

# Hindmarsh-Rose 神经元模型：分岔分析和分段近似

Marco Storace, Daniele Linaro, and Enno de Lange

*Department of Biophysical and Electronic Engineering, University of Genoa, Via Opera Pia 11a, I-16145 Genova, Italy*

*Laboratory of Nonlinear Systems, School of Computer and Communication Sciences,*

*École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland*

(2008年5月6日收到; 2008年7月28日接受; 2008年9月5日在线发布)

本文给出了 Hindmarsh-Rose 模型分岔情形的全局图。将数值模拟与数值延拓相结合, 用于展开复杂分岔结构。通过改变两个分岔参数进行分岔分析, 有迹象表明所发现的结构具有普遍性, 适用于各种分岔参数组合。然后, 然后利用有关组织原理和分岔图的信息, 将模型的动力学与为电路实现而特别设计分段线性逼近模型的动力学进行比较。结果表明, 模型的动力学现象具有良好的匹配性。这些结果可用于设计 Hindmarsh-Rose 模型模拟神经响应的多样性的电路实现, 并作为预测模型动力学现象的指南, 以及作为参数函数的电路实现。© 2008 American Institute of Physics.[ DOI: 10.1063/1.2975967]

每个神经系统的基本组成块是神经元。研究相对较大的神经网络(如数百万级)的现象, 并建模/仿真此类网络的趋势越来越大。要做到这一点, 不同学科共同协作, 一起努力是很有必要的, 并且也是很重要的。它涉及到几个学科的交叉, 如生物学、神经科学、物理学、数学、计算机科学和电子学。这一趋势地增长的一个主要原因与研究者在理解大脑如何工作方面的努力密切相关。在这类研究活动中, 有必要将研究动物和人类神经系统的相关实验与数学模型的数值模拟相结合。一个主要问题就是从生物物理学、数学的角度, 对生物逻辑神经元的电现象进行建模。在开发这样的模型时, 必须在两个看似互相排斥(矛盾)的必要条件之间找到最优(折中)方案: 单个神经元的模型必须计算简单, 同时能够模仿几乎所有真实生物神经元表现出来的现象(特别是丰富的放电模式)。因此, 了解单个神经元的动力学及其在更大神经网络中的作用是神经科学的核心。存在着在生物学上可信的模型, 它可以模拟大数量级的神经网络。然而, 大脑的功能依赖于数百到数十亿个神经元的相互作用, 这些神经元排列在多结构层次体系的专门模块中。到目前为止, 如果没有硬件地发展的话, 大型单或多层次神经网络模型的仿真仍然是不能够现实的。另一方面, 神经元的实际电路实现表现出的现象只有部分类似于相应模型的现象。本文有双重的目的。第一个目标是对 Hindmarsh-Rose 模型进行双参数分岔分析, 将模拟与延拓方法相结合。此外, 还研究了两个分岔参数对模型动力学的影响。该分析提供了一个全局双分岔场景, 其中分岔曲线由余维-2的两个分岔点组织产生。方案概述了模型组织结构可用于建模研究, 例如, 便于选择搜索区域和参数拟合的初始值。第二个目标是将最近提出的方法(基于分段线性逼近)应用于 Hindmarsh-Rose 模型的常微分方程(ODEs)的电路实现中。同时, 对逼近模型进行了分析, 并与 Hindmarsh-Rose 模型的分岔情形进行了比较。逼近模型将对应于具有两个控制参数的电路, 允许其中一个参数拥有十分不同的尖峰序列模式, 作为对完全相同输入电流的响应, 即神经响应的多样性。

## 一、引言

Hindmarsh 和 Rose(HR)(参考文献 1 和 2)提出的现象学神经元模型可以看作是 Fitzhugh 方程的一般形式, 也可以看作是 Hodgkin 和 Huxley 提出的生理学现实模型的简化形式。该模型已被证明是一个单室模型, 在两个看似互相排斥(矛盾)的必要条件之间找到最优(折中)

方案：单一神经元的模型必须同时在计算上非常简单，且能够模仿几乎所有真实的生物神经元表现出的现象，特别是丰富的放电模式。

根据生物物理学参数的值，真实神经元表现出了各种动力学现象。在最重要的神经元中，我们可以找到一些例子（见图 8，灰色线）：

- 静态 (*Quiescence*)：输入神经元的信号值低于一定阈值，输出达到稳定状态。
- 尖峰 (*Spiking*)：输出由一系列规则的等间距峰组成。
- 迸发 (*Bursting*)：输出由两个或多个峰（称为爆发）组成，峰峰之间由不活跃时段分隔。
- 不规则尖峰 (*Irregular spiking*)：输出由一系列非周期的峰组成。
- 不规则迸发 (*Irregular bursting*)：输出由一系列非周期的爆发组成。

HR 模型能够重现所有这些动力学现象，并且已经拥有一个或两个分岔参数的系统进行了分析。在引用文献中进行的分岔分析中，特别注意研究了稳定迸发解和延伸尖峰状态之间的转换，以及循环分岔级联的折叠，通过一个周期叠加机制，引起了静态渐近现象和迸发状态之间的转换。本文的第一个目标是提供拥有两个参数（即输入电流和快速子系统的另一个参数，控制尖峰和迸发之间的转换）的分岔情况的全局图，从而进一步了解这两个参数对系统的影响。将仿真与延拓方法相结合，分析了分岔情况，表明分岔曲线是由几个余维-2 的分岔点组成的。我们使用拓展工具包 MATCONT（参考文献 14）和软件 AUTO(2000)（参考文献 15）来研究平衡点延拓和极限环以及它们的余维-1 分岔延拓。更具体地说，我们使用工具包 HOMCONT（参考文献 16）（软件 AUTO(2000)中已包含这个工具包）来延续同宿分岔，并检测它们的余维-2 退化情况。我们使用的组合分析方法非常通用，可以应用于大型的时间且光滑的动力系统。全局分岔情形提供了有关 HR 模型的具体信息，这可能有助于生物物理的定向研究，例如，在建模研究中，作为选择参数的指导，以使模型适合不同类型的电生理行为。

第二个目标是将一种基于以下主要工具的非线性动力系统电路综合方法应用于 HR 模型，这些工具有：分段线性 (PWL) 近似和多变量非线性函数电路综合技术；优化方法，尤其是遗传算法；通过数值方法，模拟和延拓技术进行分岔分析。特别是，本文第二部分的重点将是找到一个可靠的 HR 模型 PWL 近似。为了验证 PWL 近似的可靠性，还得获得适当平滑的 PWL 模型版本的二维分岔图。结果表明，PWL 近似与 HR 模型的分岔图具有良好的匹配性。

我们指出，选择 HR 模型的主要优点有两个：

(i) 它的向量场只表现出两个非线性项（多项式）；

(ii) 已经存在电路合成，其中唯一的控制参数是偏压电流。因此该模型是测试所提出方法的一个很好的基准，考虑到 HR 模型作为网络的一个组成部分的电路实现，并且如果该部分起作用的话，整个近似/合成过程将应用于更复杂的（和生理上现实的）神经元模型，例如 Hodgkin-Huxley 模型。

