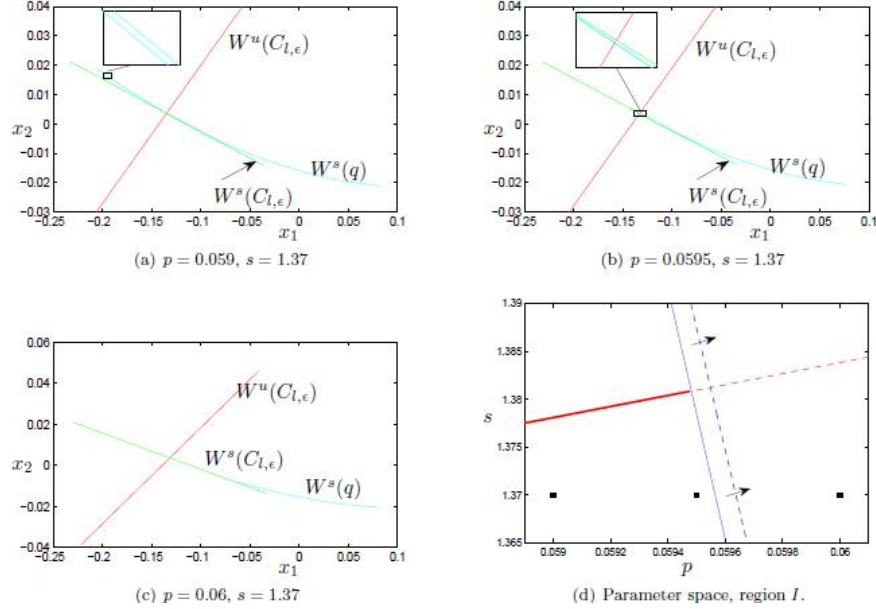


图 3: 图 (a) - (c) 显示了稳定流形 $W^s(q)$ (青色) 相对于 $E^u(C_{l,\varepsilon})$ (红色) 和 $E^s(C_{l,\varepsilon})$ (绿色) 在相空间中的运动, 当 $\varepsilon=0.01$ 时, 在截面 $y=0.09$ 上。参数空间图 (d) 显示了同宿 C 曲线 (实心红色), 是参数 C 曲线的延伸, 其中 $W^u(q) \cap W^s(C_{r,\varepsilon})$ 是非空的, 表示 $W^s(q)$ 与 $E^u(C_{l,\varepsilon})$ (蓝色) 相切的曲线, 以及表示 $C_{l,\varepsilon}$ 和 $W^s(q)$ (虚线蓝色) 之间距离的曲线, 其中箭头表示距离的方向。大于 0.01。(d) 中的实心黑色方块显示 (a) - (c) 的参数值。

在图 3 (d) 中, 使用 Champneys 等人在 AUTO 中实施的延拓方法计算了同宿分岔 (实心红色) 的 C 曲线。尽管区域 I 的部分区域不存在同宿轨线, 但检查不稳定流形 $W^u(q)$ 是否达到 $W^s(C_{r,\varepsilon})$ 的小邻域是可行的。这一思想已被用于分裂算法中, 用以计算如果 $W^s(q)$ 不离开 $C_{l,\varepsilon}$, 同宿轨线将发生的地方; 如图 3 (a) -3 (d) 所示。这将生成图 3 (d) 中的红色虚线。在这条曲线上, 我们通过计算这些流形, 验证了 $W^s(C_{l,\varepsilon})$ 和 $W^u(C_{r,\varepsilon})$ 仍然是横向相交的; 详情见参考文献[15, 14]。

图 3 (d) 中的蓝色曲线是通过测量在 $\Sigma_{0.09}$ 上的 $W^s(q)$ 和 $C_{l,\varepsilon}$ 之间的欧氏距离得到的。沿着蓝色虚线, $C_{l,\varepsilon}$ 和 $W^s(q)$ 之间的距离为 0.01。箭头指示此距离增加的方向。蓝色实线表示 $W^s(q)$ 与 $E^u(C_{l,\varepsilon})$ 相切。这些计算结果表明, 同宿分岔 C 曲线的急转弯非常接近于 $W^s(q)$ 和 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 的切向交叉处。因此, 我们提出以下推测:

推测 3.1 Fitzhugh-Nagumo 系统同宿分岔的 C 曲线呈指数方式靠近 $W^u(C_{l,\varepsilon}) \cap W^s(q)$ 非空区域的边界。

