应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000-0887(1999)04-0398-07

在激发介质中单扩散回卷波组织中心的运动*

刘深泉, 陆启韶, 黄克累

(北京航空航天大学 应用数理系, 北京 100083)

(刘曾荣推荐)

摘要: 应用奇异摄动方法, 讨论了在单扩散型激发介质中无扭曲的三维回卷波组织中心的运动规律。确定了无扭曲的组织中心的曲率关系和线性律, 这些结果具有明显的物理意义, 而且与实验符合得很好。

关 键 词: 单扩散; 回卷波; 组织中心; 涡环; 激发介质
中图分类号: O534; O362 文献标识码: A

引 言

1973 年, Winfree 首先在 Belousov-Zhabotinsky 反应中发现了三维回卷波, 1983 年, Welsh 用实验照片证实回卷波的存在。此后, 人们又在生物组织中发现了此波。从此, 三维回卷波成为普遍关心的课题, 而三维回卷波的组织中心的性质更是关注的焦点。二维螺旋波的组织中心是一个点, 而三维回卷波的组织中心是一条曲线, 最简单的情形是封闭的圆环, 称为涡环。深入的研究发现组织中心的运动十分复杂, 影响它运动的因素很多。在各种扩散的情况下, 已有一些理论和实验的结果, 但也留下很多问题。关于这方面的实验结果请参看文献[1]。比较系统的理论结果是 Keener 和 Tyson 开始的工作。他们在二维反应扩散系统的螺旋波解已知的假设下, 得到了三维回卷波组织中心的运动方程, 以及一些特殊的理论结果, 这些理论结果部分地与实验符合, 关于这方面的综述请参看文献[2]。本文在单扩散情形下利用摄动方法, 不仅得到组织中心的曲率关系和线性律, 而且确定了线性律中的比例系数, 这些系数与已知的实验结果符合得很好。

激发介质的动力学方程由下式给出:

$$\begin{cases} u_t = D_1 \nabla^2 u + f(u, v), \\ v_t = D_2 \nabla^2 v + g(u, v), \end{cases} \quad fo \tag{1}$$

其中 D_1, D_2 是扩散系数, f, g 可由实验确定, 对典型的激发介质, f 和 g 的零值线如图 1。若两

* 收稿日期: 1996-12-16; 修订日期: 1997-03-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872010); 国家教育部博士点基金资助项目; 航空科学基金资助项目(98B51125)
作者简介: 刘深泉(1964~), 男, 讲师, 博士, 目前工作单位: 广州华南理工大学应用数学系, 邮政编码 510641.

曲线交在中间, 即介质为振荡型的, 不属于本文讨论的范围, 我们只关心激发介质。

对于方程(1), 若 D_1, D_2 不为零称为双扩散, $D_1 = D_2$ 称为等扩散, $D_1 \neq 0, D_2 = 0$ 称为单扩散。u 一般称为快变量或激发变量, v 称为慢变量或恢复变量。特别地, 适当选取 f 和 g 可对应不同的动力系统。例如, 取

$$\begin{cases} f = u - u^2 - \mu v \dfrac{u - q}{u + q}, \\ g = \varepsilon(u - v), \quad us \end{cases} \tag{2}$$

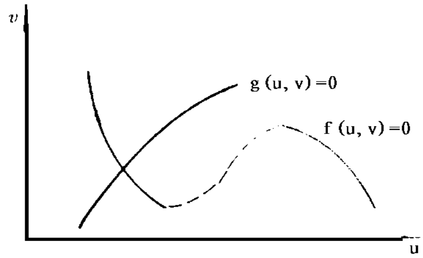

图 1

就表示 BZ 反应的 Oregonator 模型。又如取

$$\begin{cases} f = u(u - 1)(a - u), \\ g = \varepsilon(u - \mu v), \end{cases} \tag{3}$$

就表示心脏组织的 Hitzhugh-Nagumo 模型。

典型激发介质的理论分析方法是奇异摄动, 利用转变层理论可得系统的内、外解, 再通过匹配关系可得整体解。这套理论处理一维问题获得极大成功, 处理高维问题也得到一定结果, 特别是曲率关系等, 但还留下许多问题等待解决。关于这方面的进展可参考文献[3]。下面我们就用转变层理论来研究三维回卷波组织中心的运动规律。

1 摄 动 结 果

对于方程(1), 它存在三维回卷波, 在通过轴的截面上可得平面螺旋波, 这些螺旋波的中心连线, 构成三维回卷波的组织中心。我们研究在单扩散情形中回卷波组织中心的运动。考虑方程:

$$\begin{cases} u_t = D \nabla^2 u + f(u, v), \\ v_t = \rho g(u, v), \end{cases} \tag{4}$$