该模型的其他贡献如下：第二部分简要介绍了 HR 模型，并在第三和第四部分对含有两个参数的 HR 模型进行了分岔分析。在第五部分展示了主要的 PWL 近似结果。

## 二、HR 模型

HR 模型能够表现引言中列出的所有动力学现象，并由以下一组常微分方程 (ODE) 所描述：

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y - x^3 + bx^2 + I - z \\
\dot{y} &= 1 - 5x^2 - y \\
\dot{z} &= \mu[s(x - x_{rest}) - z]
\end{aligned} \tag{1}$$

大致上，系统参数所起的作用如下：

$I$ ：模拟生物神经元的膜输入电流；

$b$ ：控制迸发和尖峰现象之间地切换，并控制尖峰产生的频率；

$\mu$ ：控制等式 (1) 中慢变量  $z$  的变化速度。（即在离子交换时慢通道的效率），同时在存在尖峰现象的情况下，它控制尖峰产生的频率，而在存在迸发的情况下，它影响每个迸爆发的峰数量；

$s$ ：调控适应： $s = 1$  时决定尖峰现象无适应和阈下适应，而  $s = 4$  左右时提供了强大的适应和超常的阈下适应。甚至产生振荡；

$x_{rest}$ ：设置系统的静止电位。

下面，我们将在较小程度上针对  $b$ 、 $I$ 、 $\mu$  和  $s$  的对 HR 模型进行分岔分析，剩余参数为  $x_{rest} = -1.6$ 。

### 三、强制分岔分析

在本节中，我们提出第一个分岔分析结果，即  $\mu = 0.01$  和  $s = 4$  的整体分岔情形和强制分岔分析结果的描述。

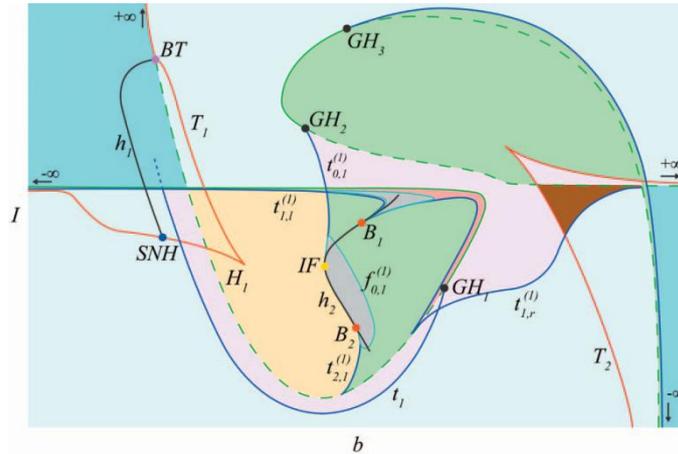


图 1：（彩色）全局分岔情形定性草图

#### A. 整体分岔情况

HR 模型的定性分岔图如图 1 所示。整体分岔图大致分为八个区域，具有定性不同的渐近（稳定）现象的特征。有些区域的面积比实际面积大。颜色的含义如下：

- 在浅青色区域，HR 神经元是静态的（只有一个稳定的平衡点）；
- 在浅蓝色区域，HR 神经元是静态的（两个同时共存的稳定平衡）；
- 在绿色区域，HR 神经元有规律地产生尖峰；
- 在黄色区域，HR 神经元有规律地迸发；
- 在粉色区域，系统允许两个共存的稳定不变集存在，即一个稳定极限循环（要么是尖峰，要么是迸发），另一个是稳定平衡点；
- 在淡红色区域，系统允许两个稳定的“简单的”（尖峰）极限循环；
- 在棕色区域，系统允许三个共存的稳定不变集存在，即一个稳定极限环和两个稳定平衡点；

•在灰色区域，系统允许“非平凡”周期性和非周期性（稳定或不稳定）的解存在，然后可以观察到周期性和/或非周期性解（不规则的尖峰或迸发）。

渐进轨线的例子，对应于图 2 (a) 中的标记为 (a) 到 (h) 的点，对应图 8 所示的灰色线条。

通过以下分岔曲线将参数空间划分为七个区域：平衡点（红色）的  $T_1$  和  $T_2$  折； $H_1$  和  $H_2$  Hopf（绿色），要么是超临界的（实线）要么是次临界的（虚线）；环（蓝色）的折  $t_1$ 、 $t_{1,l}^{(1)}$ 、 $t_{1,r}^{(1)}$  和  $t_{2,1}^{(1)}$ ； $f_{0,1}^{(1)}$  倍周期（青色）； $h_1$  和  $h_2$  同宿环（黑色）。我们推测，折曲线  $t_1$  在同宿曲线  $h_1$  的余维两-2 点上结束，但没有数值证据证明这一推测。在任何情况下，这种分析的实际意义可以忽略不计，因为在现实中，曲线  $t_1$  和  $H_1$  几乎是重叠的。

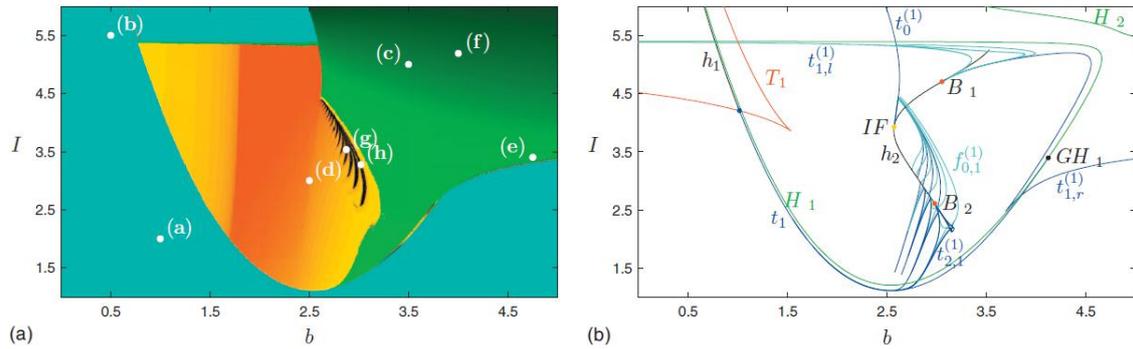


图 2：(彩色) (a) 强制分岔图。(b) 延拓分析分岔图。

## B. 强制分岔图

在图 2 (a) 中所示的强制分岔图是通过拓展模拟（系统(1)数值积分的模拟）得到的。作为第一步，在参数平面  $(b, I)$  中定义了一个规则的点阵网格。然后，我们定义庞加莱（Poincaré）截面为  $y - x^3 + bx^2 + I - z = 0$ ，该截面对应于  $x$  的最大值。对于属于网格的每对参数值，在消除瞬态演化后，记录了至多 200 个每条轨线与庞加莱（Poincaré）截面连续单向的交岔点，以寻找系统演化中的周期性。这个分类是基于与这些截面交岔点对应的  $z$  的不同值的数量来划分。在综合中，当  $z$  值唯一时，神经元是尖峰的，而  $z$  可以取多个值时可能对应于迸发或混沌（即不规则）现象。在缺乏周期性的情况下，这种现象被归类为“混沌”，在瞬态演化过程中会检查静态。最后，通过将不同颜色与系统的不同渐进动力学现象联系起来，得到了系统的分岔图。图中指出，HR 模型显示了上述所有动力学现象：青色代表静态，绿色代表尖峰，黄色代表迸发，黑色代表混沌。此外，随着每次爆发的峰数量的增加，黄色变为红色，而随着尖峰频率的增加，绿色趋于变暗。