注意, (F1)、(S1) 和 (F2) 的轨线段在图 3 (d) 中仍然沿着红色虚线出现。只有最后一个慢连接 (S2) 不再存在。同宿轨线的存在性证明是利用 Fenichel 定理得出进入 $C_{l,\varepsilon}$ 的一个小邻域的轨线必须与在该区域分解的 $W^s(q)$ 相交。从图 1 中的奇异分岔图可以看出, 平衡 q 已经移超过 I 中的折点 $x_{1,-}$, 蓝色虚线垂直线标记了 q 通过 $x_{1,\pm}$ 时的参数值。因此, Fenichel 定理并没有提供所需的 $C_{l,\varepsilon}$ 的扰动。先前的证明假设了 $p = 0$, 在这种情况下, (S2) 型的连接轨线确实存在。

Shilnikov 证明了在三维向量场中, 当实特征值大于复特征值的实部时, 同宿轨线到鞍焦点的邻域中存在混沌不变集。Fitzhugh-Nagumo 向量场中的同宿轨线在参数区域 I 中满足这一条件。因此, 我们期望找到有许多接近同宿轨线的周期轨线且参数在 I 中, 在参数区域 I 中, “多脉冲”同宿轨线有几个跳跃连接慢流形的左右分支。Champneys 等人在参考文献 [4] 中描述了同宿和周期轨线的相互作用, 该作用就是可以终止同宿分岔曲线。这为识别区域 I 中 C 曲线急转弯附近出现的现象提供了另一种视角。AUTO 可用于定位周期轨线的族, 这些族随着周期的增长而接近同宿轨线。

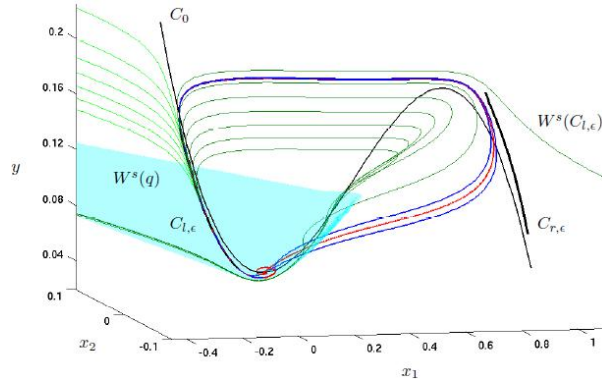
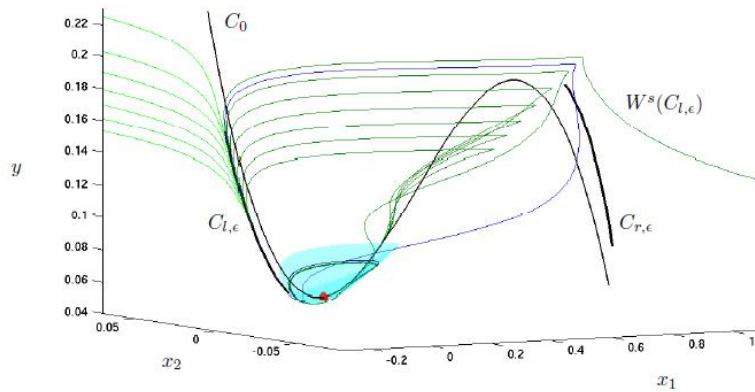


图 4: 沿 C 曲线靠近急转弯处的相空间: 位于 C 曲线上的参数值 $\epsilon=0.01$, $p=0.05$, $s \approx 1.3254$ 。图中显示了同宿轨线 (红色), 产生于亚临界 Hopf 处的双周期轨线 (蓝色), C_0 (细黑色), $C_{l,\epsilon}$ 和 $C_{r,\epsilon}$ (粗黑色) 中的两个周期轨线。流形 $W^s(q)$ (青色) 在 y 的固定坐标处被截断。此外, $W^s(C_{l,\epsilon})$ (绿色) 被 $C_{l,\epsilon}$ 分成两个部分, 这里显示的是与 $C_{m,\epsilon}$ 相互作用的深绿色轨线; 以及从 $C_{l,\epsilon}$ 流出的浅绿色轨线。

图 4 显示了 C 曲线上的参数在相空间中的几个重要对象。利用 AUTO 计算了同宿轨线和两个周期轨线。从固定的 $s \approx 1.3254$ 的 Hopf 分岔开始, 在 p 处延拓周期轨线。注意, 周期轨线经历了几次折分岔。我们给出了在 $p = 0.05$ 处的两个周期轨线; 见 [4]。使用 $C_{l,\epsilon}$ 上的一个网格, 并在每个网格点上使用后向积分和线性近似 $E^s(C_{l,\epsilon})$ 中的初始条件, 计算了 $W^s(C_{l,\epsilon})$ 中的轨线。



(a) Sample phase space plot between the end of the C -curve and the U -curve.

