Hindmarsh－Rose 神经元模型

摘要：Hindmarsh－Rose（H-R）神经元模型是 Hindmarsh 和 Rose 于 1984 年在 Fitzhugh－Nagumo 模型的基础上提出了一个由三个耦合的一阶微分方程描述的神经元活动模型，该模型是由电压钳数据构造，是在蜗牛神经细胞中所见到的模式活动的一个简单的描述。可以用于模拟软体动物神经元的重复峰和不规则行为。到目前为止，许多的研究者对 H-R 模型的数学性质进行了深入的研究与讨论。本文就是对当前 H-R 模型研究现状的做简单总结概述。

一、Hindmarsh-Rose 模型数学模型（Mathematical Model）

早在 1982 年，Hindmarsh 和 Rose[1]基于电压钳实验所获得的大量关于蜗牛神经细胞的数据，提出了 H-R 神经元模型，假设膜电位的变化率线性的依赖于通过电极的电流 z 和内电流 y，且非线性依赖于膜电位 x，之后 Hindmarsh 和 Rose 从池塘蜗牛内脏神经节实验中获得大量数据，他们于 1984 年对原模型作了修改，即引入另一个具有慢时间尺度的微分方程，用于调节一簇反复放电状态和静息态之间的转变，修改后的 H-R 神经元模型[2]如下：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext}\\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y\\ \frac{dz}{dt} &= r[s(x - x_{rest}) - z]\end{aligned} \tag{1}$$

Hindmarsh-Rose 模型旨在研究单神经元实验中所观察到的膜电位突增行为。其中变量 x，y 和 z 都是关于时间 t 的，x 表示神经元膜电位，用无量纲单位表示。另两个变量，y 和 z 有关于离子通过离子通道的传输，y 是与内电流（如 K^+ 和 Na^+）相关的恢复变量，称为尖峰变量(Spiking variable)，z 是与 Ca^+ 激活的 K^+ 电流相关的慢变调节电流，称为迸发变量（Bursting variable）。在 H-R 模型中有八个参数：a、b、c、d、r、s、x_{rest} 和 I_{ext}。通常，参数 I_{ext}，也就是进入神经元的电流，被作为控制参数。文献中常用的其他控制参数有 a、b、c、d 或 r，前四个参数分别模拟了快离子通道和慢离子通道的工作情况。通常，保持不变的参数是 s=4 和 x_{rest}=-8/5。当 a、b、c、d 固定时，给出的值为 a=1、b=3、c=1 和 d=5。参数 r 大约是 10^{-3} 的阶，I_{ext} 在-10 和 10 之间。大致上，系统参数所起的作用总结如下：

I_{ext}：模拟生物神经元的膜输入电流；

b：控制迸发和尖峰现象之间地切换，并控制尖峰产生的频率；

r：控制等式（1）中慢变量 z 的变化速度。（即在离子交换时慢通道的效率），同时在存在尖峰现象的情况下，它控制尖峰产生的频率，而在存在迸发的情况下，它影响每个迸爆发的峰数量；

s：调控适应：$s=1$ 时决定尖峰现象无适应和阈下适应，而 $s=4$ 左右时提供了强大的适应和超常的阈下适应。甚至产生振荡；

x_{rest}：设置系统的静止电位。

第三状态方程：

$$\frac{dz}{dt} = r[s(x - x_{rest}) - z]$$

允许膜电位的各种动力学行为，由变量 x 描述，包括不可预测的行为，这被称为混沌动力学。这使得 H-R 模型相对简单，并提供了许多不同模式的定性描述，这些模式是通过经验观察到的，这非常有用。

二、Hindmarsh–Rose 模型的数值模拟（Numerical simulation）

很多研究者对单个 H-R 神经元模型的动力学行为进行了探究，当系统 2.92< I_{ext} <3.4 时，存在一个多尺度迸发-尖峰放电行为。徐克生等[3]在对系统方程（1）数值模拟时采用四阶龙格库塔法解方程，积分步长 Δt =0.001，其他各参数分别取：a =1.0、b =2.0、c =1.0、d =5.0、s =4、r =0.006 和 x_{rest} =-8/5、I_{ext} =3.0，在这组参数下单个神经元膜电压呈现混沌簇放电行为，图 1 给出了在（x，z）平面上的相图和 x 随时间演化曲线，从图可以看出该系统为混沌系统。

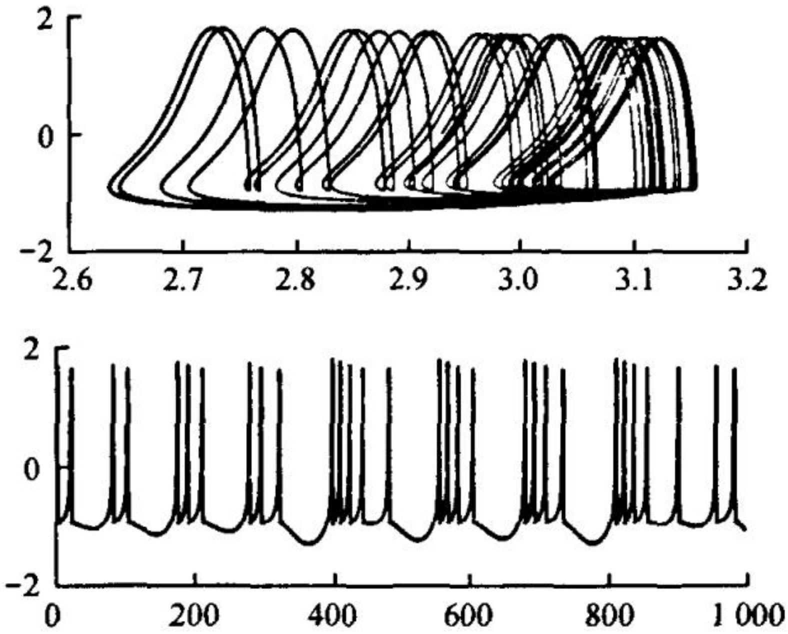


图 1 单个 H–R 神经元在 I_{ext} =3.0 情况下的混沌簇放电，上图为在（x，z）平面上的相图，下图为膜电压 x 随时间 t 变化情况

1998 年 Huerta 等人[4]研究了二维点阵上近邻耦合的非全同 H-R 神经元网络的同步行为，并观察到神经元局部簇放电同步、整体簇放电(Bursting)同步和完全同步现象。吴瑾等人研究了两个非耦合 H-R 神经元的同步[5]，通过分析神经元放电峰峰间期（ISI）的分岔图揭示了两个神经元同步演化的机理。李海泉等人[6]研究了两个电突触耦合 H-R 神经元的相同步，分析了不同放电状态的两个神经元在电突触耦合下实现相同步后的神经放电节律，发现神经元同步后呈现簇放电或峰放电特征，不仅与两耦合神经元独自放电模式有关外，还与电突触耦合强度有一定的内在关系。

三、Hindmarsh–Rose 模型常见的耦合方式（Coupling mode）

A. 全局耦合

Li 等人[7]在全局耦合 H-R 神经网络中研究了通过脉冲电流刺激来使网络达到去同步的方案，在全局耦合作用下 H-R 神经元模型表达式为：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= y_i - a{x_i}^3 + b{x_i}^2 - z_i + I_{ext(i)} + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x_i) \\
\frac{dy_i}{dt} &= c - d{x_i}^2 - y_i \\
\frac{dz_i}{dt} &= r[s(x_i - x_{rest}) - z_i]
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中 $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x_i)$ 即为全局耦合作用项。上式中 ε 为耦合强度， $I_{rest(0)}$ 代表外部刺激电流，既可以是直流电，也可以是传递到第 i 个神经元的脉冲电流。数值模拟显示：当 H-R 神经网络中有 10％的神经元受到脉冲电流信号刺激时，网络就会从同步状态演化为去同步；在同样的刺激强度下，弱耦合网络比强耦合网络更容易达到去同步。Zanette 和 Mikhailov[8]在具有随机不对称突触连接的全局耦合神经网络中研究了非线性振子的动力学，在该系统中观察到了自发同步现象，即当耦合强度达到一个阈值时，网络就出现同步模式，继续增加耦合强度，网络会分解成若干个相关的簇团，直到网络实现全体同步。最近，Alonso 等人[9]研究了一个全局耦合单元的序参量的变化，推导出同步的条件，并描述了与时间无关的非同步动力学机制。

B. 平均场耦合

胡庆平等人[10]研究了平均场耦合的 H-R 神经元的相同步，在平均场作用下 H-R 神经元模型表达式为：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= y_i - a{x_i}^3 + b{x_i}^2 - z_i + I_{ext} + \varepsilon X \\
\frac{dy_i}{dt} &= c - d{x_i}^2 - y_i \\
\frac{dz_i}{dt} &= r[s(x_i - x_{rest}) - z_i]
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中 $X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j$ 即为平均场作用项，用平均场作为驱动信号。研究结果表明：在一个神经元系统里，多个神经元在平均场驱动作用下，整个系统里的不同神经元都能达到同步。早在 1986 年，Ben. Avraham 等人[11]在化学系统中研究了平均场和扩散条件限制下粒子种类的湮没，明确给出了平均场的定义。此后有大量的关于平均场的研究工作，如 Sharma 等人[12]研究了平均场扩散耦合下非线性振子的动力学行为，观察到这种形式的耦合在耦合强度和平均场控制参数区间，是通过同步转变而导致振幅死亡。Rosenblum 和 Pikovskyr[13]分别以 H-R 神经元模型和非全同 Rossler 混沌系统为例，研究了平均场及时间延迟反馈下系统的同步，提出一种技术可以控制全局耦合单元的集体振荡，并从数值模拟和理论上证明了，在平均场作用下时间延迟反馈可以增强或抑制自同步。