这些区域的存在表明共存的渐进现象不能直接从颜色推断。

## 四、延拓分析与具体分岔

上一节中描述的区域（定性的）边界实际上是由（定量的）分岔线引起的。这些分岔中涉及的不变集可能既是稳定的，也是不稳定的，或者只是不稳定的。在本节中，我们考虑使用延拓技术而不是模拟来进行分岔分析。延拓方法可以将平衡点和环的分岔分析转化为一个隐式代数方程的解，该方程可以系统地计算出来。因此，将分岔分析简化为定位（找出）一些函数的零点，利用基于牛顿的算法，可以得到所需的精度。

在系统分析中，与用模拟的方法相比，使用延拓的方法有以下几个优点：

•即使解不稳定，在参数空间中也是成立的，可以使用的，相反，模拟只可以观察到稳定

解。在这方面，应该注意的是，不稳定周期轨线，特别是鞍形轨线，它们涉及到许多分岔现象。此外，鞍形轨线不变性分离了不同吸引子的吸引域。

- 在研究不变性之前，无需等待瞬态的结束。
- 结果与庞加莱（Poincaré）截面的选择无关。
- 避免了与初始条件敏感性相关的数值问题。
- 延拓使得检测由于共存吸引子导致的滞后现象成为可能。而这一点很难通过模拟方法实现。

图 1 中的示意图是通过将“强制”模拟与数值延拓分析相结合来简化和解释全面的分岔分析而获得的。与上述示意图相对应的定量分岔图的最重要部分如图 2 (b) 所示。

下面将讨论构成分岔图的不同部分的详细信息及其与前一节所述定性分析/划分的联系。在下一个草图所描绘的场景中，分岔不变集按照以下记号表示：稳定（不稳定）平衡点表示为点（交岔点： $\times$ ）； $m$  稳定（不稳定）极限环的存在位置由  $m^s$  ( $m^u$ ) 标记指出。

### A. 平衡点分岔

最外部的接近简单震荡态的分岔线和简单震荡解的共存与平衡点的分岔有关。

系统 (1) 至多可以有三个平衡点。这三个平衡点存在于由曲线  $T_1$  和  $T_2$  所包围的区域内，并产生平衡点的折分岔。在这些区域之外，只有一个平衡点（记为  $E_3$ ）。在曲线  $H_1$  和  $H_2$  上，平衡点  $E_3$  经历了 Hopf 分岔（要么是超临界或亚临界的），从而产生一个（尖峰）极限环。

平衡点的分岔曲线如图 3 所示，其中只显示了平衡点。

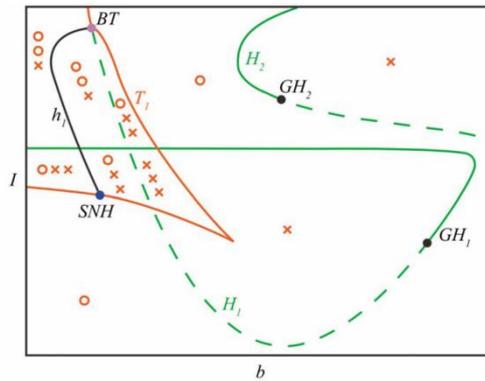


图 3: (彩色线) 平衡点分岔曲线。

### B. Bogdanov-Takens: 存在全局分岔

在  $H_1$  和  $T_1$ 、 $E_1$  和  $E_2$  之间的上交岔口处，经历了一个 Bogdanov-Takens (双零点) 分岔 (图 1 中的  $BT$  点)。因此，在交岔点  $BT$  处全局分岔曲线是有根的，通过对  $E_2$  的同宿轨线驯化的方法 ( $E_2$  是一个具有实特征值和二维稳定流形的鞍点)， $BT$  处一条不稳定环退化了。

尽管存在全局分岔，尽管  $h_1$  的退化是证明其他更复杂现象的较好的辅助曲线， $BT$  点仍然只组织产生简单的动力学现象。

### C. 非中心鞍结点退化

通过对远离  $BT$  点的同宿分岔曲线  $h_1$  的数值延拓，在  $SNH$  点发现了首个全局退化 (见图 1)，在该点同宿分岔经历了非中心鞍结点退化。该余维-2 分岔点在许多动力系统中充当可激发性的组织中心。

### D. 广义 Hopf 点

如图 1 所示， $H_1$  和  $H_2$  都包含广义 Hopf 退化 ( $GH_1$  在  $H_1$  上、 $GH_2$  和  $GH_3$  在  $H_2$  上)，其

中数值计算的第一个 Lyapunov 系数改变了其符号，从而改变了分岔的超临界/次临界性质。

即使在非局部尺度上，围绕广义 Hopf 分岔点展开的系统也是标准的。

### E. 倾翻（倾斜翻转）退化

环  $t_0^{(0)}$  的折分岔在  $GH_2$  处开始，并结束于一个倾翻退化  $IF$ ， $IF$  是在在曲线  $h_2$  上使用工具包 HOMCONT 进行数值检测到的。在  $IF$  上的  $E_3$ （具有二维不稳定流形的鞍结点）的特征值约为 -4.5125、0.3302 和 0.0159。余维-2 分岔点  $IF$  将  $h_2$  分为两个同宿分岔分支  $h_{2,o}$  和  $h_{2,t}$ ，其中同宿轨线是定向的和扭转的。此外，一个无限的倍周期分岔系列和一个无限（中等的）同宿双分岔曲线系列的根源是  $IF$ ，如图 4 (a) 定性草图所示，（只显示了最简单的分岔不变集）。图 4 (b) 所示为通过数值延拓而获得的一些相关定量曲线并把这些曲线叠加到强制分岔图中的情形。同宿双分岔曲线是不可区分的。

