

# 激发介质中螺旋波的波尖运动<sup>\*</sup>

刘深泉<sup>1)</sup> 陆启韶<sup>1)2)</sup> 王 琪<sup>1)</sup>

1)(北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083)

2)(中国科学院理论物理研究所, 北京 100080)

(1997 年 10 月 13 日收到)

讨论二维激发介质中螺旋波的运动规律, 用摄动法将螺旋波的波前运动分成切向和法向两部分, 得到了相应的切向运动方程和法向运动方程. 当考虑波尖时, 得到波尖运动的基本规律以及扭曲环和长扭曲链的波尖轨迹. 当考虑波前及其扰动时, 不仅得到普通螺旋波, 而且可解释超螺旋波和双螺旋波的结构.

PACC: 0340K

## 1 引 言

激发介质的波动研究有着广泛的实际背景, 近年来受到普遍的关注. 与激发介质紧密相关的问题, 如心脏组织的运动、阿米巴聚集和 BZ 化学反应等. 这些介质的共同特点是它们都具有可激发性. 当介质受到小的扰动时, 介质很快恢复到平衡态; 但当扰动超过某一临界值时, 介质中的变化要经过激发期和漂移期, 才能恢复到平衡态. 在一般激发介质的理论研究方面, 对平面情形, 以前主要讨论在单螺旋波的波形结构和波的色散关系, 留下波核和波尖等难题<sup>[1]</sup>. 常见的阿米巴细菌的双螺旋结构和最近发现的 BZ 化学反应中的超螺旋结构尚没有理论分析. 对三维空间情形, 主要讨论在回卷波的波前和组织中心的运动规律<sup>[2]</sup>. 在数值计算研究方面, 主要考虑螺旋波的波尖漫游和回卷波的组织中心运动<sup>[3]</sup>. 由于 BZ 反应容易操作, 大量的激发介质的实验集中在 BZ 化学反应的波形研究. 本文主要利用摄动法分析二维螺旋波, 将螺旋波的波前运动规律分为切向和法向两部分, 得到波前运动的方程, 并应用此方程讨论波尖和扰动波前的性质, 得到与实验一致的分析结果.

常见的激发介质运动方程为

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta^2 u + f(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon \mu \Delta^2 v + g(u, v), \quad (1)$$

式中  $u$  为快变量,  $v$  为慢变量.  $\epsilon$  为小参数,  $\mu$  为扩散系数. 不同形式的  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  表示不同的动力学模型<sup>[1]</sup>. 但对通常激发介质的  $f, g$  都具有共同的特点:  $f$  的零值线  $f(u, v)=0$  为倒 N 型. 它有三个单值支:  $u = u_-(v)$ ,  $u = u_0(v)$  和  $v = u_+(v)$ .  $g$  的零值线单调变化, 且两者的唯一交点在  $f(u, v)$  零值线的左边一支上,  $u = u_-(v)$ , 见图 1.

<sup>\*</sup>国家自然科学基金(批准号: 19572014)和国家基础性研究重大项目《非线性科学》基金资助的课题.

我们考虑二维空间情形. 实验表明二维激发介质中螺旋波的存在, 数值计算也证实了此结论. 在螺旋波的结构中, 从  $u = u_-(v)$  跳跃到  $u = u_+(v)$  的边界称为波前, 从  $u =$

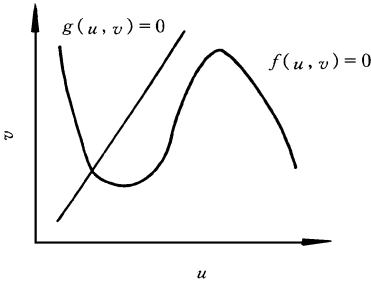


图 1 激发介质轨线图

$u_-(v)$  跳跃到  $u = u_+(v)$  的边界称为波后, 波前和波后的交点称为波尖. 波前的邻域, 一般称为波前边界层, 沿其法向快变量  $u$  变化很快, 但慢变量  $v$  变化不明显. 普通的分析都集中在此波前法向很薄的边界层内, 特别是沿法向的运动, 而切向的运动往往被忽略. 文献 [6] 用摄动方法得到波前所满足的 eikonal 方程, 然后在理论上分析了激发介质的螺旋波形. 对于波尖, 已有的实验和计算表明它的轨迹是扭结的螺旋形<sup>[3, 10]</sup>, 但理论上的分析很少. 文献 [4, 5] 用圆环的复合运动来描述螺旋波的波尖运动, 得到波尖

的扭环轨迹. 这种轨迹虽然与部分实验中的波尖轨迹相符合, 但与实验和计算中常见的扭曲长链形状相差很远. 至于直接利用激发介质的反应扩散方程来分析波尖运动, 尚未见报道. 本文采用摄动方法, 直接从方程 (1) 出发讨论扰动波前和波尖的运动规律.

