

# 用 Fife 量级求解 eikonal 方程<sup>\*</sup>

刘深泉<sup>1)</sup> 陆启韶<sup>1), 2)</sup>

<sup>1)</sup>(北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083)

<sup>2)</sup>(中国科学院理论物理研究所, 北京 100080)

(1996 年 12 月 25 日收到)

应用 Fife 量级来讨论三维 eikonal 方程. 首先, 将 eikonal 方程放在 Fife 量级的框架内, 得到回卷波解. 其次, 直接用 Fife 量级来摄动 eikonal 方程, 也得到类似的回卷波解. 这两种不同方法得到的理论结果本质上一致, 而且都在 BZ 反应中实际观察到. 这些结果有助于深入研究反应扩散理论和彻底解决 Fife 边值问题.

PACC: 0340K

## 1 引 言

反应扩散系统中所形成的波形, 一直是人们研究的对象. 在此领域的研究对象主要有两个: 一是振荡介质, 一是激发介质. 前者由经典的  $\lambda-\omega$  系统, 利用普通的分歧理论, 已经很好地理解. 后者, 由于存在变化很快的边界层和边界层旁边的变化很慢的静息态, 通常的分析方法不能很好地处理这两种状态变化. 二维情形的边界层形状是螺旋波, 已有较多的理论和数值结果; 三维的情形是回卷波, 理论上还没有很好的分析, 主要原因是描述三维边界层的 eikonal 方程太复杂. 所以, 高维激发介质目前还留下很多问题, 确定边界层的形状更是研究的重点. 本文引入 Fife 量级, 得到与实验和数值结果一致的回卷波形.

普通激发介质的动力学方程为

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 \Delta^2 u + f(u, v) / \epsilon, \\ v_t &= D_2 \Delta^2 v + g(u, v). \end{aligned} \tag{1}$$

为研究方便, 作适当变换, 可将(1)式改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \epsilon u_t &= \delta^2 \Delta^2 u + f(u, v), \\ v_t &= \epsilon \delta^2 \Delta^2 v + g(u, v), \end{aligned} \tag{2}$$

其中  $u$  是快变量,  $v$  是慢变量,  $\epsilon$  是小参数,  $\delta$  是扩散系数的比率. 选取不同的反应项可表示化学反应模型、心脏组织模型和阿米巴细菌模型等. 对普通的激发介质来说, 在  $u, v$  平面上要求  $f(u, v)$  的零值线是倒  $N$  形曲线,  $g(u, v)$  的零值线单调上升, 且两者相交在  $f=0$  曲线的左分支, 如图 1 所示.

处理方程(2)最有效的方法是奇异摄动, 一维的情况可见文献 [1], 二维以上的情形主

<sup>\*</sup>国家自然科学基金、高等学校博士学科点专项科研基金和航空科学基金资助的课题.