C. 延迟耦合

林晨等人[14]研究了全连接 H-R 神经网络在时间延迟耦合作用下的同步情况，添加时间延迟作用项后的职神经元模型表达式为：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= y_i - a{x_i}^3 + b{x_i}^2 - z_i + I_{ext} + \varepsilon(x_j(t-\tau) - x_i) \\
\frac{dy_i}{dt} &= c - d{x_i}^2 - y_i \\
\frac{dz_i}{dt} &= r[s(x_i - x_{rest}) - z_i]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中 $(x_j(t-\tau)-x_i)$ 为时间延迟耦合项，τ 为延迟时间。研究结果表明延迟时间和耦合强度的变化会对网络的同步造成较大影响，并给出了不同参数下 H-R 神经网络的最佳同步状态。Atay 和 Jost 等人[15]考虑耦合映射网络的时间延迟，研究结果表明，延迟有利于网络的同步，能够使无标度网和随机网实现同步，但是对于近邻规则网和小世界网则表现出较差的同步能力。最近，Adhikari 等人[16]在簇放电神经元耦合网络中研究了由时间延迟诱发的相转变到同步的动力学行为。他们发现相转变是一种普遍存在的现象，可以发生在各种耦合类型的簇放电神经元网络中，此外还展示了 H-R 神经元模型和 Leech-Heart 中间神经元模型的相转变过程。袁国勇等人[17]研究了两个延迟耦合 FitzHugh-Nagumo 系统的动力学行为，发现螺旋波有很强的稳定性，通过分析得到了定态局部稳定和不稳定的参数区。在稳定参数区，可以观测到螺旋波同步，而在不稳定参数区内，这两个延迟耦合系统的动力学行为很复杂。H-R 神经元模型具备多种可兴奋细胞的生理特性，能够呈现多时间尺度的放电及静息等行为，是神经科学中非常重要的现象。近年来，H-R 神经元模型被广泛应用于耦合神经系统同步的研究领域。无论是国外还是国内，都有大批的科研工作者致力于 H-R 神经元动力学的研究，并取得了显著的研究成果。之前关于耦合神经元同步的研究，更多考虑的是研究单个神经元网络中神经元的同步，随着大脑神经网络的层次化和模块化的发现，人们开始关注于大规模神经元集群放电行为，这将有助于进一步了解大脑不同区域的功能特点。

四、Hindmarsh–Rose 模型的分段线性近似（Piecewise linear approximation）

Marco Storace，Daniele Linaro 和 Enno de Lange[18]提供了一些用于 H-R 模型的 PWL 近似方法的基本要素。也可以参考文献[19]-[23]，来了解他们这里使用到的技术的详细细节描述。许多 PWL 模型属于函数扩展模型类，

$$
f_{iPWL}(\bar{y};N) = \sum_{k=1}^{N} w_k^i(N)\varphi_k(\bar{y};N) \tag{5}
$$

其中 f_{iPWL} 是函数 f_{PWL} 的向量的组成部分，$\bar{y} = \left(\bar{x}^T;\bar{p}^T\right)^T$ 是一个一般的（实的）输入向量，N 是基础函数 $\varphi_k(\bar{y};N)$ 中的变量（整数），基础函数的加和（通过系数 $w_k^i(N)$ 加权）提供了给定标量函数 f_i（在他们的例子中，它是向量场 f 的第 i 个分量）的近似值。这是一类非常广泛的模型，例如，包括基于贝叶斯（Bayesian）方法或基于正则化（regularization）方法和样条发的核估计，以及在 PWL 框架中的微波、预微波和模糊模型。

由于他们对把单个 H-R 神经元模型作为一个电子电路来实现感兴趣，作为整个网络的一个组成部分，他们将参考文献[19]-[23]中所提到的技术（单纯形(simplicial)PWL 方法）。一般来说，一个现实的电路综合应该基于一组有限的简单组成模块，在（并行）架构中，相同的结构是组合式地重复。简化的 PWL 方法这两个要求都满足。

在所选的技术中，在给定的紧致域上近似向量场的 PWL 函数是基于通过简单类型-1 三角剖分(triangulations)(或单纯形剖分)的先验域区域块的。单纯形（或单一形）是通过将每个域细分为固定数量的完全相同的部分而获得的，并且每个 PWL 函数在每个单纯形上都是仿射的。他们注意到，近似过程中的一个关键点是基础函数 $\varphi_k(\bar{y};N)$ 的选择，其加权和产生

了 PWL 函数。从电路实现的角度来看，最有用的基是所谓的 α -基，它适用于混合信号电路的实现，而 β -基，它适用于模拟电路的实现。

他们定义了两个不同的损失函数(cost functions)（成本函数、代价函数），从而得到两个不同的 PWL 模型。关于所采用的优化方法的详细介绍超出了本文的范围；请感兴趣的读者参阅参考文献[24]。粗略地说，第一个模型从此被称为 α 模型，它是通过最小化仅依赖于基础函数权重的损失函数（域划分是预先确定的）并测量整个域内原始函数和 PWL 函数之间的 L^2 距离，即动力学系统之间的 C^0 距离而得到的。第二个模型（此后称为 β 模型）是通过求解（通过最小化损失函数和质量因子）一个混合整数问题获得的，该混合整数问题取决于基础函数（实变量）的权重和每个域分量（整变量）上的细分数量。损失函数和质量因子都考虑了被逼近系统的一些动力学特性。特别是，对于 HR 模型的近似，他们重点研究了 Hopf 分岔曲线 H_1 和整个领域内动力系统之间的 C^1 距离。β 模型以更复杂的优化方法为代价，在近似精度和模型复杂度之间提供更好的权衡。

α 模型适用于混合信号电路的实现，而 β 模型（也由于其简单性，因为基础函数的数量为 $N = 16$ ）适合于模拟电路的实现。近似后的模型任然保留了环分岔曲线 t_1 、（亚临界）Hopf 曲线 H_1 、翻转曲线 $f_{0,1}^{(1)}$ 和同宿曲线 $h_{2,t}^{(1)}$ 。这表明了分岔情形是被保留的，并且近似模型维持了所有的动力学行为。结果表明，在相同的参数对下，HR 模型和 α PWL 模型的轨线具有良好的匹配性。

五、Hindmarsh–Rose 模型的稳定性（Stability）

J. M. Gonzalez-Miranda[25]对 H-R 神经元模型进行了线性稳定性分析、非线性分析及结构稳定性分析。

关于线性稳定性分析他们考虑一个矩形域

$$\overline{R} = \{(r, I) | r \in [10^{-4}, 0.05], \ I \in [-8.0, 8.0]\} \qquad （6）$$

该矩形（6）的边缘分别是 r 和 I 的取值段[10^{-4}，0.05]和[-8.0，8.0]。之后他们从二维分岔图及方程（1）的线性稳定性分析入手。模型方程有一个单一的不动点（即平衡点），由多项式

$$p(x) = x^3 + 2x + 4x + (\tfrac{27}{5} - I) \qquad （7）$$

的唯一实根所确定，该实根依赖于 I ，而不是 r 。他们分别确定 $x_F(I) \in R$（实数）和 $\Lambda(r, I) \in C$（负数）为 $p(x)$=0 和 $P(\Lambda)$=0 的根。所有发现的特征值都没有零实部，因此他们得出系统在 $\overline{R}$ 中是双曲线的；因此，平衡点附近的非线性动力学类似于线性化系统（Hirsch 等人，[26]）。特征值的结果总结在图 2 中。对于 I 值的增加，如下所示（见图 3）。从第二特征值的虚部，$\mathrm{Im}[\Lambda_2(r, I)]$=- $\mathrm{I}m[\Lambda_3(r, I)]$ 推断出关于不动点周围动力学性质的更多细节。如图 2（b）所示，图 2（b）显示，关于 $\Lambda_2(r, I)$ 和 $\Lambda_3(r, I)$ 的虚部，上述区域 A 、B 和 C 在左、右区域通过曲线 $r = \psi_a(I)$ 分开，该曲线的定义域为 $I \in$（−4.8，5.4），$r = \psi_b(I)$，其定义域为 $I \in$（5.4，6.1）。具体分析内容可见[2]的第三部分。

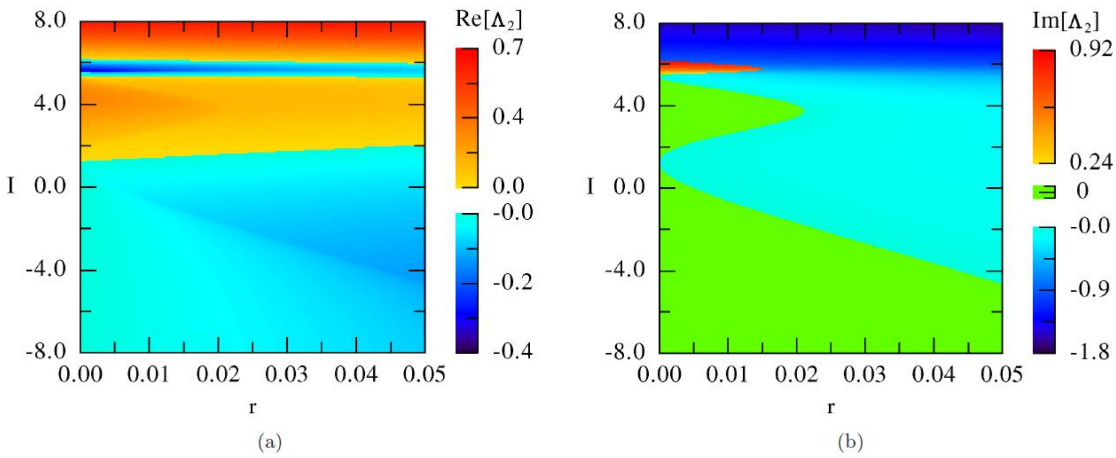


图 2（a）图实部 $\mathrm{Re}[\Lambda_2(r,I)]$ 和（b）图虚部 $\mathrm{Im}[\Lambda_2(r,I)]$，$\Lambda^3 + a(r,I)\Lambda^2 + b(r,I)\Lambda + c(r,I) = 0$ 的第二个根的部分，作为 r 和 I 的函数。颜色代码为：橙色-红色表示正值，绿色表示零，蓝色-紫色表示负值。