## 2 一般分析

为了研究波前的性质, 首先在边界层内建立移动的坐标系. 设在任意时刻  $t$ , 波前为一曲线  $\Gamma$ ,  $s$  为从波尖到波前  $\Gamma$  上一点的曲线弧长,  $r$  为波前邻域内一点  $(x, y)$  到波前  $\Gamma$  的法向距离, 这样就得到波前邻域内局部正交的移动坐标系  $(r, s)$ . 设此移动坐标系与原坐标系的坐标变换关系为

$$\tau = t, \quad r = r(x, y, t), \quad s = s(x, y, t), \tag{2}$$

于是波前邻域内的点可用移动坐标系唯一表示, 且波前  $\Gamma$  由  $r(x, y, t) = 0$  表示, 波尖由  $r(x, y, t) = 0, s(x, y, t) = 0$  表示. 不失一般性, 取  $|\Delta r| = 1, \Delta r \cdot \Delta s = 0$ , 在此坐标系下, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + r_t \frac{\partial}{\partial r} + s_t \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= r_x \frac{\partial}{\partial r} + s_x \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= r_x^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r_{xx} \frac{\partial}{\partial r} + 2r_x s_x \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} + s_x^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + s_{xx} \frac{\partial}{\partial s}, \\ \Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta^2 r \frac{\partial}{\partial r} + |\Delta s|^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \Delta^2 s \frac{\partial}{\partial s}. \end{aligned} \tag{3}$$

将(3)式代入方程(1), 得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial r} r_t + \frac{\partial u}{\partial s} s_t \right) &= \epsilon \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} |\Delta s|^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \Delta^2 r + \frac{\partial u}{\partial s} \Delta^2 s \right] + f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial r} r_t + \frac{\partial v}{\partial s} s_t &= \epsilon \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} |\Delta s|^2 + \frac{\partial v}{\partial r} \Delta^2 r + \frac{\partial v}{\partial s} \Delta^2 s \right] + g(u, v). \end{aligned} \tag{4}$$

假设在波前的切线方向上,  $u$  变化很小, 仅考虑  $u$  在波前  $\Gamma$  的法向变化, 由于波前附近存在一个沿法向很薄的边界层, 在此边界层内快变量  $u$  沿法向的变化很快. 由于边界层很薄, 我们用扩大的法向标度来观察. 令  $r = \epsilon R$ , 则有

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial R} r_t + \epsilon \frac{\partial u}{\partial s} s_t &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} |\Delta s|^2 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial R} \Delta^2 r + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial s} \Delta^2 s + f(u, v), \\ \epsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial R} r_t + \epsilon \frac{\partial v}{\partial s} s_t &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial R^2} + \epsilon^2 \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} |\Delta s|^2 + \epsilon \mu \frac{\partial v}{\partial R} \Delta^2 r + \epsilon^2 \mu \frac{\partial v}{\partial s} \Delta^2 s \\ &+ \epsilon g(u, v). \end{aligned} \tag{5}$$

考虑  $O(\epsilon^0)$  阶近似. 假设波前在某点(例如波尖)附近曲率较大, 故  $\Delta^2 r = O(\epsilon^{-1})$ , 这里保留了  $\epsilon \Delta^2 r$  项, 从而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + (\epsilon \Delta^2 r - r_t) \frac{\partial u}{\partial R} + f(u, v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial R} r_t &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial R^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

从方程(6)的第二式得知若  $\mu$  为小量, 则  $v$  在边界层内沿波前的法向变化很慢, 在边界层内可近似取  $v = v_0$  为常数. 代入方程(6)的第一式, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + (\epsilon \Delta^2 r - r_t) \frac{\partial u}{\partial R} + f(u, v_0) = 0. \tag{7}$$

对方程(7), 自变量  $R$  的变化范围为  $(-\infty, +\infty)$ . 在波前的法线两侧,  $u$  从  $u_-(v_0)$  很快跳跃到  $u_+(v_0)$ , 由一维反应扩散方程的性质可知:

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{\partial u}{\partial R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial R} = 0, \tag{8}$$