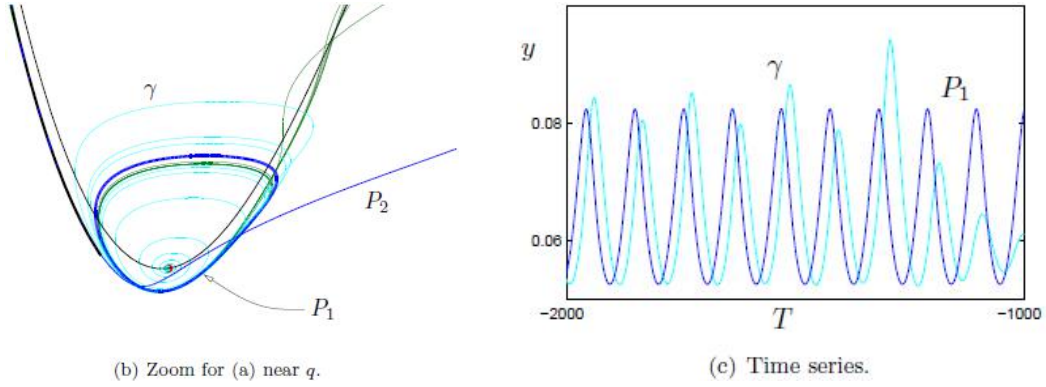


图 5: 参数值为 $\varepsilon=0.01$, $p=0.06$, $s=1.38$ 。对于 (a), 我们显示了两个周期轨线 (蓝色), 一个有较大偏移的 P_2 , 另一个由一个小的环 P_1 组成。我们还显示了 q (红点), 以 $W^s(C_{l,\varepsilon})$ (绿色) 和 $W^s(q)$ (青色) 表示的轨线。在 (b) 中, 显示了 q 附近的缩放, 我们绘制了单轨线 $\gamma \in W^s(q)$ (青色)。与周期轨线 P_1 相比, 图 (c) 给出了该轨线的时间序列。请注意, 轨线是按时间向后计算的, 因此轨线的终点位于图的左侧。沿着周期轨线的时间相移会导致时间序列更接近。

我们从图 4 中观察到, 位于 $C_{l,\varepsilon}$ 附近的 $W^s(q)$ 的一部分; 正如 (S2) 预期的那样将被满足。这与图 5 所示, 当 $p = 0.06$, $s = 1.38$ 时 C 曲线转弯后的情况相反。我们观察到 $W^s(q)$ 是有界的。图 5 (a) 显示了两个周期轨线 P_1 和 P_2 , 这两个轨线是在固定 $s = 1.38$ 时的 Hopf 分岔延拓得到的。 P_2 振幅较大, 在第一次折分岔后产生。 P_1 振幅小, 完全不稳定。图 5 (b) 中 P_1 附近的急速上升和图 5 (c) 中 $W^s(q)$ 和 P_1 中轨线的时间序列比较表明

$$\lim_{\alpha} \{p : p \in W^s(q), p \neq q\} = P_1 \quad (4)$$

其中 $\lim_{\alpha} U$ 表示某个集合 $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 的 α 极限集。从 (4) 中我们也可以得出结论, 在 C 曲线转向以外的 I 的大部分区域, 没有从 q 到 P_1 的异宿连接, 只有从 P_1 到 q 的连接。由于 P_1 是完全不稳定的, 从 q 到 P_1 不能有异宿连接。因此, 周期轨线和 q 之间的双异宿连接仅限于周期轨线, 其比 P_1 更接近同宿轨线。根据 Champneys 等人的推测和将在下一节中介绍的“Shilnikov”模型, 对于靠近 C 曲线末端的参数值, 可以预期存在这些参数值。

备注: 最近的原稿 (参考文献[3]) 扩展了受本文启发的参考文献[4]的结果。在[3]中拓展了双曲线平衡点和双曲线周期轨线之间的一个异宿环的部分展开。Champneys 等人把这个余维-2 分岔称为 $EPIt$ -环, 它产生于二维参数空间中被称为 $EPIt$ -点。原稿 (参考文献[3]) 并未得出 $EPIt$ -情形下是否出现在 Fitzhugh-Nagumo 方程中的结论。本文的结果与[3]的结果之间的关系尚未阐明。

四、快-慢系统中的同宿分岔

从图 3 可以明显看出 Fitzhugh-Nagumo 方程中的同宿轨线沿着 C 曲线存在于 (p, s) -参数空间的一个非常狭小的区域。我们建立了一个类似于 Fitzhugh-Nagumo 方程的同宿轨线几何模型, 其中包含 (S1)、(F1)、(S2) 和 (F2) 中所描述的分段类型。该模型将被视为同宿轨线到鞍焦点的 Shilnikov 模型的指数变形形式[13]。在本节中, 我们假设参数位于区域 I 中, 即靠近 C 曲线上弯的 (p, s) -平面区域。