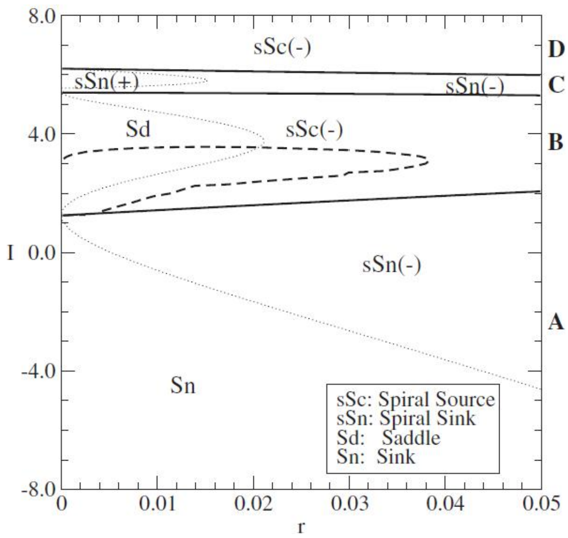
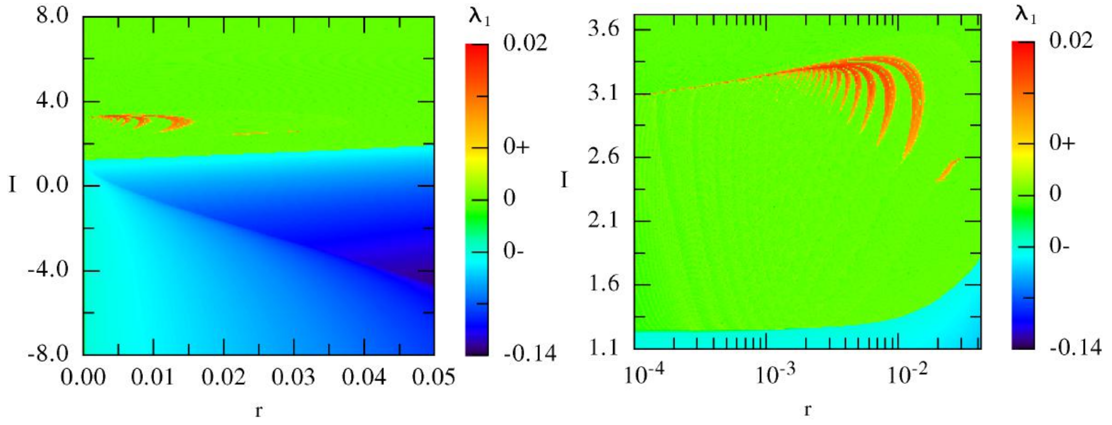


图 3 两参数（r，I）分岔图，显示了不同的稳定状态（标记为 A、B、C、D），由连续线分隔，代表函数 $I = \phi_i(r)$，$i \in \{A,B,C\}$。函数 $\psi_a(I)$ 和 $\psi_b(I)$ 显示为虚线。在每个区域观察到的动力学，通过图图例中提到的缩写来识别，对于螺旋形的情况，在括号中给出了 $\mathrm{Im}[\Lambda_2]$ 的符号。虚线是封闭体 ε 的边界，ε 是复杂非线性分岔结构产生的地方。

J. M. Gonzalez-Miranda[25]在对 H-R 模型的非线性分析时，通过计算 I =1，2，3 的李雅普诺夫指数的谱 $\lambda_i(r,I)$，他们对 Hindmarsh-Rose 模型的动力学行为的性质和稳定性有了更深入的了解，不仅仅是停留在线性稳定性的理解上。这些都是用微分方程组的标准技术进行数值计算得到的（Wolf 等人，[27]）。这个计算的初始条件远离平衡点，因此它们描述了系统的非线性动力学。图 6 中给出的最大 Lyapunov 指数的结果允许他们区分不同的可用动力吸引子：当 $\lambda_1(r,I)$<0 时的平衡点，当 $\lambda_1(r,I)$=0 时的环，以及当 $\lambda_1(r,I)$>0 时的混沌。对于临界线 $I = \phi_A(r)$下的 I，如图 4（a）所示。对于 $\phi_A(r)$以上的 I，如图 4（b）所示。



(a) (b)

图 4 方程(1) −(3) 的最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1(r, I)$ ，作为 r 和 I 的函数：(a) 在矩形区域 $\overline{R}$ 中，(b) 在较小的区域 $\overline{R}_1$ 中，其中动力学行为更为复杂。使用以下颜色代码：橙色表示混沌动力学，绿−黄表示极限环，紫罗兰表示不动点。一个指数间隔被认为是零，是由 $0_-=-10^{-3}$ 和 $0_+ = 10^{-3}$。

在区域 C 中，长期线性和非线性动力学不匹配，在区域 C 中，存在与初始条件相关的双稳性，从而导致系统达到平衡状态或周期振荡。这与在另一个线性稳定区域（区域 A ）中发生的情况相反，在该区域中，无论初始条件是接近或远离固定点，动力学都趋向于渐近平衡。区域 D 的动力学非常简单：他们有一个稳定的极限环和一个不稳定的平衡点；从这个落差中逃逸的轨线进入环。从这些结果中，可以看出，在参数平面上，在区域 B 中，Hindmarsh-Rose 模型的动力学行为更加复杂且更加有趣。更准确地说，矩形区域

$$\overline{R}_1 = \{(r, I) | r \in [10^{-4}, 0.04], I \in [1.1, 3.7]\} \tag{8}$$

包含导致复杂周期振荡（即迸发和尖峰）和混沌的参数值。

J. M. Gonzalez-Miranda[25]在对 H-R 模型的结构稳定性分析时，从 $p(x) = x^3 + 2x + sx + \alpha$ 的根确定不动点。为了测试 δ 变化下的结构稳定性，他们计算了 δ =-1.4 和 δ =-1.8 的特征值 $\Lambda_{1,2,3}(r, I)$。在图 10（a）中，他们在一张图中总结了当 δ =-1.4 时 $\Lambda_2(r, I)$ 的结果，这与图 4 中的 δ =-8/5=-1.6 非常相似。在这种情况下，$\Lambda_1(r, I)$ 被发现是实的和负的，$\Lambda_2(r, I)$ 和 $\Lambda_3(r, I)$ 是复共轭特征值，基本上以相同的方式表现。因此，这里他们还有四个交替区域，a-d，其稳定性由 $\Lambda_2(r, I)$ 的实部给出，它具有水平条带的形式，由曲线 $I = \phi_i(r)$，$i \in \{A, B, C\}$ 分隔，其中 A 和 C 为稳定区域。和以前一样，每个区域的动力学性质都会发生变化，这取决于是否考虑了条带的左侧或右侧部分。事实上，他们看到的结果与图 2 几乎相同，沿着 I 轴向下移动并达到 $\Delta I \approx$0.9。δ =-1.8 的结果（未表示）几乎是相同的，但对于相同数量的位移，这次沿 I 轴向上移动。

通过给出 s =3、2、1 的值来研究 s 的影响。对于不太大的变化，给出的图片如图 4 所示，对于变化 δ 的影响，不受比上一段讨论的更大的修改的影响。特别是，s =3 的图与图 4 中的图的区别不会超过图 5（a）。如图 10（b）中给出的 s =1 结果所示，对于较大的变化，存在定量变化，但本质上不是定性变化。关于稳定性，尽管这些曲线的宽度和位置有很大的修改，他们仍然有两个稳定区域（ A ， C ），与由曲线 $I = \phi_i(r)$，$i \in \{A, B, C\}$ 分隔的不稳定区域（ B ， D ）交替。除其为零的区域外，$\Lambda_2(r, I)$ 的虚部也呈现出类似的结构：（i）显著减少，有利于负的区域，直到其在 A 中消失，在 B 中小得多，并且（ii）已经进入 C 的左下角（他们注意到，尽管在规模小得多的尺度下，图 5（a）中也看到了这最后一个效应）。

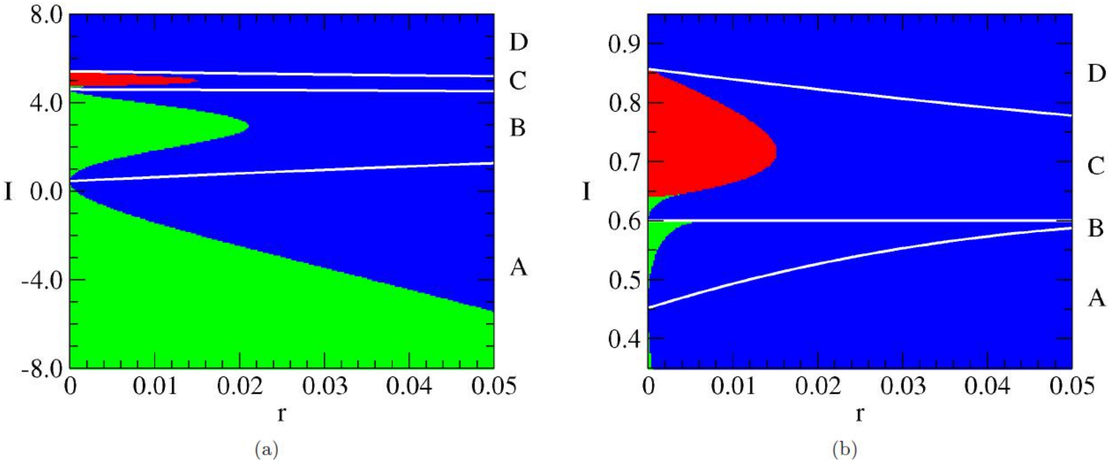


图 5 使用颜色代码绘制的 $\Lambda^3 + a(r,I)\Lambda^2 + b(r,I)\Lambda + c(r,I) = 0$， $\mathrm{Im}[\Lambda_2(r,I)]$的第二根的虚部：红色表示 $\mathrm{Im}[\Lambda]$>0，绿色表示 $\mathrm{Im}[\Lambda]$=0，蓝色表示 $\mathrm{Im}[\Lambda]$<0。白线是函数 $I = \phi_i(r)$， $i \in \{A,B,C\}$ 从下到上，将稳定（ A ， C ）和不稳定（ B ， D ）区域分开。修改后的参数值为（a） δ =-1.4 和（b） s =1.0。