其中 ρ 很小, $g(u, v)$, $g(u, v)$ 具有一般激发介质的特点, 且

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}。$$

对于 (x, y, z) 三维空间中的组织中心, 我们可建立移动 Frenet 标架, 用 s 表示该曲线的弧长坐标, t 表示时间, $\boldsymbol{R}(s, t)$ 表示组织中心, 且用 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$、k、τ 分别表示 $\boldsymbol{R}(s, t)$ 的切向量、主法向量、次法向量、曲率和挠率。由于在 $\boldsymbol{R}(s, t)$ 上任意点的邻域内 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 相互垂直, 所以 (x, y, z) 空间中任意一点 $\boldsymbol{X}$, 可表示为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} + p\boldsymbol{N} + q\boldsymbol{B},$$

且这种表示局部存在且唯一, 而且可将

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

中的自变量 (x, y, z) 换成 (s, p, q) 来表示。

由 Frenet-Serret 关系得

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \boldsymbol{T}, \quad \dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds} = k\boldsymbol{N}, \\ \dfrac{d\boldsymbol{N}}{ds} = - k\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}, \quad \dfrac{d\boldsymbol{B}}{ds} = - \tau\boldsymbol{N}, \end{cases} \tag{5}$$

并可得梯度算子的表示

$$\nabla u = \mathrm{H}u\boldsymbol{T} + \frac{\partial u}{\partial p}\boldsymbol{N} + \frac{\partial u}{\partial q}\boldsymbol{B}, \tag{6}$$

此处 (r, θ) 是局部极坐标表示，且

$$p = r\cos\theta,\quad q = r\sin\theta,\quad \mathrm{H}u = \frac{1}{1-kp}\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \tau\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)。$$

在此坐标系下有微分算子表达式：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \mathrm{H}(\mathrm{H}u) - \dfrac{k}{1-kp}\dfrac{\partial u}{\partial p} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,y,z)} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(s,p,q)} - \boldsymbol{X}_t \circ \boldsymbol{T}\mathrm{H}u - \boldsymbol{R}_t \circ \left(\boldsymbol{N}\dfrac{\partial u}{\partial p} + \boldsymbol{B}\dfrac{\partial u}{\partial q}\right), \end{cases} \tag{7}$$

在上式中 $\circ$ 是内积，

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{R}_t + p\boldsymbol{N}_t + q\boldsymbol{B}_t。$$

我们假设如下线性依赖关系：

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_t = \alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{N} + \gamma\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{T}_t = \omega\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{N}_t = -\omega\boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}_t = -\delta\boldsymbol{N}, \end{cases} \tag{8}$$

上式中 α, β, γ 是 $\boldsymbol{R}$ 在 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ 方向上的速度，ω, δ 是引入变量。我们将(5)对 t 求导，将(8)对 s 求导，根据关系式

$$\boldsymbol{R}_{ts} = \boldsymbol{R}_{st},\quad \boldsymbol{T}_{ts} = \boldsymbol{T}_{st},\quad \boldsymbol{B}_{ts} = \boldsymbol{B}_{st}$$

得到：

$$\begin{cases} \omega = \beta_s + \alpha k - \gamma\tau,\quad \alpha_s = k\beta,\quad \gamma_s = -\tau\beta, \\ \omega\tau = k\delta,\quad \omega_s = k_t,\quad \delta_s = \tau_t。 \end{cases} \tag{9}$$

为了解出 α, β, γ, k, τ, ω, δ 这 7 个变量，我们引入如下一个摄动关系。对方程(4)，由于 ρ 很小，故 v 在转变层内变化很小，设为 v_0(数值结果可验证此结论，当然 v_0 仍依赖 $g(u, v)$ 的具体形式)，则(4)变为：

$$u_t = D\nabla^2 u + f(u, v_0)。 \tag{10}$$

由于 $p = r\cos\theta$, $q = r\sin\theta$ 故

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \theta} = -q\frac{\partial u}{\partial p} + p\frac{\partial u}{\partial q}。 \tag{11}$$

引入小参数 ε，并设：

$$\begin{cases} t = \varepsilon^{-1}\mu,\quad s = \varepsilon^{-1/2}\eta,\quad p = \tilde{p},\quad q = \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}, \\ k = \varepsilon\tilde{k},\quad \tau = \varepsilon\tilde{\tau},\quad \alpha = \varepsilon^{1/2}\tilde{\alpha},\quad \gamma = \varepsilon^{1/2}\tilde{\gamma}, \\ \beta = \beta_0 + \varepsilon\tilde{\beta},\quad \omega = \varepsilon^{3/2}\tilde{\omega},\quad \delta = \varepsilon^{3/2}\tilde{\delta},\quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots。 \end{cases} \tag{12}$$