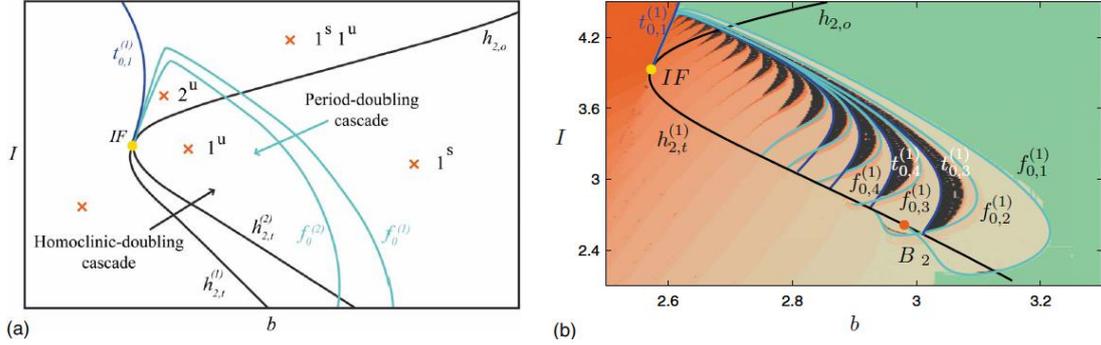


图 4：（彩色线）系统围绕余维二分岔点  $IF$  展开。（a）定性分岔图。（b）通过数值延拓得到相应的定量曲线。

此后，我们将把源自第  $j$  个余维二分岔点（ $j=0, 1, 2$  分别对应于点  $IF$ 、 $B_1$  和  $B_2$ ）的折曲线标记为  $t_{j,k}^{(n)}$ ，这些分岔点位于的同宿曲线起始于环且有  $n$  圈。此外， $k$  表示环与曲线接触的圈数。类似地，翻转曲线被标记为  $f_{j,k}^{(n)}$ 。在这种情况下， $k$  表示在费根鲍姆型叶栅（Feigenbaum Cascade）中的第  $k$  个翻转分岔。

同宿分岔族源于  $IF$  组织产生的所谓的混沌区域的结构。该区域在混沌和/或具有周期现象的子区域中被细分，吸引子（环和奇异吸引子）具有不同的几何特征，即具有不同数量的振荡。混沌区域右侧的一系列费根鲍姆型叶栅也由相同的分岔结构组织产生。实际上，图 4 b 右侧的曲线  $t_{0,k}^{(n+1)}$  和  $f_{0,k}^{(n)}$  构成了在参考文献 11 和 12 中描述的费根鲍姆叶栅系列的基本结构。实际上，曲线  $t_{0,k}^{(n+1)}$  是打开第  $(n+1)$  时段的周期窗口的折分岔，而曲线  $f_{0,k}^{(n)}$  是第  $(n+1)$  时段换的第一个翻转。

### F. Belyakov 退化

同宿分岔曲线  $h_{2,o}$  经历了 Belyakov 退化（参见图 1 中的点  $B_1^{(1)}$ ），其中平衡点  $E_3$  从鞍点（实的）变为鞍焦点。这种退化是用 HOMCONT 工具包数值方法检测到的。理论预测了多个分支曲线族（无穷基数），这些分支曲线源于此点并在  $h_{2,o}$  上呈指数增长累积。外部曲线界定了一个可以观察到混乱（混沌）轨线的区域。如图 5 (a) 所示，是通过数值延拓获得的定量分支曲线。

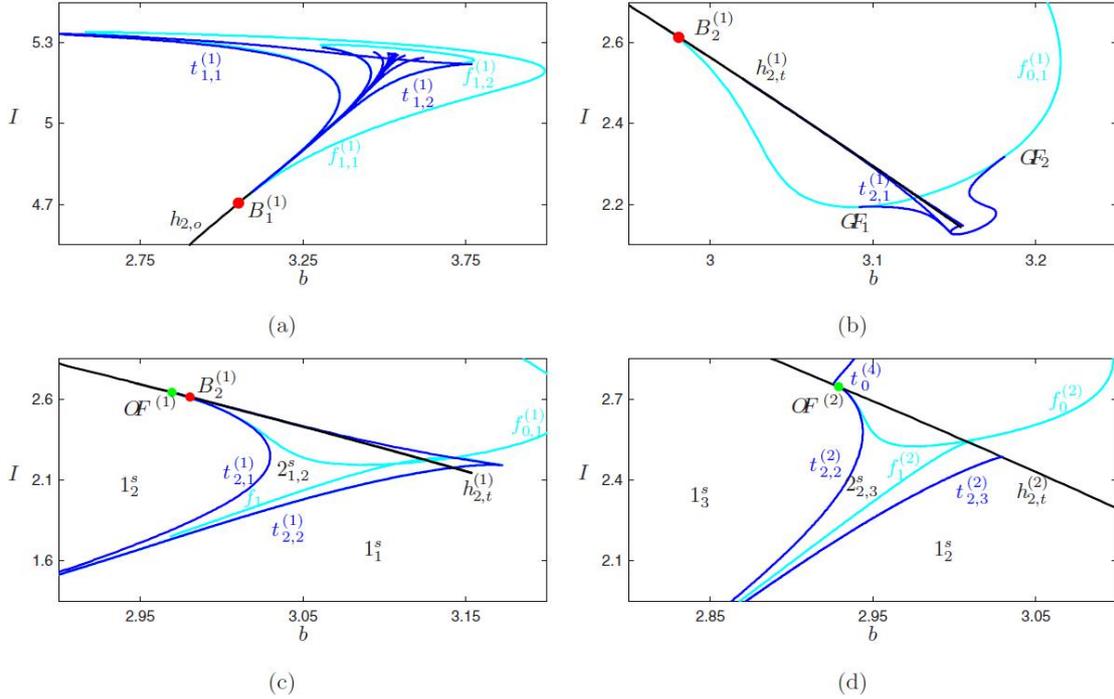


图 5: (彩色线) 围绕 Belyakov 点 (图 (a)  $B_1^{(1)}$  和图 (b)  $B_2^{(1)}$ ), 以及围绕轨线翻转退化 (图 (c)  $OF^{(1)}$  图 (d)  $OF^{(2)}$ ) 的分岔图。

所有曲线都是通过数值延拓得到的。

实际上, 同宿分岔曲线  $h_{2,o}$  是  $U$  型的, 但有一个非常尖锐的  $U$  型转弯。对于足够低的  $b$  值和  $I$  值, 曲线  $h_{2,o}$  的右分支对应于第一个  $x$  的最大值的鞍点的同宿轨线。沿着右分支向上经过第一个 Belyakov 点  $B_1^{(1)}$ , 在该点之上, 我们有到鞍焦点的同宿轨线。进一步说, 在转折点之后, 我们遇到了第二个 Belyakov 点  $B_1^{(2)}$  (图 5 (a) 中点  $B_1^{(1)}$  和点  $B_1^{(2)}$  是不可区分的), 之后我们又有了到鞍点的同宿轨线。在进行  $U$  形转弯时, 由于出现第二个  $x$  的最大值, 同宿轨线的几何结构发生显著变化; 然后, 同宿轨线进行两次全局转弯。  $U$  型转弯很急, 两个同宿分支以及两个 Belyakov 点在  $(b, I)$  平面上几乎重合, 因此我们无法分离它们。对在初等同宿曲线  $h_{2,o}$  上以指数形式累积并在 Belyakov 点与之有无限阶相切的多条辅助曲线进行数值计算是非常困难的。在本例中, 我们仅能计算 (通过延拓) 环的第一个折和相应族的第一个翻转分岔曲线, 如图 5 (a) 所示。切线分岔  $t_{1,1}^{(1)}$  从  $B_1^{(1)}$  开始, 在两个尖点之后, 另一个切线分岔  $t_{1,2}^{(1)}$  返回到  $B_1^{(2)}$ 。切线分岔  $f_{1,1}^{(1)}$  始于并返回到相同的 Belyakov 点  $B_1^{(1)}$ 。