六、Hindmarsh–Rose 模型中的分岔分析（Bifurcation analysis）

Marco Storace，Daniele Linaro 和 Enno de Lange[18]将在较小程度上针对 b 、I 、μ 和 s 的对 H-R 模型进行分岔分析，其中 $x_{rest} = -1.6$ 。他们的分岔分析主要分为强制分岔分析和延拓分析与具体分岔两大部分。在强制分岔分析方面他们提出第一个分岔分析结果，即 $\mu = 0.01$ 和 $s = 4$ 的整体分岔情形和强制分岔分析结果的描述。

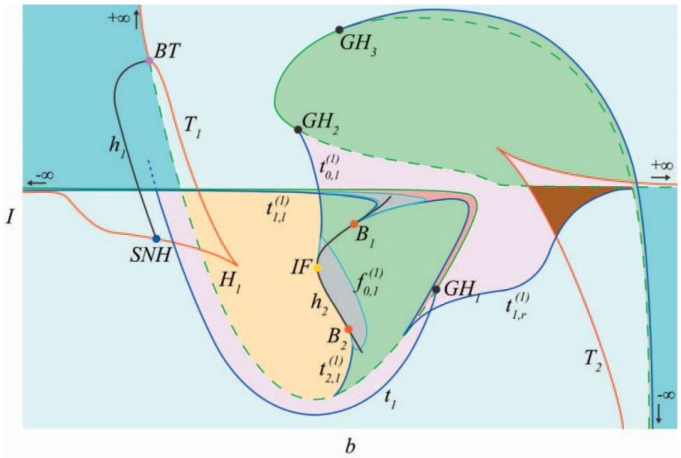


图 6 （彩色）全局分岔情形定性草图

A. 整体分岔情况

H-R 模型的定性分岔图如图 6 所示。整体分岔图大致分为八个区域，具有定性不同的渐近（稳定）现象的特征。有些区域的面积比实际面积大。颜色的含义如下：

•在浅青色区域，H-R 神经元是静态的（只有一个稳定的平衡点）；

•在浅蓝色区域，H-R 神经元是静态的（两个同时共存的稳定平衡）；

•在绿色区域，H-R 神经元有规律地产生尖峰；

•在黄色区域，H-R 神经元有规律地迸发；

•在粉色区域，系统允许两个共存的稳定不变集存在，即一个稳定极限循环（要么是尖峰，要么是迸发），另一个是稳定平衡点；

•在淡红色区域，系统允许两个稳定的“简单的”（尖峰）极限循环；

•在棕色区域，系统允许三个共存的稳定不变集存在，即一个稳定极限环和两个稳定平衡点；

•在灰色区域，系统允许“非平凡”周期性和非周期性（稳定或不稳定）的解存在，然后可以观察到周期性和/或非周期性解（不规则的尖峰或迸发）。

通过以下分岔曲线将参数空间划分为七个区域：平衡点（红色）的 T_1 和 T_2 折；H_1 和 H_2 Hopf（绿色），要么是超临界的（实线）要么是次临界的（虚线）；环（蓝色）的折 t_1、$t_{1,l}^{(1)}$、$t_{1,r}^{(1)}$ 和 $t_{2,1}^{(1)}$；$f_{0,1}^{(1)}$ 倍周期（青色）；h_1 和 h_2 同宿环（黑色）。他们推测，折曲线 t_1 在同宿曲线 h_1 的余维两-2 点上结束，但没有数值证据证明这一推测。在任何情况下，这种分析的实际意义可以忽略不计，因为在现实中，曲线 t_1 和 H_1 几乎是重叠的。

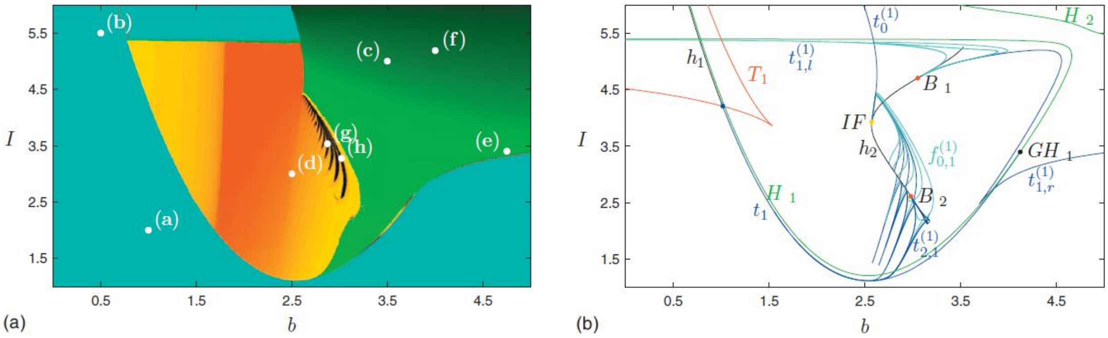


图7 （彩色） (a) 强制分岔图。(b) 延拓分析分岔图。

B. 强制分岔图

在图7（a）中所示的强制分岔图是通过拓展模拟（系统(1)数值积分的模拟）得到的。作为第一步，在参数平面 (b, I) 中定义了一个规则的点阵网格。然后，他们定义庞加莱（*Poincarė*）截面为 $y - x^3 + bx^2 + I - z = 0$，该截面对应于 x 的最大值。对于属于网格的每对参数值，在消除瞬态演化后，记录了至多200个每条轨线与庞加莱（*Poincarė*）截面连续单向的交岔点，以寻找系统演化中的周期性。这个分类是基于与这些截面交岔点相对应的 z 的不同值的数量来划分。在综合中，当 z 值唯一时，神经元是尖峰的，而 z 可以取多个值时可能对应于迸发或混乱（即不规则）现象。在缺乏周期性的情况下，这种现象被归类为“混沌”，在瞬态演化过程中会检查静态。最后，通过将不同颜色与系统的不同渐近动力学现象联系起来，得到了系统的分岔图。图中指出，H-R 模型显示了上述所有动力学现象：青色代表静态，绿色代表尖峰，黄色代表迸发，黑色代表混沌。此外，随着每次爆发的峰数量的增加，黄色变为红色，而随着尖峰频率的增加，绿色趋于变暗。

在延拓分析与具体分岔方面，使用延拓的方法对平衡点分岔、Bogdanov-Takens:存在全局分岔、非中心鞍结点退化、广义 Hopf 点、倾翻（倾斜翻转）退化、Belyakov 退化、轨线翻转退化和在其他参数平面中的分岔情况等方面进行了分析。

D. 平衡点分岔

最外部的接近简单震荡态的分岔线和简单震荡解的共存与平衡点的分岔有关。

系统（1）至多可以有三个平衡点。这三个平衡点存在于由曲线 T_1 和 T_2 所包围的区域内，并产生平衡点的折分岔。在这些区域之外，只有一个平衡点（记为 E_3）。在曲线 H_1 和 H_2 上，平衡点 E_3 经历了 Hopf 分岔（要么是超临界或亚临界的），从而产生一个（尖峰）极限环。平衡点的分岔曲线如图3所示，其中只显示了平衡点。

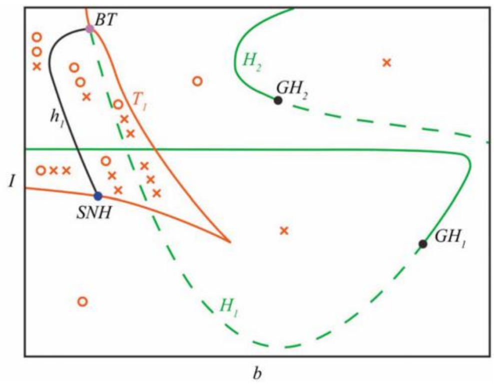


图 8 （彩色线）平衡点分岔曲线。稳定（不稳定）平衡点表示为点（交岔点：×）；m^s（m^u）表示 m 稳定（不稳定）极限环。

E. Bogdanov-Takens:存在全局分岔

在 H_1 和 T_1、E_1 和 E_2 之间的上交岔口处，经历了一个 Bogdanov-Takens（双零点）分岔（图 1 中的 BT 点）。因此，在交岔点 BT 处全局分岔曲线是有根的，通过对 E_2 的同宿轨线驯化的方法（E_2 是一个具有实特征值和二维稳定流形的鞍点），BT 处一条不稳定环退化了。尽管存在全局分岔，尽管 h_1 的退化是证明其他更复杂现象的较好的辅助曲线，BT 点仍然只组织产生简单的动力学现象。

F. 非中心鞍结点退化

通过对远离 BT 点的同宿分岔曲线 h_1 的数值延拓，在 SNH 点发现了首个全局退化（见图 6），在该点同宿分岔经历了非中心鞍结点退化。该余维-2 分岔点在许多动力系统中充当可激发性的组织中心。

G. 广义 Hopf 点

如图 6 所示，H_1 和 H_2 都包含广义 Hopf 退化（GH_1 在 H_1 上、GH_2 和 GH_3 在 H_2 上），其中数值计算的第一个 Lyapunov 系数改变了其符号，从而改变了分岔的超临界/次临界性质。即使在非局部尺度上，围绕广义 Hopf 分岔点展开的系统也是标准的。

H. 倾翻（倾斜翻转）退化

环 $t_0^{(1)}$ 的折分岔在 GH_2 处开始，并结束于一个倾翻退化 IF， IF 是在在曲线 h_2 上使用工具包 HOMCONT 进行数值检测到的。在 IF 上的 E_3（具有二维不稳定流形的鞍结点）的特征值约为-4.5125、0.3302 和 0.0159。余维-2 分岔点 IF 将 h_2 分为两个同宿分岔分支 $h_{2,o}$ 和 $h_{2,t}^{(1)}$，其中同宿轨线是定向的和扭转的。此外，一个无限的倍周期分岔系列和一个无限（中等的）同宿双分岔曲线系列的根源是 IF，如图 9（a）定性草图所示，（只显示了最简单的分岔不变集）。图 9（b）所示为通过数值延拓而获得的一些相关定量曲线并把这些曲线叠加到强制分岔图中的情形。同宿双分岔曲线是不可区分的。