将(12)代入(10)中的导数项，有：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,y,z)} = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial \mu} - (\varepsilon^{1/2}\tilde{\alpha} - \tilde{p}\varepsilon^{3/2}\tilde{\omega})\frac{1}{1-\varepsilon\tilde{p}\tilde{k}}\left[\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \varepsilon\tilde{\tau}\left(\tilde{p}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right)\right] - (\beta_0 + \varepsilon\tilde{\beta})\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}} - \varepsilon\tilde{\gamma}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{3/2}\tilde{\delta}\left(\tilde{p}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right), \tag{13}$$

$$\nabla^2 u = \mathrm{H}(\mathrm{H}u) - \frac{\varepsilon\tilde{k}}{1-\varepsilon\tilde{k}\tilde{p}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{q}^2} = -\frac{\varepsilon\tilde{k}}{1-\varepsilon\tilde{k}\tilde{p}}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{q}^2} + \frac{A}{1-\varepsilon\tilde{k}\tilde{p}}。$$

在上式中：

$$A = \frac{\varepsilon^{3/2}\tilde{p}\tilde{k}_\eta}{(1-\varepsilon\tilde{k}\tilde{p})^2}\left[\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \varepsilon\tilde{\tau}\left(\tilde{p}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right)\right)\right] + \frac{1}{1-\varepsilon\tilde{k}\tilde{p}}\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \right.$$

$$= \varepsilon^{3/2}\tilde{\tau}_{\eta}\left(\tilde{p}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}} - \varepsilon\tilde{\tau}\left[\varepsilon\tilde{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{q}\,\partial \eta} - \tilde{q}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}\,\partial \eta}\right]\right) - \varepsilon\tilde{\tau}B, \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} B = \tilde{p}\Bigg\{ & \frac{\varepsilon^{1/2}\tilde{p}k\tilde{q}}{1-\varepsilon k\tilde{p}}\left[\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \varepsilon\tilde{\tau}\left(\tilde{p}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right)\right] + \frac{1}{1-\varepsilon k\tilde{p}}\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \tilde{q}} - \right. \\ & \left.\varepsilon^{3/2}\tilde{\tau}_{q}\left(\varepsilon^{1/2}\tilde{p}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right) - \varepsilon\tilde{\tau}\left(\varepsilon\tilde{p}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{p}} - \tilde{q}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}\,\partial \tilde{q}}\right)\right]\Bigg\} - \\ & \varepsilon^{-1/2}_{s}\tilde{q}\Bigg\{\frac{\varepsilon k + \tilde{p}\varepsilon k_{p}}{1-\varepsilon k\tilde{p}}\left[\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \varepsilon\tilde{\tau}\left(\tilde{p}\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right)\right] + \\ & \frac{1}{1-\varepsilon k\tilde{p}}\left[\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}\,\partial \eta} - \varepsilon\tilde{\tau}_{p}\left(\varepsilon^{1/2}\tilde{p}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\tilde{q}\frac{\partial u}{\partial \tilde{p}}\right) - \right. \\ & \left.\varepsilon\tilde{\tau}\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{q}} + \varepsilon^{1/2}\tilde{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}\,\partial \tilde{q}} - \varepsilon^{-1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{p}^2}\right)\right]\Bigg\}。\end{aligned} \tag{15}$$

我们考虑未扭曲的曲线，$\tilde{\tau} = 0$。 下面讨论各阶近似，对 $O(\varepsilon^0)$ 阶，我们有：

$$D\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{p}^2} + \beta_0\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{p}} + f(u_0, v_0) = 0。 \tag{16}$$

由于在组织中心上 $\tilde{\tau} = 0$，故有

$$\tilde{p} = \tilde{q} = 0。$$

如果在组织中心上 u_0 不随 μ 变化，则(16)的解 $u_0 = u_0(\tilde{p})$，这相当于讨论在移动坐标系中的“定态”问题。

对 $O(\varepsilon^1)$ 阶，我们在移动坐标系里有如下表达式：

$$\begin{aligned} D\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{p}^2} + \beta_0\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{p}} + f_u(u_0, v_0)u_1 = & (Dk - D\tilde{\tau}_{\eta}\tilde{q} - D\tilde{\tau}_{p}\tilde{q} - \alpha\tilde{\tau}\tilde{q} - \beta + \\ & \tilde{\delta}\tilde{q})\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{p}} - D\tilde{q}\tilde{\tau}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{p}^2}。\end{aligned} \tag{17}$$