同样的观察结果作必要的修改后也可以适用于同宿分岔曲线  $h_{2,t}^{(1)}$ , 该曲线依次经历 Belyakov 退化 (参见图 1 中的点  $B_1^{(2)}$ )。通过数值延拓得到的分岔曲线如图 5 (b) 所示。  $GF_1$  和  $GF_2$  表示两个广义的翻转点。

### G. 轨线翻转退化

任何同宿分岔曲线  $h_{2,t}^{(k)}$  起始于  $IF$ , 且具有轨线翻转 (或轨线转变) 退化  $OF^{(k)}$ 。在这个退化点上, 同宿轨线沿着其不稳定的非主导特征向量离开鞍点  $E_3$ 。因此, 当轨线穿过  $OF^{(k)}$  时, 离开方向沿着不稳定的主特征向量而转变。

在参数空间中绕着轨线翻转点的展开取决于鞍特征值的相对排列。对于与我们所想的同样的鞍特征值的相对排列, 其中 (绝对值) 稳定特征值大于两个不稳定特征值, 除了一系列源自  $OF^{(k)}$  的无限次中等的同宿分岔曲线外, 局部分岔情形 (不完全知道) 还包含一个环的折和一个翻转曲线。

图 5 (c) 显示了围绕通过数值延拓得到的分岔曲线的  $OF^{(1)}$  点的排列。环  $t_{2,1}^{(1)}$  的折和翻转曲

线  $f_{01}^0$  即使在这个尺度上也清晰可见。与  $t_{21}^0$  相比，中等的同宿分岔曲线是不可区分的。这里仅给出了最简单的稳定分岔不变集： $m$  个稳定极限环，每个极限环有  $n_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) 个圈，这  $m$  个极限环被标记为  $m_{n_1, \dots, n_m}^s$ 。

该图指出了导致进发现象的周期叠加机制。在  $t_{22}^0$  曲线下方，只有一个稳定的带有 1 个弯的环，它在曲线  $t_{21}^0$  上与不稳定的带有 2 个弯的环相碰撞。不稳定环反过来在曲线  $t_{22}^0$  上和带有两个弯的环相撞。然后，在  $t_{22}^0$  和  $t_{21}^0$  之间（更准确地说，在翻转曲线  $f_{01}^0$  和  $f_1$  上方的子区域中），共存两个稳定环（有一个和两个转弯），而在  $t_{21}^0$  上方只有一个稳定的带有 2 个弯的环。

由于这一周期叠加机制，它重复了具有更高圈数的环，（在图 5 (d) 中显示了周围  $OF^{(2)}$  的局部情况），我们得到了与进发现象相关的环。

## H. 其他参数平面中的分岔情况

参考文献 12 对  $\mu$  作为输入电流  $I$  的函数的分岔情况进行了广泛的研究，在较小程度上变量  $I$  与  $s$  有关。一个关键点是，该情况与分岔参数的任何非平凡组合都是相似的；正如图 6 (上图) 所示，当  $\mu$  或  $s$  是第二个分岔参数时，在图 2 中观察到的具有混沌裂片的剃刀形区域和在图 4 (b) 中放大的部分在这种情况下都可以被识别出。由于  $\mu$  是第三个（慢）方程的参数，将  $\mu$  从接近 0 的值开始增加，实质上会抹去  $b$  与  $I$  分岔图中的细节，正如图 6 (下图) 所示，在图中显示了参数平面 ( $b, I$ ) 上的强制分岔草图，以及不同  $\mu$  值下的 Hopf 分岔曲线  $H_1$ 。当  $\mu$  值增加，剃刀形区域变得更大，具有更少的不同裂片，直到  $\mu$  值接近 0.1 时，不再观察到混沌；同样，由 Hopf 分岔曲线限定的模型的活动区域变得越来越小，直到  $\mu$  刚好低于 0.4 时，它完全消失。参数  $s$  也可以观察到类似的压缩现象，它也可以调节慢方程（见图 6）。

在接下来的章节中，我们将得到 HR 模型的 PWL 近似值，并将近似系统的动力学现象与原始系统进行比较。

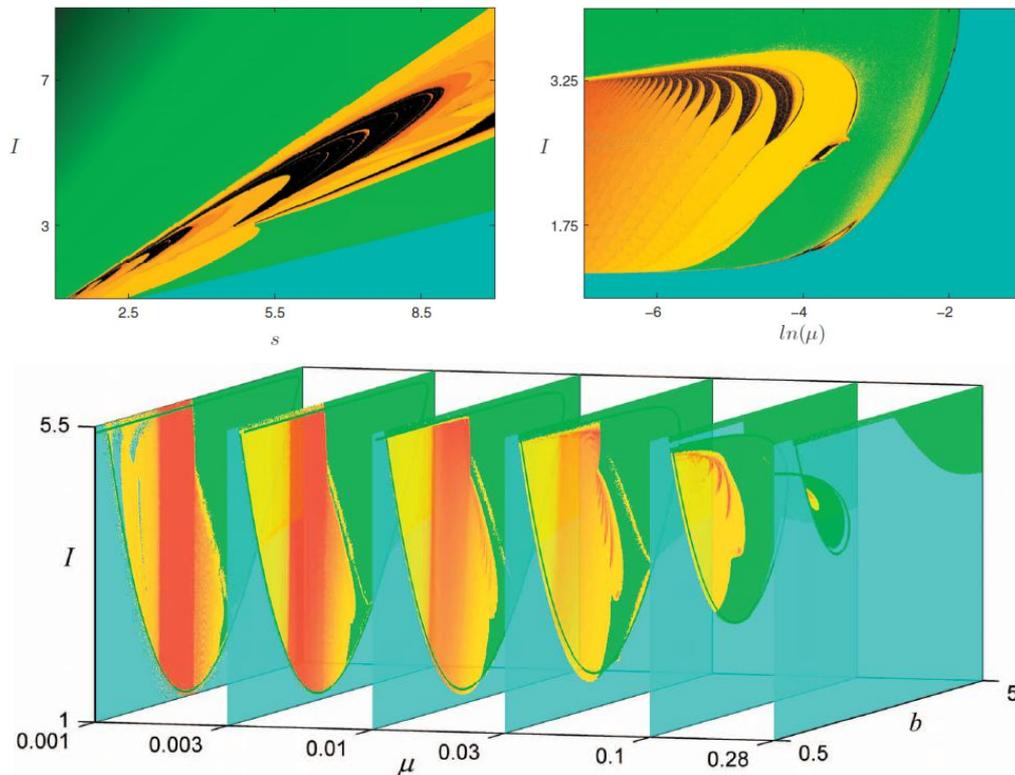


图 6: (彩色) 在平面  $(s, I)$  (上方左图) 和平面  $(\mu, I)$  (上方右图) 上的强制分岔图。  $\mu$  对  $b$  与  $I$  分岔情景的影响 (下方图)。