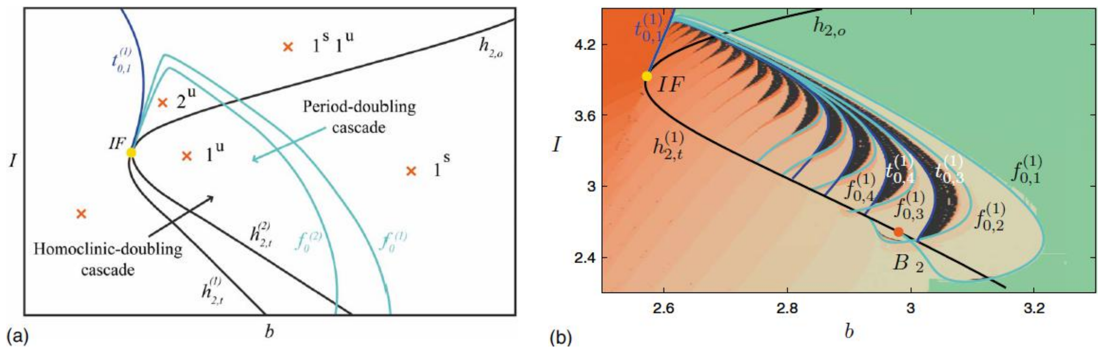


图 9 （彩色线）系统围绕余维二分岔点 IF 展开。（a）定性分岔图。（b）通过数值延拓得到相应的定量曲线。

此后，他们将把源自第 j 个余维二分岔点（ j =0、1、2 分别对应于点 IF 、 B_1 和 B_2 ）的折曲线标记为 $t_{j,k}^{(n)}$，这些分岔点位于的同宿曲线起始于环且有 n 圈。此外， k 表示环与曲线接触的圈数。类似地，翻转曲线被标记为 $f_{j,k}^{(n)}$ 。在这种情况下， k 表示在费根鲍姆型叶栅（Feigenbaum Cascade）中的第 k 个翻转分岔。同宿分岔族源于 IF 组织产生的所谓的混沌区域的结构。该区域在混沌和/或具有周期现象的子区域中被细分，吸引子（环和奇异吸引子）具有不同的几何特征，即具有不同数量的振荡。混沌区域右侧的一系列费根鲍姆型叶栅也由相同的分岔结构组织产生。实际上，图 4 b 右侧的曲线 $t_{0,k}^{(n+1)}$ 和 $f_{0,k}^{(n)}$ 构成了在参考文献[25]和[28]中描述的费根鲍姆叶栅系列的基本结构。实际上，曲线 $t_{0,k}^{(n+1)}$ 是打开第 $(n+1)$时段的周期窗口的折分岔，而曲线 $f_{0,k}^{(n)}$ 是第 $(n+1)$时段换的第一个翻转。

I. Belyakov 退化

同宿分岔曲线 $h_{2,o}$ 经历了 Belyakov 退化（参见图 1 中的点 $B_1^{(1)}$ ），其中平衡点 E_3 从鞍点（实的）变为鞍焦点。这种退化是用 HOMCONT 工具包数值方法检测到的。理论预测了多个分支曲线族（无穷基数），这些分支曲线源于此点并在 $h_{2,o}$ 上呈指数增长累积。外部曲线界定了一个可以观察到混乱（混沌）轨线的区域。如图 10（a）所示，是通过数值延拓获得的定量分支曲线。

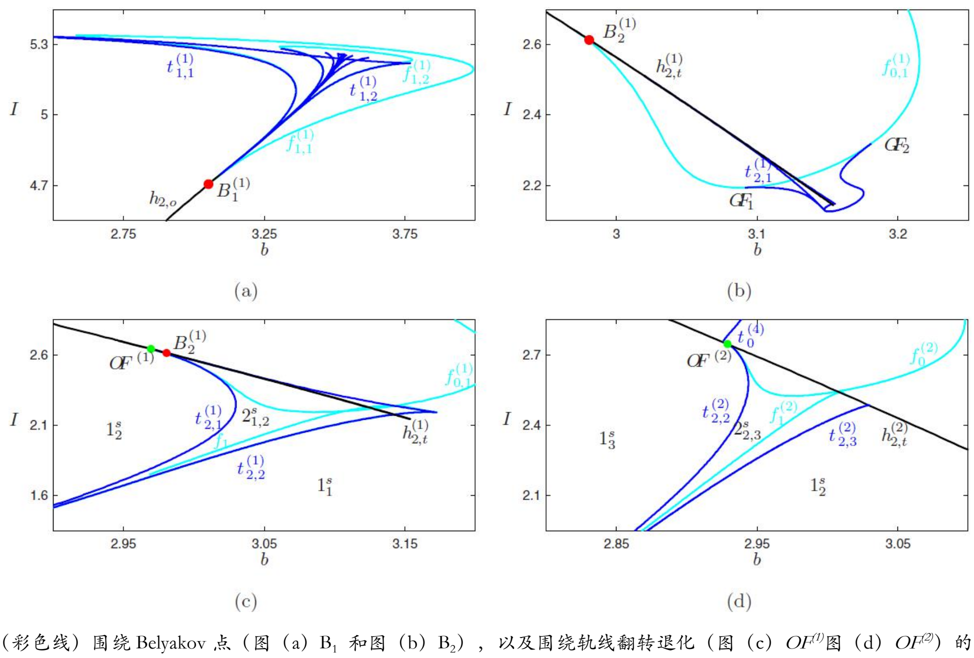


图 10 （彩色线）围绕 Belyakov 点（图（a）B_1 和图（b）B_2），以及围绕轨线翻转退化（图（c）$OF^{(1)}$图（d）$OF^{(2)}$）的分岔图。所有曲线都是通过数值延拓得到的。

实际上，同宿分岔曲线 $h_{2,o}$ 是 U 型的，但有一个非常尖锐的 U 型转弯。对于足够低的 b 值和 I 值，曲线 $h_{2,o}$ 的右分支对应于第一个 x 的最大值的鞍点的同宿轨线。沿着右分支向上经过第一个 Belyakov 点 $B_1^{(1)}$，在该点之上，他们有到鞍焦点的同宿轨线。进一步说，在转折点之后，他们遇到了第二个 Belyakov 点 $B_1^{(2)}$（图 10（a）中点 $B_1^{(1)}$ 和点 $B_1^{(2)}$ 是不可区分的），之后他们又有了到鞍点的同宿轨线。在进行 U 形转弯时，由于出现第二个 x 的最大值，同宿轨线的几何结构发生显著变化；然后，同宿轨线进行两次全局转弯。U 型转弯很急，两个同宿分支以及两个 Belyakov 点在 (b, I) 平面上几乎重合，因此他们无法分离它们。对在初等同宿曲线 $h_{2,o}$ 上以指数形式累积并在 Belyakov 点与之有无限阶相切的多条辅助曲线进行数值计算是非常困难的。在本例中，他们仅能计算（通过延拓）环的第一个折和相应族的第一个翻转分岔曲线，如图 10（a）所示。切线分岔 $t_{1,1}^{(1)}$ 从 $B_1^{(1)}$ 开始，在两个尖点之后，另一个切线分岔 $t_{1,2}^{(1)}$ 返回到 $B_1^{(2)}$。切线分岔 $f_{1,1}^{(1)}$ 始于并返回到相同的 Belyakov 点 $B_1^{(1)}$。同样的观察结果作必要的修改后也可以适用于同宿分岔曲线 $h_{2,t}^{(1)}$，该曲线依次经历 Belyakov 退化（参见图 6 中的点 $B_1^{(2)}$）。通过数值延拓得到的分岔曲线如图 10（b）所示。GF_1 和 GF_2 表示两个广义的翻转点。

J. 轨线翻转退化

任何同宿分岔曲线 $h_{2,t}^{(k)}$ 起始于 IF，且具有轨线翻转（或轨线转变）退化 $OF^{(k)}$。在这个退化点上，同宿轨线沿着其不稳定的非主导特征向量离开鞍点 E_3。因此，当轨线穿过 $OF^{(k)}$ 时，离开方向沿着不稳定的主特征向量而转变。在参数空间中绕着轨线翻转点的展开取决于鞍特征值的相对排列。对于与他们所想的一样的鞍特征值的相对排列，其中（绝对值）稳定特征值大于两个不稳定特征值，除了一系列源自 $OF^{(k)}$ 的无限次中等的同宿分岔曲线外，局部分岔情形（不完全知道）还包含一个环的折和一个翻转曲线。图 10（c）显示了围绕通过数值延拓得到的分岔曲线的 $OF^{(1)}$ 点的排列。环 $t_{2,1}^{(1)}$ 的折和翻转曲线 $f_{0,1}^{(1)}$ 即使在这个尺度上也清晰可见。与 $h_{2,t}^{(1)}$ 相比，中等的同宿分岔曲线是不可区分的。这里仅给出了最简单的稳定分岔不变集；m 个稳定极限环，每个极限环有 n_i（i=1，…，m）个圈，这 m 个极限环被标记为 $m^s_{n_1,\cdots,n_m}$。

该图指出了导致迸发现象的周期叠加机制。在 $t_{2,2}^{(1)}$ 曲线下方，只有一个稳定的带有 1 个弯的环，它在曲线 $t_{2,1}^{(1)}$ 上与不稳定的带有 2 个弯的环相碰撞。不稳定环反过来在曲线 $t_{2,2}^{(1)}$ 上和带有两个弯的环相撞。然后，在 $t_{2,2}^{(1)}$ 和 $t_{2,1}^{(1)}$ 之间（更准确地说，在翻转曲线 $f_{0,1}^{(1)}$ 和 f_1 上方的子区域中），共存两个稳定环（有一个和两个转弯），而在 $t_{2,1}^{(1)}$ 上方只有一个稳定的带有 2 个弯的环。由于这一周期叠加机制，它重复了具有更高圈数的环，（在图 10（d）中显示了周围 $OF^{(2)}$ 的局部情况），他们得到了与迸发现象相关的环。