将方程(7)的两边乘  $\frac{\partial u}{\partial R}$ , 并对  $R$  从  $-\infty$  积分到  $+\infty$ , 注意到(8)式得知:

$$\begin{aligned} r_t &= \epsilon \Delta^2 r + c, \\ c &= \frac{\int_{u_-(v_0)}^{u_+(v_0)} f(u, v_0) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial u}{\partial R} \right]^2 dR}, \end{aligned} \tag{9}$$

式中各个量具有明显的几何意义,  $c$  为波前作为平面的平面波速,  $\Delta^2 r$  为波前的平均曲率,  $r_t$  为波前的法向速度. 方程(9)表示波前的法向速度受曲率的影响. 类似关系最早由 Keener 用几何方法得到<sup>[6]</sup>, 并称为 eikonal 方程. 三维的类似结果由 Gomati<sup>[7]</sup> 和 Ding<sup>[8]</sup> 分别得到. 他们的结论与方程(9)在几何上是一致的, 但在推导和形式上均有差别. 以往的理论分析是将一般曲线的法向速度和平均曲率表达式代入后得到一微分方程, 然后分析此方程. 二维时 Keener 的分析得到了螺旋波解. 三维时方程太复杂而难于求解, 文献[7]在简化的条件下得到三维回卷波. 文献[9]用 Fife 量级分析得到了与实际符合的回卷波. 然而以前的研究方法过多依赖于几何因素, 使得问题复杂化. 下面直接从分析的角度来研究此问题.

方程(9)为一平面热传导方程. 将方程(9)写成

们用 
$$\frac{\partial r}{\partial t} = \epsilon \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) + c. \quad (11)$$

注意到前面的记法,  $r$  为波前到其邻域点  $(x, y)$  的法线距离,  $r=0$  为波前  $\Gamma$ . 只需解方程 (11), 此方程解的零值线就是我们所要的波前  $\Gamma$ . 下面给出该方程的特殊解. 为了方便, 我们用极坐标来表示该方程.

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \epsilon \left( \frac{\partial^2 r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \right) + c. \quad (12)$$

易见方程 (12) 有如下简单特解:

$$(i) \quad r_1(\rho, \theta) = A_1 \ln \rho + A_2 \rho^2 + C_1 t + A_3 \quad (C_1 = 4\epsilon A_2 + c),$$

$$(ii) \quad r_2(\rho, \theta) = A_1 \ln \rho + A_2 \rho^2 + a\theta + C_1 t + A_3 \quad (C_1 = 4\epsilon A_2 + c), \quad (13)$$

式中  $a, A_1, A_2, A_3, C_1$  为常数.

上面各式中, 令  $r_i(\rho, \theta) = 0 (i = 1, 2)$ , 它们分别给出激发介质波前在平面上的图形: (i) 对应圆环, (ii) 对应螺旋线, (i) 和 (ii) 为激发介质实验中常见的波前基本结构, 当然方程 (12) 还有其他波形. 一般地, 要找到与具体实际模型相联系的波形, 还需要确定方程 (12) 的边界和初始条件. 这个问题值得深入研究.

以上是在波前的邻域内, 用扩大的法线标度, 主要考虑法线方向上  $u$  的变化规律. 对实际的螺旋波前, 在切线方向的变化有时也会影响波形. 下面用扩大的切线标度, 在波前的切线方向上来摄动方程 (4). 设在波前的某一点  $s = s_0$  处的邻域内,  $u$  沿切线方向变化很大, 用扩大的切向标度来分析方程 (4). 设  $s - s_0 = \epsilon S$ , 则方程 (4) 变为

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial r} r_t + \frac{\partial u}{\partial S} s_t &= \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} |\Delta s|^2 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial S} \Delta^2 s + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \Delta^2 r + f(u, v), \\ \epsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial S} s_t + \epsilon \frac{\partial v}{\partial r} r_t &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} |\Delta s|^2 + \epsilon^2 \mu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \epsilon^2 \mu \frac{\partial v}{\partial r} \Delta^2 r + \epsilon \mu \frac{\partial v}{\partial S} \Delta^2 s + g(u, v). \end{aligned} \quad (14)$$

仍保留  $\epsilon \Delta^2 s$  项, 则  $O(\epsilon^0)$  阶近似为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} |\Delta s|^2 + (\epsilon \Delta^2 s - s_t) \frac{\partial u}{\partial S} + f(u, v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial S} s_t &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} |\Delta s|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

由 (15) 式的第二式, 仍可在波前上取  $v = v_0$  为常数, 于是 (15) 式的第一式成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} |\Delta s|^2 + (\epsilon \Delta^2 s - s_t) \frac{\partial u}{\partial S} + f(u, v_0) = 0. \quad (16)$$