## 五、HR 模型的 PWL 近似值的结果和讨论

我们提供了一些我们应用于 HR 模型的 PWL 近似方法的基本要素。读者可以参考文献 21-23, 27 和 28, 来了解我们这里使用到的技术的详细细节描述。许多 PWL 模型属于函数扩展模型类,

$$f_{iPWL}(\bar{y}; N) = \sum_{k=1}^N w_k^i(N) \varphi_k(\bar{y}; N) \quad (2)$$

其中  $f_{iPWL}$  是函数  $f_{PWL}$  的向量的组成部分,  $\bar{y} = (\bar{x}^T; \bar{p}^T)^T$  是一个一般的 (实的) 输入向量,  $N$  是基础函数  $\varphi_k(\bar{y}; N)$  中的变量 (整数), 基础函数的加和 (通过系数  $w_k^i(N)$  加权) 提供了给定标量函数  $f_i$  (在我们的例子中, 它是向量场  $f$  的第  $i$  个分量) 的近似值。这是一类非常广泛的模型, 例如, 包括基于贝叶斯 (Bayesian) 方法或基于正则化 (regularization) 方法和样条发的核估计, 以及在 PWL 框架中的微波、预微波和模糊模型。

由于我们对把单个 HR 神经元模型作为一个电子电路来实现感兴趣, 作为整个网络的一个组成部分, 我们将参考文献 21 - 23、27 和 28 中所提到的技术 (单纯形 (simplicial) PWL 方法)。一般来说, 一个现实的电路综合应该基于一组有限的简单组成模块, 在 (并行) 架构中, 相同的结构是组合式地重复。简化的 PWL 方法这两个要求都满足。

在所选的技术中, 在给定的紧致域上近似向量场的 PWL 函数是基于通过简单类型-1 三角剖分 (triangulations) (或单纯形剖分) 的先验域区域块的。单纯形 (或单一形) 是通过将每个细分为固定数量的完全相同的部分而获得的, 并且每个 PWL 函数在每个单纯形上都是仿射的。我们注意到, 近似过程中的一个关键点是基础函数  $\varphi_k(\bar{y}; N)$  的选择, 其加权和产生了 PWL 函数。从电路实现的角度来看, 最有用的基是所谓的  $\alpha$ -基, 它适用于混合信号电路的实现, 而  $\beta$ -基, 它适用于模拟电路的实现。

在第一种情况下, 沿每个维度分量 (要素) 的域细分数目由电路结构所确定。例如, 在参考文献 44 和 45 中所提到的提出的实现情况中, 对于任何维度分量, 这个数字等于 15。

在后一种情况下, 相反, 尽可能减少细分的数量会更方便一点。为此, 可以使用基于进化算法的混合整数规划程序。

从等式 (1) 很容易看出来, 模型是非线性的多项式, 并且模型受到第一和第二方程地限制。因此, 为了获得模型的 PWL 近似值, 用二维域上定义的分段线性向量场来近似非线性向量场就足够了。

我们定义了两个不同的损失函数 (cost functions) (成本函数、代价函数), 从而得到两个不同的 PWL 模型。关于所采用的优化方法的详细介绍超出了本文的范围; 我们感兴趣的读者参阅参考文献 26。粗略地说, 第一个模型从此被称为  $\alpha$  模型, 它是通过最小化仅依赖于基础函数权重的损失函数 (域划分是预先确定的) 并测量整个域内原始函数和 PWL 函数之间的  $L^2$  距离, 即动力学系统之间的  $C^0$  距离而得到的。第二个模型 (此后称为  $\beta$  模型) 是通过求解 (通过最小化损失函数和质量因子) 一个混合整数问题获得的, 该混合整数问题取决于基础函数 (实变量) 的权重和每个域分量 (整变量) 上的细分数量。损失函数和质量因子都考虑了被逼近系统的一些动力学特性。特别是, 对于 HR 模型的近似, 我们重点研究了 Hopf 分岔曲线  $H_1$  和整个领域内动力系统之间的  $C^1$  距离。 $\beta$  模型以更复杂的优化方法为代价, 在近似精度和模型复杂度之间提供更好的权衡。

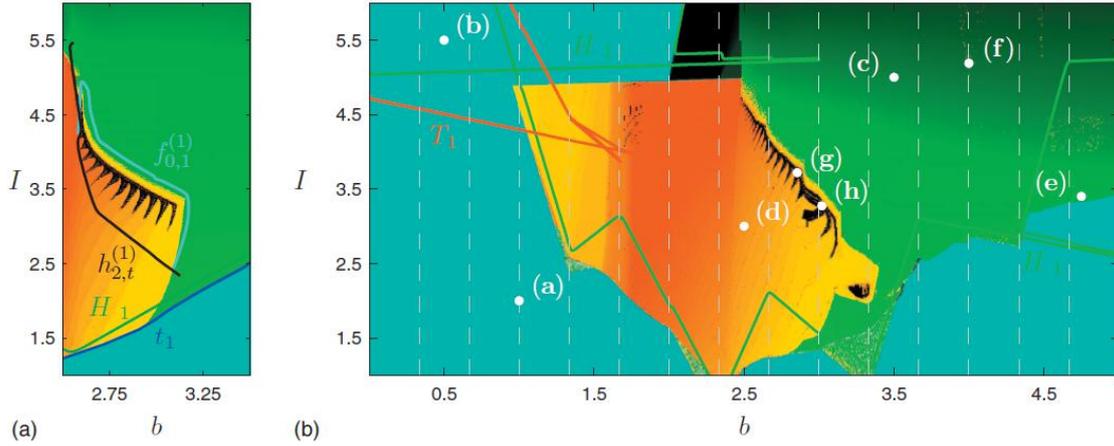


图 7: (彩色) HR 模型 PWL 近似的带有重叠分岔曲线的强制分岔图。

图(a)是域 $(x,b)=[-2.5,2.5] \times [2.5,3.5]$ 的  $7 \times 1$  子分区, 图(b)是域 $(x,b)=[-4.5,5] \times [0,5]$ 的  $15 \times 15$  子分区。

图 7 (a) 显示了使用  $\beta$  模型得到的强制分岔图; 沿  $x \in [-2.5,3.5]$  和  $b \in [2.5,3.5]$  有七个细分; 以及 (b) 是  $\alpha$  模型, 是通过沿域 ( $x \in [-4.5,5]$  和  $b \in [0,5]$ ) 的两个分量确定 15 个细分而得到。 $\alpha$  模型适用于混合信号电路的实现, 而  $\beta$  模型 (也由于其简单性, 因为基础函数的数量为  $N = 16$ ) 适合于模拟电路的实现。