K. 其他参数平面中的分岔情况

参考文献[25]对 μ 作为输入电流 I 的函数的分岔情况进行了广泛的研究，在较小程度上变量 I 与 s 有关。一个关键点是，该情况与分岔参数的任何非平凡组合都是相似的；正如图 11（上图）所示，当 μ 或 s 是第二个分岔参数时，在图 7 中观察到的具有混沌裂片的剃刀形区域和在图 9（b）中放大的部分在这种情况下都可以被识别出。由于 μ 是第三个（慢）方程的参数，将 μ 从接近 0 的值开始增加，实质上会抹去 b 与 I 分岔图中的细节，正如图 11（下图）所示，在图中显示了参数平面（b，I）上的强制分岔草图，以及不同 μ 值下的 Hopf 分岔曲线 H_1。当 μ 值增加，剃刀形区域变得更大，具有更少的不同裂片，直到 μ 值接近 0. 1 时，不再观察到混沌；同样，由 Hopf 分岔曲线限定的模型的活动区域变得越来越小，直到 μ 刚好低于 0. 4 时，它完全消失。参数 s 也可以观察到类似的压缩现象，它也可以调节慢方程（见图 11）。

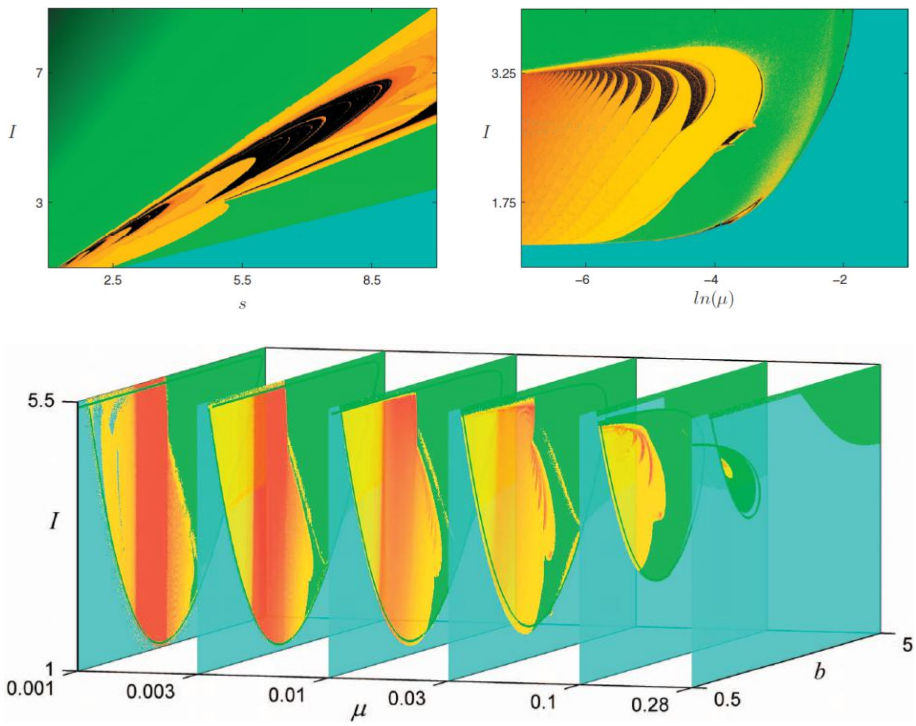


图 11 （彩色）在平面(s，I)(上方左图)和平面(μ，I)(上方右图)上的强制分岔图。μ 对 b 与 I 分岔情景的影响（下方图）。

七、Hindmarsh–Rose 模型的混沌同步（Chaos synchronization）

在[29]中作者进行了延迟耦合项的构造，研究了两个 H-R 神经元、完全连接网络中、星形连接网络中和最近邻域连接网络下的 H-R 神经元混沌同步。他们将研究各种数量的 H-R 神经元通过延迟耦合项按照各种常规网络连接的形式构成网络的同步情况。

首先，他们通过膜电位的线性延迟耦合，建立两个神经元组成的网络模型，见（4）。其中，参数 $i = 1,2$； $j = 2,1$。

在完全连接网络情况下，他们将研究 3 个、6 个以及 12 个 H-R 神经元通过延迟耦合项按照完全连接的形式构成网络的同步情况。首先，考虑 N 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合系数形式构造的网络：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= x_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_{ext} + \varepsilon\Big[\sum_{j=1, j\neq i}^{N} G_{ij}x_j(t-\tau) + G_{ii}x_i\Big] \\
\frac{dy_i}{dt} &= c - dx_i^2 - y_i \\
\frac{dz_i}{dt} &= r[s(x_i - x_{rest}) - z_i]
\end{aligned} \tag{9}
$$

式中参数含义同上文，$G = \{G_{ij}\}$ 为完全连接耦合系数矩阵，如下

$$
G = \begin{Bmatrix}
-(N-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & -(N-1) & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1 & -(N-1) & \cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & -(N-1)
\end{Bmatrix} \tag{10}
$$

在$\varepsilon \in$[0.007,0.06]时，通过时间延迟耦合τ =8.5 的这两个神经元，会产生爆发性混沌同步的行为。且在τ =8.5 和ε =0.01 作用下，两个神经元实现了稳定的混沌同步。当$\tau \in$ [7.1,7.3]和$\tau \in$[9.0,9.2]的时候，两个神经元达到较好的完全同步状态，如图 12 所示。

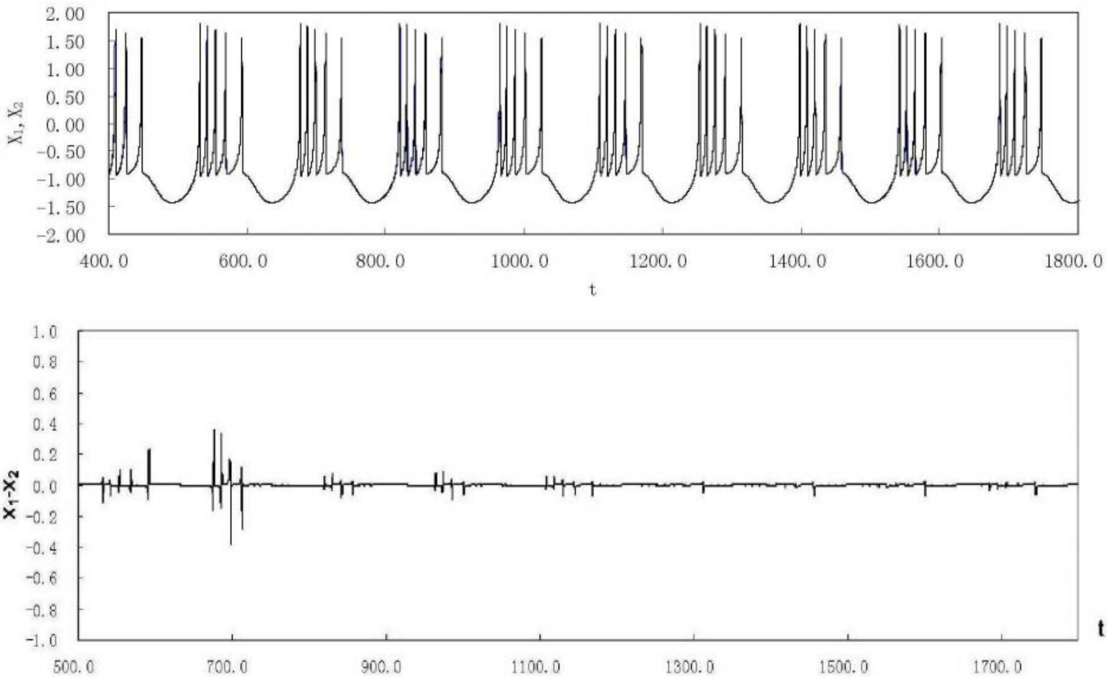


图 12 两个神经元达到较好的完全同步状态时间历程图

他们不仅验证了 Dhamala 提出的“两个神经元在一定延迟耦合（ε = 0.10，τ =8.0）的情况下能够取得混沌同步”这个结论，而且还找到了两个神经元同步时耦合强度及时间延迟的取值范围。

从完全连接的方式上我们可以看出：在t时刻，每个神经元在延迟耦合时，均会收到来自网络中其他 N-1 个神经元$t-\tau$时刻发出信号的影响。3 个、6 个以及 12 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合系数形式构造的网络结构图如图 13 所示。

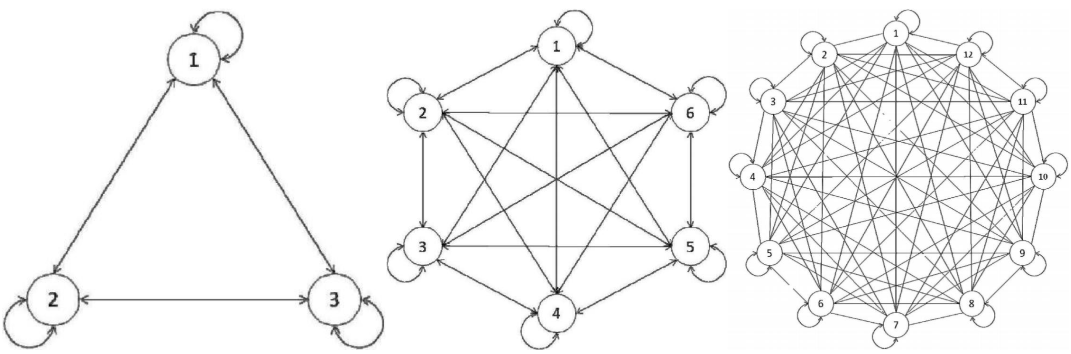


图 13 3 个、6 个以及 12 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合系数形式构造的网络结构图

当耦合数为 3 时，取ε =0.01 不变，当延迟$\tau \in$[9.0,10.2]这个区间范围内时，这 3 个神经元均能达到理想的同步效果。在τ =9.2 时，同步尤为明显。如图 14 所示。