Shilnikov 模型的回归图由两个部分构成: 经过平衡点的流图, 和近似于线性向量场的流图, 由一个规则图组成, 它给出平衡不稳定流形到其稳定流形的“全局回归”。将两个横

截面 Σ_1 和 Σ_2 适度靠近平衡点，并通过平衡处向量场的线性化，对 Σ_1 到 Σ_2 的流图进行建模。

平衡点特征多项式的阶系数为 $O(\varepsilon)$ ，因此 Hopf 分岔点的虚数特征值为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 级。这些特征值的实部与 Hopf 曲线的距离成线性关系。此外，我们注意到当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，平衡点的实数特征值仍然有界于 0 之外。

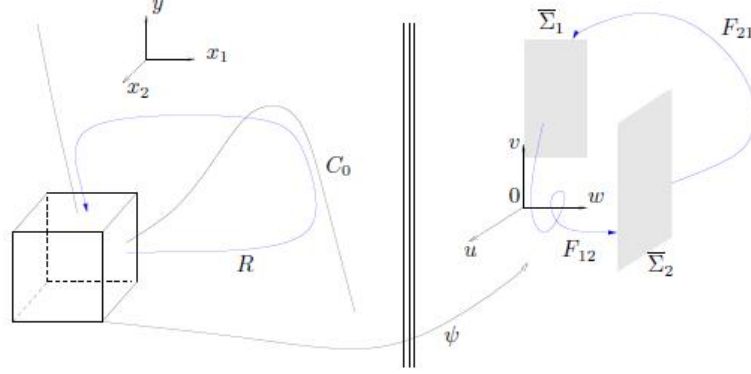


图 6: 同宿分岔几何模型简图。仅显示 $\bar{\Sigma}_i, i=1,2$ 的部分。

令 $\psi(x_1, x_2, y) = (u, v, w)$ 是 q 附近的坐标变化，因此 $\psi(q) = 0$ ，并且向量场在高阶项下呈 Jordan 标准型。我们用 $\bar{\Sigma}_1 = \psi(\Sigma_1)$ 和 $\bar{\Sigma}_2 = \psi(\Sigma_2)$ 表示从坐标转换为 Jordan 形式坐标得到的截面；见图 6。那么向量场为

$$\begin{aligned} u' &= -\beta u - \alpha v \\ v' &= \alpha u - \beta v + h.o.t. \\ w' &= \gamma \end{aligned} \quad (5)$$

其中 α, β, γ 都是正值。我们可以选择 ψ ，使横截面为 $\bar{\Sigma}_1 = \{u = 0, w > 0\}$ 和 $\bar{\Sigma}_2 = \{w = 1\}$ 。没有高阶项的（线性）向量场（5）的映射 $F_{12}: \bar{\Sigma}_1 \rightarrow \bar{\Sigma}_2$ 由下式给出

$$F_{12}(v, w) = vw^{\beta/\gamma} \left(\cos\left(-\frac{\alpha}{\gamma} \ln(w)\right), \sin\left(-\frac{\alpha}{\gamma} \ln(w)\right) \right) \quad (6)$$

这里当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时， β 和 α 趋向于 0。 F_{12} 的域被限制在区间 $v \in [\exp(-2\pi\beta/\alpha), 1]$ 内，该区间由横截面 $u = 0$ 的 $w^s(0)$ 中的一条轨线的两个连续交点限定。

Fitzhugh-Nagumo 系统中的全局回归图 $R: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ 是通过以下轨线获得的，这些轨线是在 $w^s(C_{r,\varepsilon})$ （快）、 $C_{r,\varepsilon}$ （慢）、 $w^u(C_{r,\varepsilon}) \cap w^s(C_{1,\varepsilon})$ （快）、 $C_{1,\varepsilon}$ （慢）和 $w^u(C_{1,\varepsilon})$ （快）附近的连续段。参考文献[19]中的交换引理表明在 Σ_2 中的 R 的域的大小是宽度指数小的条带。随着参数 p 的变化，我们在数值上发现， R 的像与 $w^s(q)$ 在 p 的特定值上有一个二次切点。我们还注意到，当参数 s 的变化时 $w^u(q)$ 与 $w^s(C_{r,\varepsilon})$ 会交叉。因此，我们选择了 F_{21} 的映射

$$(w, v) = F_{21}(u, v) = \left(\sigma v + \lambda_2 - \rho^2(u - \lambda_1)^2, \rho(u - \lambda_1) + \lambda_3 \right) \quad (7)$$