延拓分析要求向量场是光滑的。为了满足延拓方法所要求的光滑度要求, 我们使用了以下光滑的绝对值函数:  $g(u) = 2u / \pi \arctan(au)$ , 其中参数  $a$  控制光滑度。在我们的延拓中, 我们固定了  $a = 40$ , 这保证了 PWL 向量场的光滑性和形状保持之间良好平衡。将所得的分岔曲线叠加到强制分岔图上。

图 7 (a) 显示了环分岔曲线  $t_1$ 、(亚临界) Hopf 曲线  $H_1$ 、翻转曲线  $f_{0,1}^{(1)}$  和同宿曲线  $h_{2,t}^{(1)}$ 。直接与图 2 比较, 表明了分岔情形是被保留的, 并且近似模型维持了所有的动力学行为。

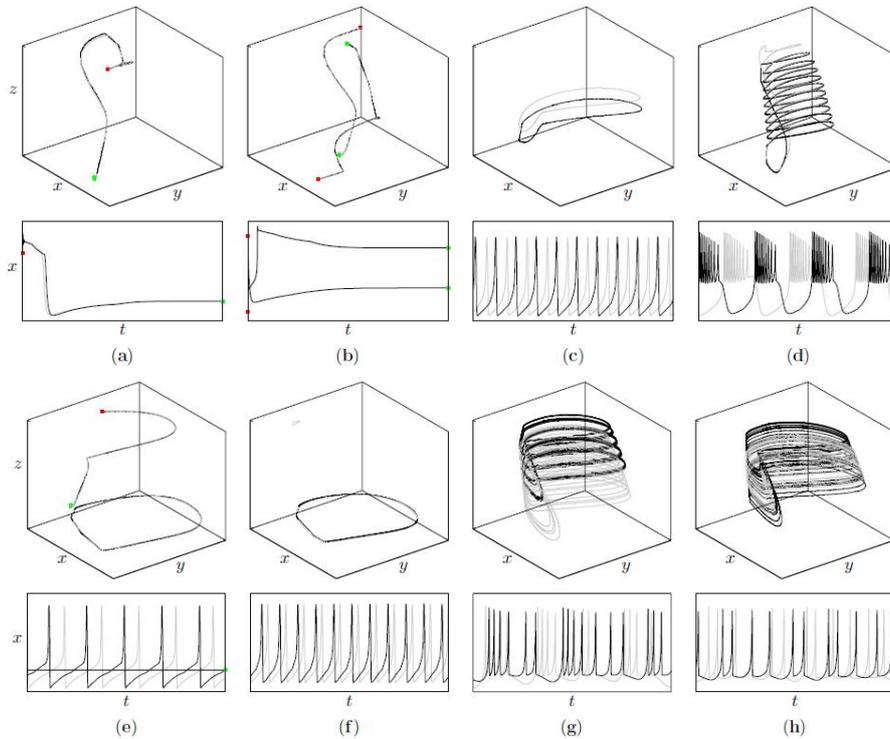


图 7: 与图 2(a)和图 7(b)中点(a) - (h)对应的稳定不变集 (每对中的上图) 和时间序列  $x(t)$  (下图)。

黑色 (灰色) 轨线由 PWL(HR)模型生成。现象: 静态[(a)、(b)、(c)]、尖峰[(c)、(e)、(f)]、逆发(d)、不规则逆发(g)、不规则尖峰(h)。

图 7 (b) 所示的分岔图 (其中垂直线标记了沿  $b$  分量的定义域的细分) 定性地与原始模型匹配, 即使从定量的角度来看, 结果也不太准确。这也可以通过观察分岔曲线  $H_1$  来验证。平衡分岔曲线  $T_1$  的折是相当精确的。

为了从定量的角度找到更好的近似值, 我们应该通过最小化与  $\beta$  模型相同的损失函数来获得模型参数。

一些渐进轨线的例子在图 8 中展示了, 其中黑色 (灰色) 轨线是由  $\alpha$  PWL (HR) 模型生成的, 其中的参数对  $(b, I)$  的对应于图 2 (a) 和图 7 (b) 中被标记的点: (a) 到 (h)。八个参数对对应于原始 HR 模型的八个性质的区域 (见第三部分 A)。对于平衡点 (浅灰色点), 还显示了瞬态轨线 (从灰色方块开始)。结果表明, 在相同的参数对下, HR 模型和  $\alpha$  PWL 模型的轨线具有良好的匹配性。

是另一个原因, 加强了我们的结论的可靠性, 即 PWL 近似可以提供动力学现象非常符合 HR 模型的电路, 并且可以通过作用于两个控制参数来调整。

## 六、结论

本文用双参数分析方法概述了 HR 模型的分岔结构, 导出了 HR 神经元模型的 PWL 近似。通过将广泛的模拟 (探索参数空间) 与数值延拓法 (使用软件 AUTO(2000) 和工具包 MATCONT) 相结合, 分析了原始模型和近似模型。除了广泛的模拟外, 使用延拓技术使我们能够获得分岔场景的全局图像和特定分岔曲线的详细信息, 例如同宿分岔曲线的族。

我们重点研究了先前提到的分岔参数对  $(b, I)$ , 表明我们所发现的组织原则实际上是模型中较为典型的 (而不是特定于这种参数对)。因此, 我们的结果总结并扩展了文献中先前提到的内容, 并概述了模型的一般组织结构, 而不是只集中于研究某些特定特征, 故而提供了 PWL 模型的分岔场景的全局图。我们发现 HR 模型和 PWL 近似的动力学现象之间有很好的匹配。

通过采用两种不同的优化技术得到了 PWL 近似, 并引出了两种不同的电路实现方案。在这两种情况下, 结果表明通过适当地控制这两个分岔参数可以获得神经响应的多样性。下一步是用两个控制参数 ( $b$  和  $I$ ) 实现电路 (根据可用技术), 允许其中一种情况获得定性的不同的尖峰串模式, 作为对相同输入电流的响应, 模拟神经响应的自然多样性。

本文提到的 HR 模型的一般分岔情况也可作为神经元模型研究的指导, 以使 HR 模型适合于实际神经元中观察到的不同电反应模式。

总之, 本文的主要贡献有三个:

- 应用于 HR 模型的分岔分析的一般方法提供了参数平面  $(b, I)$  上的全局分岔场景;
- 分岔情景反过来提供了有关 HR 模型及其组织原则的具体信息, 这些信息在偏重生物物理的研究中很有用;
- 所得的 PWL 近似结果是较为可靠的, 显示了该近似的动力学与整个  $(b, I)$  平面上的 HR 模型具有良好匹配。这为模型的后续电路实现提供了一个线路图, 从而使电路成为具有不同行为的神经网络的基本组成部分。