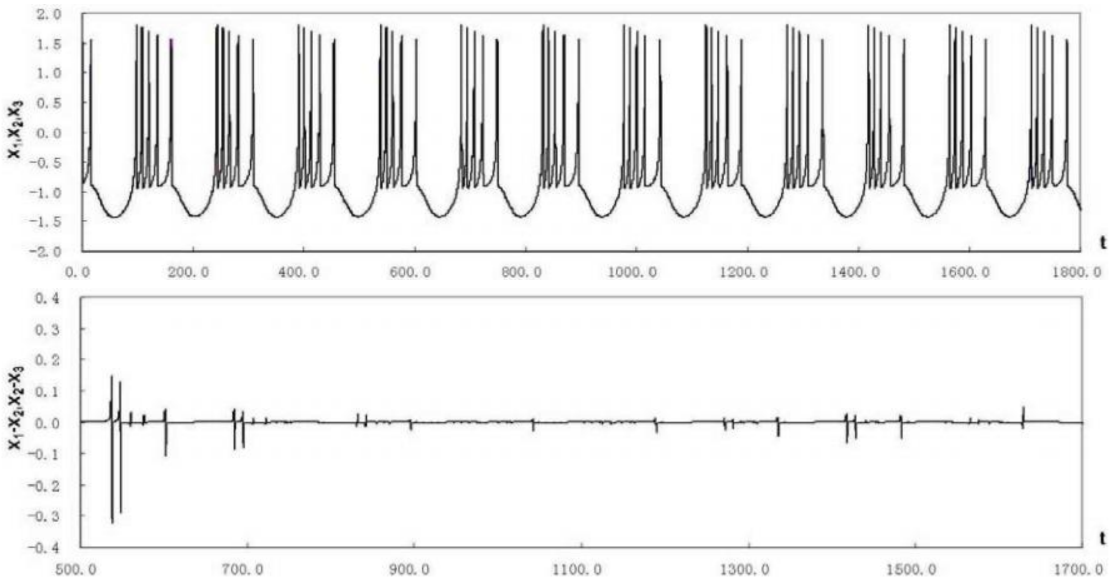


图 14　3 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合达到较好的完全同步状态时间历程图

当耦合数为 6 时，当取 τ =9.0，$\varepsilon \in$[0.002,0.01]时，这 6 个 Hindmarsh-Rose 神经元均能获得较好的同步效果，如图 15 所示。

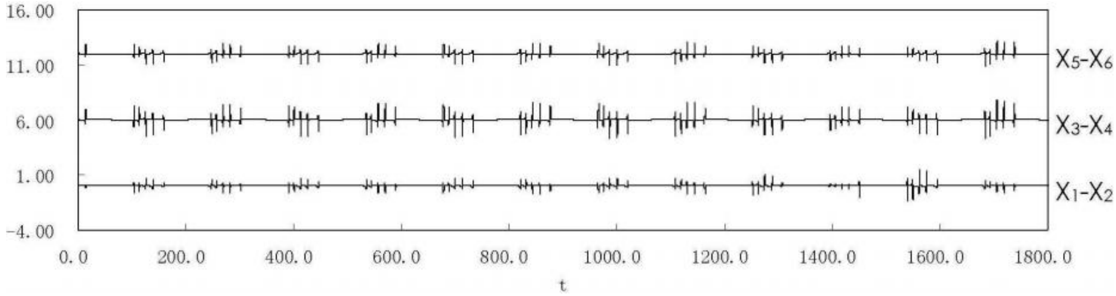
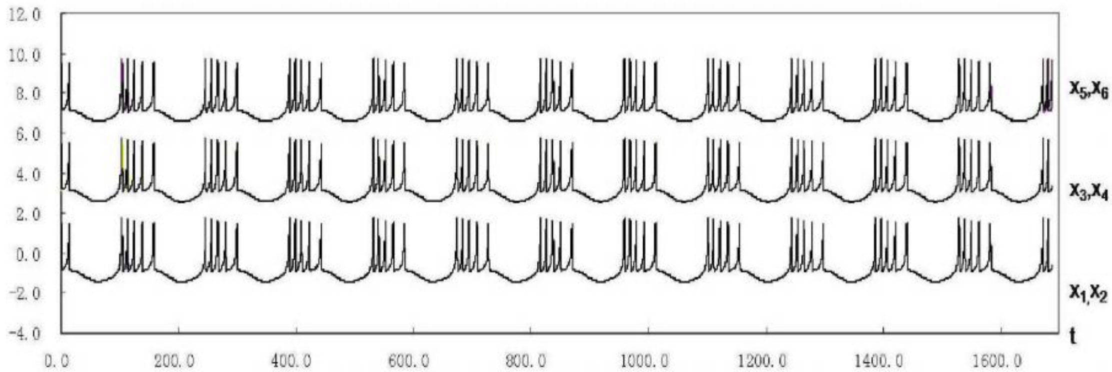


图 15　6 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合达到较好的完全同步状态时间历程图

取 ε = 0.01 不变，当时间延迟 $\tau \in$[3.0,10.0]时，这 6 个神经元能取得十分不错的同步效果，尤其是当 $\tau \in$[8.3,8.7]区间时，同步效果尤为明显，如图 16 所示。



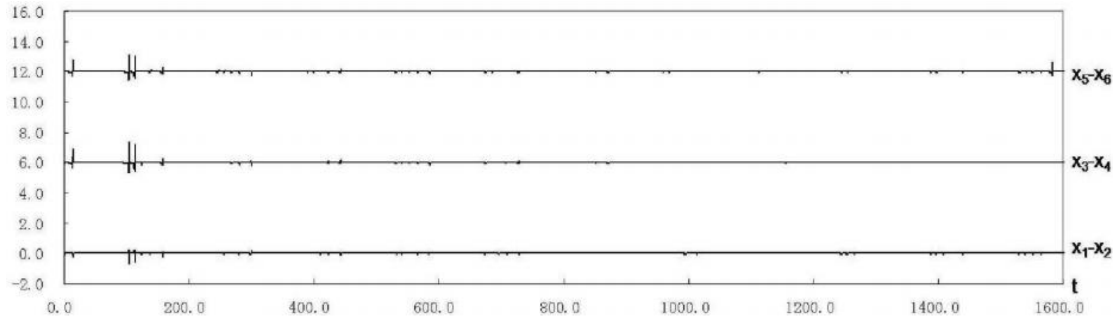


图 16　6 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合达到较好的完全同步状态时间历程图

当耦合数为 12 时，时间延迟τ =9.0，耦合强度$\varepsilon\in$[0.0008,0.005]时，网络中 12 个 H-R 神经元能取得很好的同步效果，而且在$\varepsilon\in$[0.0006,0.0008]时，能取得非常迅速的同步速度。其中，当ε = 0.003 时，这 12 个 H-R 神经元的同步情况达到最佳，如图 3-7 所示。当ε = 0.003，时间延迟$\tau\in$[0.1,11.7]时，此 12 个 Hindmarsh-Rose 神经元均能取得十分完美的同步状态，如图 17 所示。

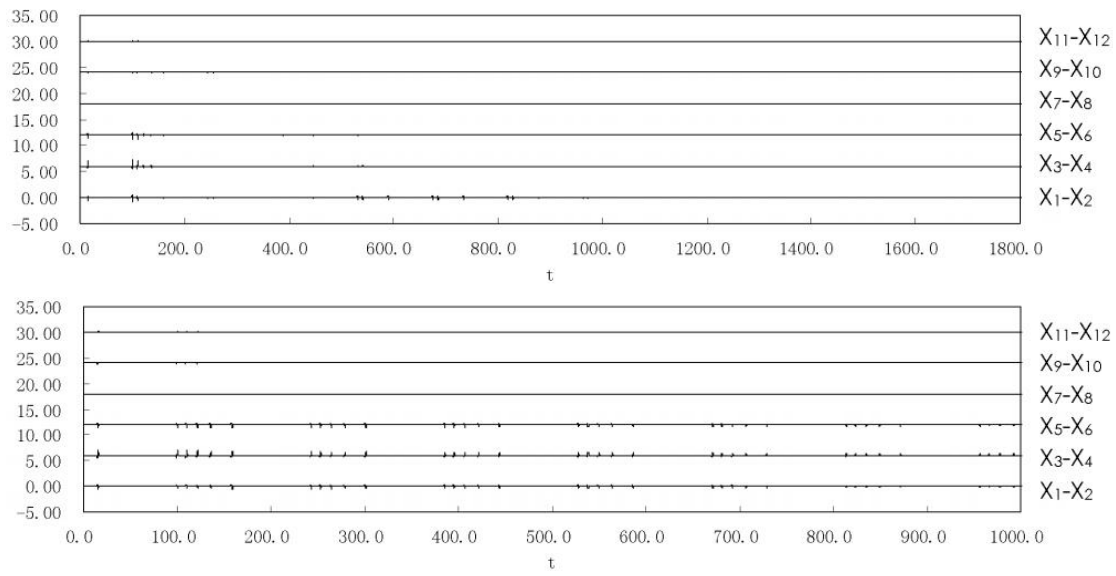


图 17　12 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照完全连接耦合达到较好的完全同步状态时间历程图

在星形连接网络情况下，他们将研究 4 个、6 个以及 8 个 H-R 神经元通过延迟耦合项按照星形连接的形式构成网络的同步情况。首先，考虑 N 个 H-R 神经元通过延迟耦合项按照星形连接耦合系数形式构造的网络：

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= x_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_{ext} + \varepsilon[\sum_{j=1,j\neq i}^{N} S_{ij}x_j(t-\tau) + S_{ii}x_i] \\ \frac{dy_i}{dt} &= c - dx_i^2 - y_i \\ \frac{dz_i}{dt} &= r[s(x_i - x_{rest}) - z_i]\end{aligned} \tag{11}$$

式中参数含义同上文，$S = \{S_{ij}\}$为完全连接耦合系数矩阵，如下

$$S = \begin{Bmatrix} -(N-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

与完全连接有所不同，从星形连接的方式上我们可以看出：在t时刻，只有第一个神经元在延迟耦合时，会收到来自网络中其他 N -1 个神经元$t-\tau$时刻发出的信号；而其他 N-1 个神经元在t时刻延迟耦合时，均能且仅能收到第一个神经元$t-\tau$时刻发出的信号。4 个 、6 个以及 8 个 H-R 神经元通过延迟耦合项按照星形连接的形式构成网络的连接模型如图 18 所示：