来模拟 R ，其中 λ_1 表示 $w^u(q) \cap \Sigma_2$ 与 F_{21} 的定义域的距离， λ_2 表示 F_{21} 的像在垂直于 $w^s(q)$ 方向上延伸的距离， λ_3 是 $F_{21}(\lambda_1, 0)$ 和 ρ^{-1} 的 v 坐标， σ 对于某个 $K > 0$ 是 $O(e^{-K/\varepsilon})$ 阶的。我们进一步假设 F_{21} 的定义域是 $[\lambda_1, \lambda_1 + \rho^{-1}] \times [-1, 1]$ 。图 7 描述了 F_{21} 。通过这些选择，我们观察了几何模型中同宿轨线 C 曲线的两个性质：

1、如果 $\sigma v + \lambda_2 - \rho^2(u - \lambda_1)^2$ 在 F_{21} 的域上为负，则 F_{21} 的像与 F_{12} 的定义域不相交，且在鞍点附近没有反复的轨线。因此，反复就意味着 $\lambda_2 > -\sigma$ 。

2、如果 $\lambda_2 > 0$ ，那么鞍点具有单脉冲同宿轨线的 λ_1 有两个值。这些点出现在 $F_{21}(0,0)$ 的没有 w 分量的值中： $\lambda_1 = \pm \rho^{-1} |\lambda_2|^{1/2}$ 。 λ_2 的这些值的大小是指数型小的。

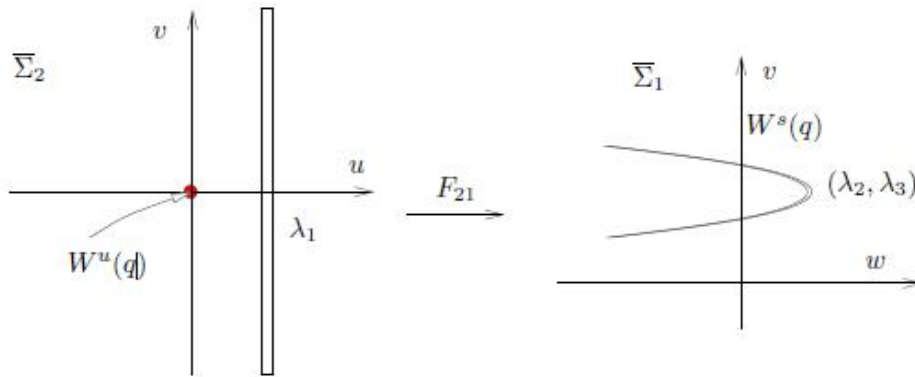


图 7: 映射 $F_{21} : \bar{\Sigma}_2 \rightarrow \bar{\Sigma}_1$ 的草图。 (u, v) 是 $W^u(q)$ 的中心坐标， F_{21} 的定义域位于距离原点 λ_1 的窄矩形中。这个矩形域对应的像是 $\bar{\Sigma}_1$ 中的抛物线条。

当一个向量场有一个单脉冲同宿轨线到一个实特征值大于复特征值实部的鞍焦点时，Shilnikov 证明了该同宿轨线的一个邻域内包含混沌不变集。这一结论适用于单脉冲同宿轨线的几何模型。因此，在参数区间 $\lambda_2 \in [0, \sigma]$ 中会出现过多的分岔，当 λ_2 从 σ 减少到 0 时会创建不变集。

前一节的数值结果表明，在 Fitzugh-Nagumo 系统中，在同宿轨线附近的不变集中的一些周期轨线可以延拓到平衡点的 Hopf 分岔。请注意，在几何模型的不变集中创建周期轨线的鞍结点分岔与 Fitzugh-Nagumo 模型中的 $W^s(q)$ 和 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 相切的曲线 $\lambda_2 = 0$ 呈指数关系。这一观察解释了 Champneys 等人在图 7 中所描述的鞍结点分岔的最右曲线接近 C 曲线的急转弯。

平衡点与周期轨线之间也有靠近 C 曲线的异宿轨线曲线。正如 Champneys 等人所讨论的，这些形式中至少有一些是在 C 曲线转弯处的余维-2 EPI 分岔。因此， $W^s(q)$ 和 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 之间的相切意味着 Fitzugh-Nagumo 模型中有几种分岔曲线以指数形式接近 C 曲线的急转弯。在数值上，任何这些都可以用来近似定位 C 曲线的急转弯。