对方程 (16), 扩大的自变量  $S$  的变化范围为  $(-\infty, +\infty)$ . 在方程 (16) 的两边乘  $\frac{\partial u}{\partial S}$ , 并对  $S$  从  $-\infty$  积分到  $+\infty$ , 类似方程 (9) 的推导, 可得

$$s_t = \epsilon \Delta^2 s + \frac{1}{a} (b |\Delta s|^2 + d), \quad (17)$$

式中

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial S} \right)^2 dS,$$

$$b = \frac{\partial u}{\partial S} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\partial u}{\partial S} \Big|_{s=+\infty} - \frac{\partial u}{\partial S} \Big|_{s=-\infty} = \frac{\partial u}{\partial S}(s_0 + \epsilon) - \frac{\partial u}{\partial S}(s_0 - \epsilon),$$

$$d = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \frac{\partial u}{\partial S} dS = \int_{u(s_0-\epsilon)}^{u(s_0+\epsilon)} f(u, v_0) du,$$
(18)

从而得到波前在切线方向上的变化规律. 从(18)式可知, 一般地, 当快变量  $u$  在波前  $s_0$  的邻域内平缓变化时,  $b$  和  $d$  可近似为零, 故当  $\epsilon$  很小时, 波前的切向运动速度很小. 此时, 波前的运动受切向的影响很小, 只与法向有关, 这与平常的分析一致. 下面着重讨论两种重要情形:

1) 在螺旋波的波尖附近, 即在  $s_0=0$  的邻域内, 变量  $u$  随  $s$  变化很快, 从而  $b, d$  不为零. 这样, 波尖的切向运动不能忽略, 于是波尖的运动同时受切向和法向两方面的影响, 即同时满足:

$$r_t = \epsilon \Delta^2 r + c,$$

$$s_t = \epsilon \Delta^2 s + \frac{1}{a} (b |\Delta s|^2 + d).$$
(19)

对波前的法向运动方程(11), 其轨迹具有螺旋和圆环等结构, 又从切向运动方程(17)可知, 它也具有螺旋和圆环结构. 波尖的基本运动是以上两种运动的复合. 从图 2 至图 5 可清楚地看到波尖运动的各种规律.

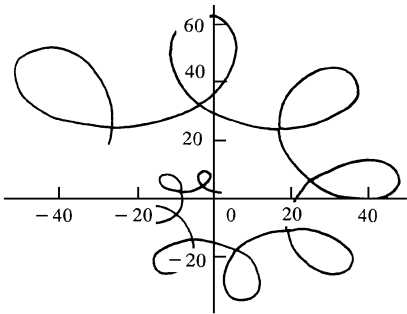


图 2 外凸型扭曲长链

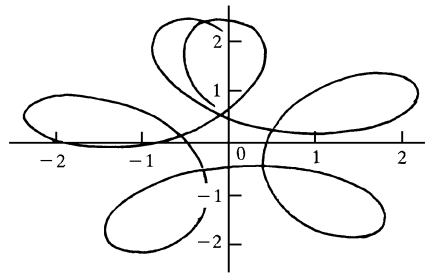


图 3 外凸型扭曲圆环

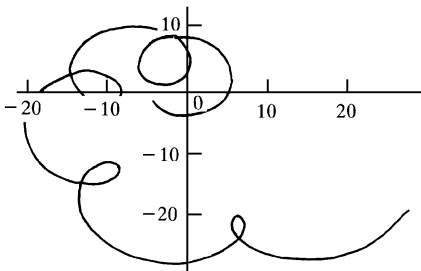


图 4 内凸型扭曲长链

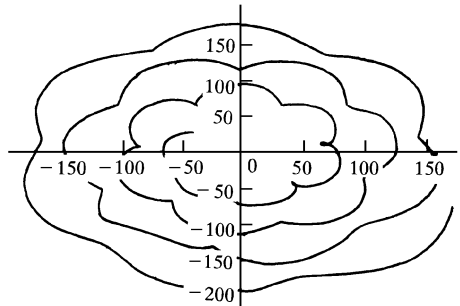


图 5 波浪型外凸环

对波尖运动规律的分析, 在原理上与文献[ 10, 11] 的螺旋波的复合运动模型部分地一致. 他们的结论是从圆环上的圆环运动模型中推出, 只有圆环和圆环的复合. 我们的结论则是从激发介质的反应扩散方程直接得到. 从本文的结果可知, 波尖的运动还包含圆环和螺旋的复合、螺旋与螺旋的复合, 于是出现扭曲环和扭曲长链等运动轨迹. 图 2 至图 5 与数值计算<sup>[3, 11]</sup> 或 BZ 化学实验<sup>[3, 5]</sup> 所描述的波尖运动一致.