由于 $\tilde{\tau} = 0$，故(17)变为

$$D\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{p}^2} + \beta_0\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{p}} + f_u(u_0, v_0)u_1 = (Dk - \beta + \tilde{\delta}\tilde{q})\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{p}}。 \tag{18}$$

对上方程，如果算子：

$$\mathrm{L} = D\frac{\partial^2}{\partial \tilde{p}^2} + \beta_0\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} + f_u(u_0, v_0)$$

的伴随算子 L^{+} 的零特征函数 u^{+} 存在，且适合条件：

$$\langle u^{+}, u_{0\tilde{p}}\rangle \neq 0。$$

根据方程(18)的可解条件：

$$\langle u^{+}, (Dk - \beta + \tilde{\delta}\tilde{q})\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{p}}\rangle = 0,$$

即得到：

$$Dk - \beta + \tilde{\delta}\tilde{q} = 0。 \tag{19}$$

若 $\tilde{\tau} = 0$，则(9)变为：

$$\begin{cases} \omega = \beta_s + \alpha k, & \alpha_s = k\beta, \quad \gamma_s = 0, \\ k\delta = 0, & \omega_s = k_t, \quad \delta_s = 0。\end{cases} \tag{20}$$

所以利用(19)，得到组织中心的运动轨迹为：

$$\begin{cases} Dk = \beta, \quad \omega = \beta_s + \alpha k, \\ \alpha_s = k\beta, \quad \omega_s = k_t。\end{cases} \tag{21}$$

我们从上式解得包含 $\tilde{\alpha}$ 的方程为($\tilde{\alpha}$ 见(12)):

$$\tilde{\alpha}_{\eta\mu} = (\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}_\eta + D\tilde{\alpha}_{\eta\eta})_\eta,$$

对 η 积分后得到

$$\tilde{\alpha}_\mu + A(\mu) = \tilde{\alpha}\tilde{\alpha}_\eta + D\tilde{\alpha}_{\eta\eta}, \tag{22}$$

其中 $A(\mu)$ 是任意函数。 引入变换: $\xi = D\mu$, $\psi = \tilde{\alpha}/D$, 上式变为:

$$\psi_\xi + B(\xi) = \psi\psi_\eta + \psi_{\eta\eta}。 \tag{23}$$

我们对上式引入坐标变换:

$$\begin{cases} \tilde{\psi} = \psi + \int_0^\xi B(\xi)\mathrm{d}\xi, \\ \tilde{\eta} = \eta - \int_0^\xi\int_0^\xi B(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi。\end{cases} \tag{24}$$

将变换(24)代入(23)可得如下 Burgers 方程,(为方便起见我们省略记号 ~):

$$\psi_\xi = \psi\psi_\eta + \psi_{\eta\eta}。 \tag{25}$$

引入 Cole-Hopf 变换 $\psi = 2\varphi_\eta/\varphi$, 得到热传导方程:

$$\varphi_\xi = \varphi_{\eta\eta}。 \tag{26}$$

用变换

$$\begin{cases} z = \dfrac{\eta}{\sqrt{2\xi}}, \\ w = \xi^{1/4}\varphi\exp\left(\dfrac{\eta}{8\xi}\right) \end{cases} \tag{27}$$

12

代入(26)得

$$w_{zz} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right)w = 0。 \tag{28}$$

方程(28)具有特解 $w = \exp(-z^2/4)$, 且对应原组织中心的切线速度、法线速度、曲率分别为:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{t}(s - F(t)) - F'(t), \\ \beta = \beta_0 - \dfrac{D}{\beta_0 t} \sim \beta_0 - O(\varepsilon), \\ k = \varepsilon \dfrac{1}{\beta_0 t} \sim O(\varepsilon), \end{cases} \tag{29}$$

其中 $F(t) = \varepsilon^{1/2}\beta_0\int_0^t\int_0^\mu \gamma(\nu)\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu$。 注意曲率 k 近似地与弧长 s 无关($O(\varepsilon)$ 阶), 故在挠率很小时($\tau \simeq 0$), 我们得到三维回卷波的涡环解, 且曲率半径 $R = \beta_0 t + O(\varepsilon)$。

2 结果分析

我们分析上述解的物理意义, 并与实验结果作一比较。 首先从(16)得知 β_0 表示回卷波波前的平面波速, 且有

$$\beta_0 = -\frac{\int_{h_-(v_0)}^{h_+(v_0)} f(u_0, v_0)\mathrm{d}u_0}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial p}\right)^2\mathrm{d}p}, \tag{30}$$