五、鸭解和混合模式振荡

本节阐述了两个关于 Fitzugh-Nagumo 模型的额外观察结果，这是我们对 C 曲线转向的数值研究和分析得出的。

5.1 鸭解迸发

前几节已经讨论 $W^s(q)$ 和 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 的交叉点，它们是 Fitzugh-Nagumo 系统中同宿轨线存在的必要组成部分。该系统的回流主要是沿着 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 和 $C_{m,\varepsilon}$ ；交叉处发生。这些交叉点形成于 $C_{l,\varepsilon}$ 的轨线； $C_{l,\varepsilon}$ 沿 $C_{m,\varepsilon}$ 的延拓轨线有两个不稳定的快速方向。我们从图 4 和图 5 中观察到，在 U 曲线的 Hopf 分岔中产生的一个完全不稳定的周期轨线发生了一次鸭解迸发，当 p 减小时，它的振幅增加到张弛振荡轨线的大小。这种鸭解迸发发生在非常接近 $W^u(C_{l,\varepsilon})$ 和 $C_{m,\varepsilon}$ ；的

交叉点处。

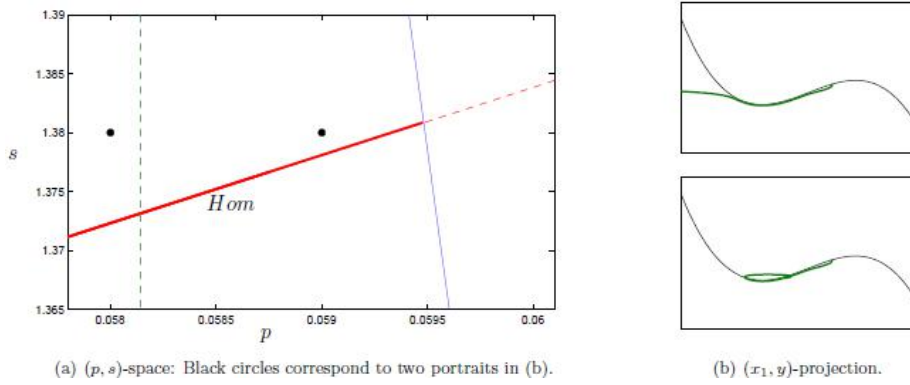


图 8: 绿色虚线表示沿着 $C_{m,\varepsilon}$ 开始出现鸭形轨线的位置。对于绿色虚线左边的 p 值, 我们观察到在反向时间内靠近中间分支逃逸的轨线 (在 (b) 中的上图)。对于靠近 $C_{m,\varepsilon}$ 的绿色曲线轨线点的右侧的 p 值, 保持向后时间有界。

为了弄清楚这种转换的开始和结束位置, 我们通过从折点 $x_{1,-}$ 和 $x_{1,+}$ 之间的点到接近 $C_{m,0}$ 向后积分从而计算慢流形的中间分支 $C_{m,\varepsilon}$, 并确定这些轨线来自 $w^u(C_{l,\varepsilon})$ 的哪一侧。结果如图 8 所示。绿色虚线将 (p, s) -平面划分为以下区域: (p, s) -平面的轨线流入位于 $w^u(C_{l,\varepsilon})$ 的左侧的 $C_{m,\varepsilon}$, 且该轨线没有被限制在流入位于 $w^u(C_{l,\varepsilon})$ 的右侧的 $C_{m,\varepsilon}$ 的轨线的区域内, 它是来自于周期轨线或其他有界不变集的区域。这个边界是通过在时间上计算从 $C_{m,0}$ 开始向后的轨线而得到的。在后向时间内, 慢流形的中间分支是吸引的, 因此轨线首先接近 $C_{m,\varepsilon}$ 然后当 x_1 减小到 $x_{1,-}$ 以下时, 延拓直至超出其末端。图 8 展示了这些轨线在绿色虚线两侧的行为差异。结果表明, 与 $w^s(q)$ 和 $w^u(C_{l,\varepsilon})$ 具有切向交点的参数相比, 具有鸭轨线的参数具有较小的 p 值。C 曲线的拐弯不发生在回流有鸭轨线的参数处。

5.2 混合模式振荡

在许多快-慢系统中观测到了混合模式振荡 (MMOs), 如在参考文献[28, 29, 30, 12] 中, MMOs 是由小振幅和大振幅振荡序列组成的周期轨线。符号 L^s 用于表示 L 大和 s 小振荡的 MMO。Fitzugh-Nagumo 方程 (1) 显示了 MMOs: 靠近同宿轨线的周期轨线除了大振幅张弛振荡外, 还会在平衡点附近产生小振荡。 1^1 MMO 如图 9 (a) - (b) 所示。它是在连续框架内由同宿 C 曲线转换为周期轨线的一条近邻曲线得到的。注意, Shilnikov 同宿轨线附近存在多脉冲同宿轨线意味着在同宿 C 曲线附近也存在更复杂的 MMO 模式。在同宿 C 曲线附近具有非常大 L 和 s 的 L^s MMO 在理论上是可能的, 尽管由于第 4 节所述的指数收缩, 观察它们将非常困难。