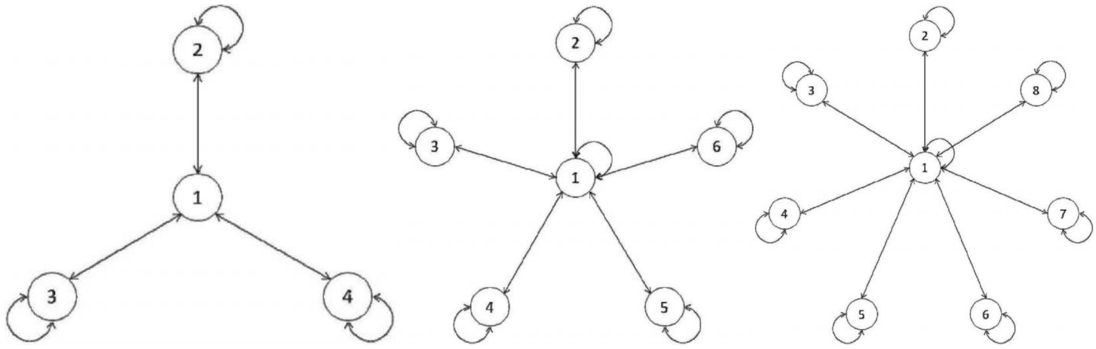


图 18 4 个 、6 个以及 8 个 H-R 神经元通过延迟耦合项按照星形连接的形式构成网络的连接模型

分别控制耦合强度参数与时间延迟参数的变化，研究 Hindmarsh-Rose 神经元在延迟-星形连接网络情况下比较理想的同步情况，以及达到同步时耦合强度参数和时间延迟参数的取值范围，具体参数取值范围可参考[29]。

在最近邻域连接网络的情况下，我们将分别研究 4 个、6 个以及 8 个 H-R 神经元的延迟耦合同步情况。考虑 N 个 H-R 神经元通过延迟耦合按照最近邻域连接耦合系数形式构造的网络：

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_{ext} + \varepsilon[\sum_{j=1, j\neq i}^{N} C_{ij}x_j(t-\tau) + C_{ii}x_i] \\ \frac{dy_i}{dt} &= c - dx_i^2 - y_i \\ \frac{dz_i}{dt} &= r[s(x_i - x_{rest}) - z_i] \end{aligned} \tag{11}$$

式中参数含义同上文，$C = \{C_{ij}\}$为完全连接耦合系数矩阵，如下

$$C = \begin{Bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

从最近邻域连接的方式上我们可以看出其耦合系数是个特殊的循环矩阵，且在t时刻，每个 H-R 神经元在延迟耦合时，均只能收到来自与其最相邻的两个神经元$t-\tau$时刻发出的

信号（例如在一个由 N 个 H-R 神经元组成的最近邻域连接网络中，1 号神经元将与 2 号与 N 号神经元连接，2 号神经元则与 1 号及 3 号神经元连接，N 号神经元与 1 号、N -1 号神经元连接）。

4 个、6 个以及 8 个 H-R 神经元组成的延迟-最近邻域连接网络的同步情况，其连接模型如图 19 所示：

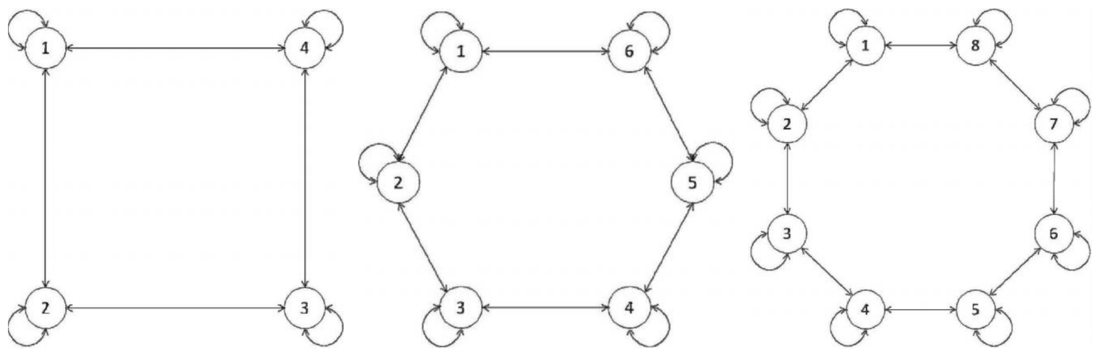


图 19　4 个、6 个以及 8 个 H-R 神经元组成的延迟-最近邻域连接网络的同步情况连接模型

他们完成了对 H-R 神经元在延迟-最近邻域连接网络中的同步情况的研究。通过分别控制耦合强度 ε 与时间延迟 τ 的缓慢变化，不仅研究了延迟－最近邻域网络中 H-R 神经元比较理想的同步情况，而且还找到了达到网络中神经元同步时耦合强度 ε 和时间延迟 τ 的取值范围，具体参数取值范围可参考[29]。

总结和讨论

本次对 Hindmarsh-Rose 模型的综述，主要是对 H-R 神经元模型的来源及数学模型方程进行了简单的介绍，之后对 H-R 神经元模型的数值模拟（Numerical simulation）及相关数学性质进行了简单介绍，如：H-R 神经元模型常见的耦合方式（Coupling mode）、分段线性近似（Piecewise linear approximation）、稳定性（Stability）、分岔分析（Bifurcation analysis）和混沌同步（Chaos synchronization）的研究现状进行了简要的总结。

参考文献：

[1]　Hindmarsh J L , Rose R M . A model of the nerve impulse using two first-order differential equations[J]. Nature, 1982, 296(5853):162-164.

[2]　Hindmarsh J L , Rose R M . A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations[J]. Proc R Soc Lond B Biol Sci, 1984, 221(1222):87-102.

[3]　徐克生, 张伟东, 唐国宁. Hindmarsh-Rose 神经元模型的单变量控制同步与反同步[J]. 广西师范大学学报（自然科学版）, 2010, 28(4).

[4]　Huerta R , Bazhenov M , Rabinovich M I . Clusters of synchronization and bistability in lattices of chaotic neurons[J]. Europhysics Letters, 1998, 43(6):719---724724.

[5]　吴(王莹), 徐健学, 何岱海, et al. 两个非耦合 Hindmarsh-Rose 神经元同步的非线性特征研究[J]. 物理学报, 2005, 54(7).

[6]　李海泉, 徐伟, 王朝庆, et al. 电突触耦合神经元的相位同步及放电节律的转化[J]. 生物物理学报, 2008, 24(1).

[7]　Li Y L , Wu M , Ma J , et al. A scheme of de-synchronization in globally coupled neural networks and its possible

implications for vagus nerve stimulation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39(3):1472-1479.

[8] Zanette D H . Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks[J]. Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids & Related Interdisciplinary Topics, 1998, 58(1):872-875.

[9] Alonso L M , Mindlin G B . Average dynamics of a driven set of globally coupled excitable units[J]. Chaos, 2011, 21(2):420-422.

[10] 胡庆平, 任艳琴. 平均场耦合的 Hindmarsh-Rose 神经元相同步[J]. 武汉纺织大学学报, 2008, 21(9):25-30.

[11] Benavraham D , Redner S . Kinetics of n-species annihilation: Mean-field and diffusion-controlled limits[J]. Physical Review A, 1986, 34(1):501-509.

[12] Sharma A , Shrimali M D . Amplitude death with mean-field diffusion[J]. Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics, 2012, 85(5):057204.

[13] Rosenblum M G , Pikovsky A S . Controlling Synchronization in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators[J]. Phys.rev.lett, 2004, 92(11):114102-114300.

[14] 林晨, 于洪洁. 延迟-完全连接 H-R 神经网络的同步[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(6):1017-1021.

[15] Atay F M , Jost, Jürgen, Wende A . Delays, connection topology, and synchronization of coupled chaotic maps[J]. Physical Review Letters, 2003, 92(14):144101.

[16] Adhikari B M , Prasad A , Dhamala M . Time-delay-induced phase-transition to synchrony in coupled bursting neurons[J]. Chaos (Woodbury, N.Y.), 2011, 21(2):023116.

[17] 袁国勇, 杨世平, 王光瑞, et al. 两个延迟耦合 FitzHugh-Nagumo 系统的动力学行为[J]. 物理学报, 2005, 54(4):1510-1522.

[18] Storace M , Linaro D , De Lange E . The Hindmarsh-Rose neuron model: Bifurcation analysis and piecewise-linear approximations[J]. Chaos, 2008, 18(3):162-688.

[19] Julian P , Desages A , Agamennoni O . High-level canonical piecewise linear representation using a simplicial partition[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(4):463-480.

[20] Julian P , Desages A , D"Amico B . Orthonormal high-level canonical PWL functions with applications to model reduction[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(5):702-712.

[21] Storace M , Repetto L , Parodi M . A method for the approximate synthesis of cellular non-linear networks—Part 1: Circuit definition[J]. International Journal of Circuit Theory & Applications, 2003, 31(3):277-297.

[22] Storace M , De Feo O . Piecewise-linear approximation of nonlinear dynamical systems[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers, 2004, 51(4):830-842.

[23] Storace M , Bizzarri F . Towards Accurate PWL Approximations of Parameter-Dependent Nonlinear Dynamical Systems With Equilibria and Limit Cycles[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2007, 54(3):620-631.

[24] Linaro D , Bizzarri F , Storace M . Piecewise-linear approximation of the Hindmarsh-Rose neuron model[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2008, 138:012011.

[25] J. M. GONZÀLEZ-MIRANDA. COMPLEX BIFURCATION STRUCTURES IN THE HINDMARSH–ROSE NEURON MODEL[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014, 17(09):0701887.

[26] Devaney, Robert L , Smale, et al. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos /[M]// Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. 世界图书出版公司, 2007.

[27] Wolf A , Swift J B , Swinney H L , et al. Determining Lyapounov exponents from a time series.[J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 1985, 16(3):285-317.

[28] Gonza?lez-Miranda, J. M . Observation of a continuous interior crisis in the Hindmarsh–Rose neuron model[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2003, 13(3):845.

[29] 林晨. Hindmarsh-Rose 神经网络的混沌同步[D]. 2007.