## 致谢

作者感谢他们的同事和朋友 Oscar De Feo、Federico Bizzari 和 Daniele Stellardo 的宝贵评论和讨论, 感谢匿名评论员的评论, 从而改进了手稿。这项工作得到了国际货币基金组织 (项

目编号(2006)093814) 热那亚 (Genoa) 大学的支持。

- <sup>1</sup>J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, [Nature \(London\)](#)**296**, 162 (1982) .
- <sup>2</sup>J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, [Proc. R. Soc. \(London\), Ser. B](#) **221**, 87 (1984) .
- <sup>3</sup>R. FitzHugh, [Biophys. J.](#) **1**, 445 (1961) .
- <sup>4</sup>A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, [J. Physiol. \(London\)](#)**117**, 500 (1952) .
- <sup>5</sup>A. V. M. Herz, T. Gollisch, C. K. Machens, and D. Jaeger, [Science](#) **314**,80 (2006) .
- <sup>6</sup>E. M. Izhikevich, [Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.](#) **10**, 1171 (2000).
- <sup>7</sup>D. Terman, [SIAM J. Appl. Math.](#) **51**, 1418 (1991) .
- <sup>8</sup>D. Terman, [J. Nonlinear Sci.](#) **2**, 135 (1992) .
- <sup>9</sup>X. J. Wang, [Physica D](#) **62**, 263 (1993) .
- <sup>10</sup>V. N. Belykh, I. V. Belykh, M. Colding-Jorgensen, and E. Mosekilde, [Eur.Phys. J. E](#) **3**, 205 (2000).
- <sup>11</sup>J. M. González-Miranda, [Chaos](#) **13**, 845 (2003) .
- <sup>12</sup>J. M. González-Miranda, [Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.](#)**17**,3071 (2007) .
- <sup>13</sup>G. Innocenti, A. Morelli, R. Genesio, and A. Torcini, [Chaos](#) **17**, 043128(2007) .
- <sup>14</sup>A. Dhooge, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov, [ACM Trans. Math.Softw.](#) **29**, 141 (2003) .
- <sup>15</sup>E. J. Doedel, R. C. Paffenroth, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yu. A. Kuznetsov, B. Sandstede, and X. Wang, Computer Science Department, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada,(2001).
- <sup>16</sup>A. R. Champneys, Yu. A. Kuznetsov, and B. Sandstede, [Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.](#) **6**, 867(1996) .
- <sup>17</sup>A. Champneys and Y. Kuznetsov, [Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.](#)**4**, 785 (1994) .
- <sup>18</sup>D. Stellardo, F. Bizzarri, M. Storace, and O. De Feo, [Chaos](#) **17**, 043108(2007) .
- <sup>19</sup>E.de Lange,“Neuron models of the generic bifurcation type:Network analysis and data modeling,”Ph.D.thesis, EPFL, (2006).
- <sup>20</sup>E.de Lange and M. Hasler,“Predicting single spikes and spike patterns with the Hindmarsh–Rose model,”*Biol. Cybern.*submitted .
- <sup>21</sup>P. Julián, A. Desages, and O. Agamennoni, [IEEE Trans. Circuits Syst., I:Fundam. Theory Appl.](#) **46**, 463 (1999) .
- <sup>22</sup>P. Julián, A. Desages, and B. D’Amico, [IEEE Trans. Circuits Syst., I:Fundam. Theory Appl.](#) **47**, 702 (2000).
- <sup>23</sup>M. Storace, L. Repetto, and M. Parodi, [Int. J. Circuit Theory Appl.](#) **31**,277 (2003) .
- <sup>24</sup>M. Storace and M. Parodi, [Int. J. Circuit Theory Appl.](#) **33**, 147 (2005) .
- <sup>25</sup>M. Parodi, M. Storace, and P. Julián, [Int. J. Circuit Theory Appl.](#) **33**, 307 (2005) .
- <sup>26</sup>D.Linaro,F.Bizzarri,and M.Storace,“Piecewise-linear approximation of the Hindmarsh–Rose neuron model,”*J.Phys.:Conf.Ser.*in press.
- <sup>27</sup>M. Storace and O. De Feo, [IEEE Trans. Circuits Syst., I: Regul. Pap.](#) **51**,830 (2004) .
- <sup>28</sup>M. Storace and F. Bizzarri, [IEEE Trans. Circuits Syst., I: Regul. Pap.](#) **54**,620 (2007) .
- <sup>29</sup>M. Denker, A. Szücs, R. D. Pinto, H. D. I. Abarbanel, and A. I. Selverston, [IEEE Trans. Biomed. Eng.](#) **52**, 792 (2005) .
- <sup>30</sup>Y. J. Lee, J. Lee, K. K. Kim, Y. B. Kim, and J. Ayers, [Neurocomputing](#) **71**,284 (2007) .
- <sup>31</sup>B. Krauskopf, K. Schneider, J. Sieber, S. Wicczorek, and M. Wolfrum, [Opt. Commun.](#) **215**, 367(2003) .
- <sup>32</sup>M. Kisaka, H. Kokubu, and H. Oka, [J. Dyn. Differ. Equ.](#) **5**, 305 (1993) .
- <sup>33</sup>A. J. Homburg and B. Krauskopf, [J. Dyn. Differ. Equ.](#) **12**, 807 (2000).
- <sup>34</sup>L. Belyakov, [Matematicheskie Zametki](#) **15**, 336 (1974) .
- <sup>35</sup>L. Belyakov, [Matematicheskie Zametki](#) **28**, 910 (1980) .
- <sup>36</sup>L. Belyakov, [Matematicheskie Zametki](#) **36**, 838 (1984) .
- <sup>37</sup>P. Glendinning and C. Sparrow, [J. Stat. Phys.](#) **35**, 645 (1984) .
- <sup>38</sup>B. Sandstede, “Verzweigungstheorie homokliner Verdopplungen,” Ph.D.thesis, University of Stuttgart, (1993).
- <sup>39</sup>V. Vapnik, [Estimation of Dependencies Based on Empirical Data](#) Springer, Berlin, (1992) .
- <sup>40</sup>T. Poggio and F. Girosi, [Proc. IEEE](#) **78**, 1481 (1990) .
- <sup>41</sup>G. Wahba, [Spline Models for Observational Data](#), Series in Applied Mathematics SIAM, New York, (1990) , Vol. 59.
- <sup>42</sup>M. S. Floater, E. G. Quak, and M. Reimers, [J. Comput. Appl. Math.](#) **119**,185 (2000).

<sup>43</sup>T. Takagi and M. Sugeno, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **15**, 116 (1985) .

<sup>44</sup>M.Di Federico,P.Julián,T.Poggi, and M.Storace,in Proceedings of the2007 IEEE International Symposium on Circuits and SystemsIS-CAS'07,New Orleans, Louisiana,(2007), pp. 685–688.

<sup>45</sup>A.Boggiano,S.Delfitto,T.Poggi, and M.Storace, in Proceedings of the European Conference on Circuit Theory and Design ECCTD'07,Seville, Spain,(2007), pp.874–877.