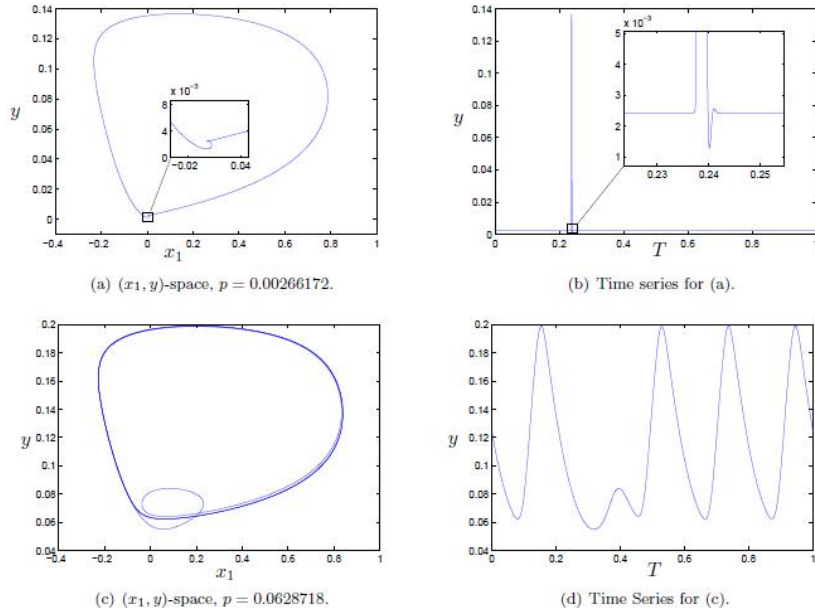


图 9: 在 Fitzugh-Nagumo 方程中混合模式振荡的一些例子。固定参数值为 $\varepsilon = 0.01$ 和 $s = 1$ 。请注意, 轨线周期在 (b) 和 (d) 已重新调整为 1。

除了 Shilnikov 分岔引起的 MMO 外, 我们还发现 MMO 存在于完全不稳定慢流形 $C_{m,\varepsilon}$ 附近含有鸭解段的轨线上。图 9 (c) - (d) 中显示了 4^1 MMO 的一个示例, 该示例是通过延拓获得的。在这种情况下, 小振荡是由于三个时间尺度系统中的 MMO 的小漂移引起的, L^1 ($L = 1, 2, 3, \dots, O(10^2)$) 类型的 MMO 可以很容易地从连续过程中观察到, 我们预计任何 $L \in \mathbb{N}$ 都存在 L^1 MMO。很可能这些 MMO 可以使用 Fitzugh-Nagumo 方程的一个版本进行分析, 其中包含 $O(1)$ 、 $O(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon^2)$ 项, 类似于[15]中引入的项, 但我们将此分析留作以后的工作。图 9 是通过改变固定值 $\varepsilon = 0.01$ 和 $s = 1$ 得到的。因此, 改变单个参数就足以在具有不同特性的小振幅振荡的 MMO 之间进行切换。在第一种情况下, 小振幅振荡发生在轨线接近围绕其稳定流形旋转的鞍焦点时, 而在第二种情况下, 轨线从未接近平衡, 小振幅振荡发生在轨线

沿着完全不稳定的慢流形 $C_{m,\varepsilon}$ 。在单参数和多参数分岔问题中, MMOs 的出现频率均不同;

参见文献[6]中的示例。这与大多数关于 MMOs 分析的研究工作形成了对比, 大多数的分析的重点是在一个例子中识别产生 MMOs 的机制。Fitzugh-Nagumo 方程中的 MMOs 表明, 一个具有三个或更多变量的快-慢系统可以显示不同类型的 MMOs, 人们不应该期望单一机制就可以解释所有 MMO 动力学现象。

参考文献

- [1] D.G. Aronson and H.F. Weinberger. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. in: Partial Differential Equations and Related Topics (Lecture Notes in Mathematics), 446:5{49, 1974.
- [2] G.A. Carpenter. A geometric approach to singular perturbation problems with applications to nerve impulse equations. Journal of Differential Equations, 23:335{367, 1977.
- [3] A.R. Champneys, V. Kirk, E. Knobloch, B.E. Oldeman, and J.D.M. Rademacher. Unfolding a tangent equilibrium-to-periodic heteroclinic cycle. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 8(3):1261-1304, 2009.
- [4] A.R. Champneys, V. Kirk, E. Knobloch, B.E. Oldeman, and J. Sneyd. When Shilnikov meets Hopf in excitable systems. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 6(4):663{693, 2007.