2) 一般情况下, 波前的运动主要受法向的影响. 但是, 如果在远离波尖的波前上的某一点处, 强扰动使快变量  $u$  在切线方向上产生突变, 从而  $b$  或  $d$  不等于零, 则在此点处波前的运动也会受到切线方向的影响, 从而可产生新的螺旋结构或其他结构. 例如, 在细菌阿米巴的波形中经常出现的双螺旋结构(图 6)<sup>[10]</sup>, 或最近在 BZ 反应中观察到的超螺旋结构(图 7)等. 这些结构的出现可以用切向影响作出简单解释, 但其具体产生原因目前还不清楚.

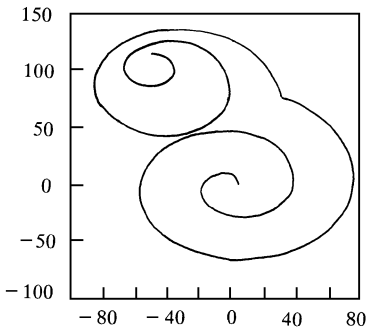


图 6 双螺旋波形

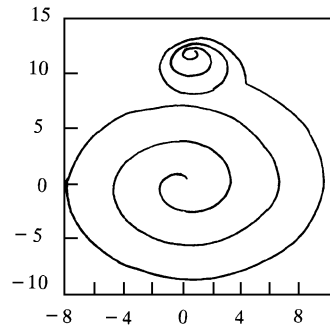


图 7 超螺旋波形

### 3 结 论

本文给出了激发介质的波前沿法线方向和切线方向的运动规律, 得到波前运动的两个方程. 这两个方程都包含圆环和螺旋两种基本结构, 激发介质波前的基本运动是这两种运动的复合. 将此分析应用于波尖, 得到波尖运动的方程及常见的扭曲环和扭曲长链等运动轨迹. 还可将此分析应用于波前. 对光滑的波前, 切向因素不起作用, 波前为螺旋形. 当波前的切向受到强扰动时, 切向因素的作用可使波前产生双螺旋和超螺旋等结构.

从以上的分析过程可知激发介质的波尖或波前运动有多种形式, 若想具体确定这些结构, 必须确定方程(11)和(17)的边界条件以及在波前上的相互作用机理. 这是值得深入研究的问题.

[1] Ding Da-fu, Feng Zu-kang, *Progress in Physics*, **11**(1991), 214(in Chinese).

[2] A. T. Winfree, *SIAM Rev.*, **32**(1990), 1.

[3] W. Jahnke, W. E. Skaggs, A. T. Winfree, *J. Chem. Phys.*, **93**(1989), 740.

[4] G.S.Skinner, H. L. Swinney, *Physica*, **D48**(1991), 1.

[5] V. Perez Munuzuri, M. Gomez-Gesteira, V. Perez-Villar, *Physica*, **D64**(1993), 420.

- [6] J. P. Keener, *SIAM J. Appl. Math.*, **46**(1986), 1039.  
 [7] J. Gomati, P. Grindrod, *J. Math. Bios.*, **25**(1987), 611.  
 [8] Ding Da-fu, *Physica*, **D32**(1988), 471.  
 [9] Liu Shen-quan, Lu Qi-shao, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 1457(in Chinese).  
 [10] J. J. Tyson, K. A. Alexander, V. S. Manoranian *et al.*, *Physica*, **D34**(1989), 193.  
 [11] P. J. Nandapurkar, A. T. Winfree, *Physica*, **D35**(1989), 277.

## THE MOTION OF SPIRAL TIP IN EXCITABLE MEDIA \*

LIU SHEN-QUAN<sup>1)</sup> LU QI-SHAO<sup>1)2)</sup> WANG QI<sup>1)</sup>

1)(Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of  
Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

2)(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

(Received 13 October 1997)

### ABSTRACT

We have studied the motion law of spiral waves in two-dimensional excitable media. The motion of the wave front of spiral waves is divided into two parts, i. e., those along the tangent and the normal directions, and the motion equations in the two directions are obtained with the help of the perturbation method. When these equations are used to analyse the spiral tip, the basic motion law of the spiral tip and the structures of twisted rings and long twisted chains are obtained. When these equations are used to analyse the wave front and its disturbance, the result not only shows ordinary spiral shapes but also explains the super-spiral and the double-spiral structures.

PACC: 0340K

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China under the Grant No. 19572014 and by the National Basic Research Project "Nonlinear Science".