$u0$

上式即一维反应扩散方程的特征波速。然后,可得到下列关系:

1)速度与曲率的关系

β表示组织中心的法向速度,从(29)可知

$$\beta = \beta_0 - \frac{D}{\beta_{ot}} = c + Dk。 \tag{31}$$

对空间回卷波的波前,一般我们有 $N_0 = c + Dk_0$,其中 N_0 表示波前的法向波速,c 表示波前的平面波速,k_0 表示波前曲面的平均曲率。(31)说明组织中心也有类似关系,只是 N_0,k_0 退化为组织中心的法向速度β和曲率 k。从螺旋波理论可知,满足曲率关系的波前具有螺旋波形状,从而得到三维回卷波的整体结构:组织中心是涡环,和轴垂直的截面的平面上是螺旋波。

2)线性关系

由于β表示组织中心的法向速度,且组织中心是涡环结构,所以我们可认为β给出涡环半径 R 的变化率,即 $\beta = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$,从而得到

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = c + \frac{D}{R} = c + Dk。 \tag{32}$$

本线性律与其它理论结果($\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = aD/R$)有所不同,(32)可以通过 c 去与具体的模型联系起来,并将以前回卷波理论的两个主要结果 —— 曲率关系和线性律统一体现在组织中心上,所以具有较大的理论价值。在实验方面,单扩散时Oregonator模型[1]的数据表明,组织中心的半径不象其它扩散时出现收缩,而是扩张,(32)式在 $c = 0$ 时显然得到 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t > 0$,从而说明了扩张性。而且当 $c = 0$ 时,由(32)确定的在(R^2, t)平面上的曲线(即 $R^2 = 2t$)位于[1]中所给的数据范围内,表明本文结果的正确性。

3 结束语

本文主要应用摄动方法得到无扭曲的三维回卷波组织中心的运动状态。对平面型组织中心导出了曲率关系和线性律。这些结果对单扩散组织中心的研究起有益的作用。但本结果仍有很多有待进一步研究的地方。由于未扭曲的假设,所以没有考虑挠率的影响,从本文推导过程可知,加上挠率项后,问题变得十分复杂。此外,由于没有考虑挠率的影响。所以未能讨论组织中心的轴向运动,这也是人们所关心的问题。总之,组织中心的运动仍需深入细致的研究。

致谢: 非常感谢推荐人刘曾荣先生提出的有益建议。

参 考 文 献

[1] Winfree A T, Jahnke W. Three-dimensional scroll ring dynamics in the Belousov-Zabotinsky reagent and in the 2-variable Oregonator model[J]. *J Phys Chem*, 1989, **93**: 2823~2832.

[2] Tyson J J, Keener J P. The dynamics of scroll waves in excitable media[J]. *SIAM Review*, 1992, **34**: 1~39.

[3] Tyson J J, Keener J P. Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media[J]. *Phys D*, 1988, **32**: 327~361.

[4] Welsh B J, Gomatam J, Burgess A E. Three-dimensional chemical waves in the Belousov-Zhabotinsky reagent[J]. *Nature*, 1983, (304): 611~613.

[5] Winfree A T. Stable particle-like solutions to nonlinear waves equations of three-dimensional excitable media[J]. *SIAM Review*, 1990, **32**: 1~53.

[6] Keener J P. The dynamics of three-dimensional scroll waves in excitable media[J]. *Phys D*, 1988, **31** (2): 269～276.

[7] Keener J P. Knotted scroll waves filaments in excitable media[J]. *Phys D*, 1989, **34**: 378～390.

[8] Jahnke W, Henze C, Winfree A T. Chemical vortex dynamics in three-dimensional excitable media [J]. *Nature*, 1988, (336): 662～665.

[9] Nandapurkar P J, Winfree A T. Dynamical stability of untwisted scroll rings in excitable media[J]. *Phys D*, 1989, **35**: 277～288.

The Motion of Organization Center of Scroll Waves in Excitable Media with Single Diffusion

Liu Shenquan, Lu Qishao, Huang Kelei

(*Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083, *P R China*)

Abstract: The motion of organization center of three-dimensional untwisted scroll waves in excitable media with single diffusion is studied by singular perturbation method in this paper. The relation of curvature and the linear law are derived for untwisted organization center. These results have explicit physical meaning and are in good agreement with experiments.

Key words: single diffusion; scroll waves; organization center; vortex ring; excitable media