- [5] M. Desroches, B. Krauskopf, and H.M.Osinga. Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system. *Chaos*, 18, 2008.
- [6] M. Desroches, B. Krauskopf, and H.M. Osinga. Numerical continuation of canard orbits in slow-fast dynamical systems. preprint, 2009.
- [7] E.J.Doedel et al. Auto 2007p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont). <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto>, 2007.
- [8] J.W. Evans, N. Fenichel, and J.A. Feroe. Double impulse solutions in nerve axon equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 42(2):219{234, 1982.
- [9] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 31:53{98, 1979.14
- [10] S.V. Gonchenko, D.V. Turaev, P. Gaspard, and G. Nicolis. Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus. *Nonlinearity*, 10:409{423, 1997.
- [11] W. Govaerts and Yu.A. Kuznetsov. *Matcont*. <http://www.matcont.ugent.be/>, 2008.
- [12] J. Guckenheimer. Singular Hopf bifurcation in systems with two slow variables. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(4):1355{1377, 2008.
- [13] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [14] J. Guckenheimer and C. Kuehn. Computing slow manifolds of saddle-type. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 4(3):854{879, 2009.
- [15] J. Guckenheimer. and C. Kuehn Homoclinic orbits of the FitzHugh-Nagumo equation: The singular limit. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series S*, 2(4):851{872, 2009.
- [16] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer, 1991.
- [17] S.P. Hastings. On the existence of homoclinic and periodic orbits in the FitzHugh-Nagumo equations. *Quart. J. Math. Oxford*, 2(27):123{134, 1976.
- [18] J. Jalics, M. Krupa, and H.G. Rotstein. A novel canard-based mechanism for mixed-mode oscillations in a neuronal model. preprint, 2008.
- [19] C. Jones and N. Kopell. Tracking invariant manifolds with differential forms in singularly perturbed systems. *Journal of Differential Equations*, pages 64-88, 1994.
- [20] C. Jones, N. Kopell, and R. Langer. Construction of the FitzHugh-Nagumo pulse using differential forms. in: *Multiple-Time-Scale Dynamical Systems*, pages 101{113, 2001.
- [21] Christopher K.R.T. Jones. Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system. *Transactions of the American Mathematical Society*, 286(2):431{469, 1984.
- [22] M.T.M. Koper. Bifurcations of mixed-mode oscillations in a three-variable autonomous Van der Pol-Dung model with a cross-shaped phase diagram. *Physica D*, 80:72-94, 1995.
- [23] B. Krauskopf, H.M. Osinga, E.J. Doedel, M.E. Henderson, J. Guckenheimer, A. Vladimirovsky, M. Dellnitz, and O. Junge. A survey of methods for computing (un)stable manifolds of vector fields. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 15(3):763-791, 2005.
- [24] M. Krupa, N. Popovic, N. Kopell, and H.G. Rotstein. Mixed-mode oscillations in a three time-scale model for the dopaminergic neuron. *Chaos*, 18, 2008.
- [25] Martin Krupa, Bjoern Sandstede, and Peter Szmolyan. Fast and slow waves in the FitzHugh-Nagumo equation. *Journal of Differential Equations*, 133:49-97, 1997.
- [26] M. Krupa and P. Szmolyan. Relaxation oscillation and canard explosion. *Journal of Differential Equations*, 174:312{368, 2001.
- [27] Yu.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory* - 3rd edition. Springer, 2004.
- [28] A. Milik and P. Szmolyan. Multiple time scales and canards in a chemical oscillator. in: *Multiple-Time-Scale Dynamical Systems*, Eds.: C.K.R.T. Jones and A.I. Khibnik, 2001.
- [29] H.G. Rotstein, M. Wechselberger, and N. Kopell. Canard induced mixed-mode oscillations in a medial entorhinal cortex layer II stellate cell model. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 7(4):1582-1611, 2008.
- [30] J. Rubin and M. Wechselberger. The selection of mixed-mode oscillations in a Hodgkin-Huxley model with multiple timescales. *Chaos*, 18, 2008.15
- [31] L.F. Shampine and M.W. Reichelt. The Matlab ode suite. *SIAM Jour. Sci. Comp.*, 18(1):1{22, 1997.
- [32] L.P. Shilnikov A case of the existence of a denumerable set of periodic motions. *Sov. Math. Dokl.*, 6:163-166, 1965.
- [33] S.-K. Tin and N. Kopell and C.K.R.T. Jones. Invariant manifolds and singularly perturbed boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(1):1558-1576, 1994.