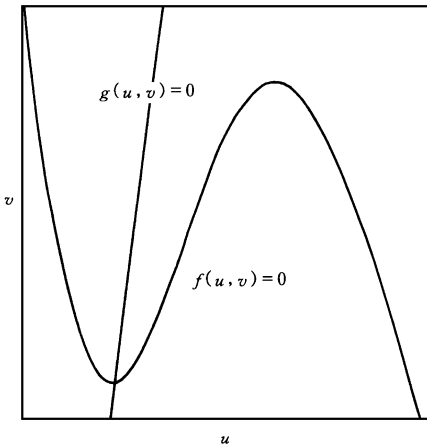


图 1 激发介质的特征曲线

要结果为: 方程(2)当  $\epsilon=0$  时得到

$$f(u, v) = 0, \quad v_t = g(u, v) \quad (3)$$

或

$$u_{\pm} = h_{\pm}(v), \quad v_t = g(h_{\pm}(v), v), \quad (4)$$

其中  $u_{\pm} = h_{\pm}(v)$  对应  $f(u, v)$  零值线的右、左两支. 方程(3)的解称为方程(2)的外解, 两组解的存在范围在  $u-v$  平面上分别为  $\Omega_+$  和  $\Omega_-$ , 在  $\Omega_+$  与  $\Omega_-$  之间有一宽度为  $O(\epsilon)$  的边界层. 在此边界层内变量  $v$  可近似取常数, 变量  $u$  在此边界层内变化很快.  $u$  在此层两边可能不连续, 需构造一个边界层函数连接  $u_{\pm} = h_{\pm}(v)$ . 具体分析请见文献[2, 3].

关于此边界层, 在二维情形, Keener<sup>[3]</sup> 在  $u-v$  平面上建立了移动的坐标系, 用类似一维行波的方法得到边界层满足的方程为

$$N + \kappa K = c. \quad (5)$$

方程(5)称为 eikonal 方程, 其中  $N$  表示边界层的法向速度,  $K$  表示边界层的曲率,  $c$  表示边界层作为局部波前的平面波速. 此后, Gomati<sup>[4]</sup> 和丁达夫<sup>[5]</sup> 分别提出形如(5)式的三维 eikonal 方程. 在三维情形, 波前曲面认为是一边界层, 这时在方程(5)中,  $N$  表示波前曲面的法向速度,  $K$  表示波前曲面的平均曲率,  $c$  表示局部波前的平面波速.

关于 eikonal 方程的解将激发介质分为激发态 ( $u = h_+(V)$ ) 和静息态 ( $u = h_-(V)$ ) 两部分. 在二维情形, Fife<sup>[6]</sup> 首先提出激发介质螺旋波的结构特点是高频、短波长和慢速. 并用新的量级将反应扩散方程(1)化为一边值问题, 但没有确定边界. 文献[3]的分析结果表明, 上述边值问题的边界可由 eikonal 方程确定, 只是度量有所不同. 他在文献中分析了 eikonal 方程, 而且得到与实际符合很好的螺旋波解. 在三维情形, 这方面的工作进展不大, 主要是三维 eikonal 方程太复杂, 用普通方法不能很好分析. 本文用 Fife 量级, 从不同角度分析三维 eikonal 方程, 得到我们期望的理论结果.

## 2 分析结果

Fife<sup>[6]</sup> 指出螺旋波的结构是高频、短波长和慢速, 并提出了如下量级:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \epsilon^{2/3} r \quad (\text{短波长}), \\ t &\rightarrow \epsilon^{1/3} t \quad (\text{高频}), \\ c &\rightarrow c^* + \epsilon^{1/3} c \quad (\text{慢速}). \end{aligned}$$

Winfree<sup>[7]</sup> 对 Fitzhugh-Nagumo 模型计算表明, 螺旋波的结构满足 Fife 量级, Karma<sup>[8]</sup> 理论分析表明, 波长和频率也符合 Fife 量级. 本文对三维 eikonal 方程也引入 Fife 度量. 我们的分析包括两部分: 一是将 eikonal 方程放在 Fife 量级的框架内研究, 二是直接用 Fife 量级来摄动 eikonal 方程. 两种方法得到的结果本质上一致, 波形在 BZ 实验中都观察到.

三维 eikonal 方程可表示为<sup>[9]</sup>

$$c = \frac{\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\lambda}{|\mathbf{r}_\eta| |\mathbf{r}_\lambda|} - \left\{ \frac{\mathbf{r}_{\eta\eta} \cdot \mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\lambda}{|\mathbf{r}_\eta|^3 |\mathbf{r}_\lambda|} + \frac{\mathbf{r}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\lambda}{|\mathbf{r}_\eta| |\mathbf{r}_\lambda|^3} \right\}, \tag{6}$$

式中  $\mathbf{r}$  表示波前的位置向量,  $t$  表示时间,  $\lambda, \eta$  是建立在局部波前上的曲线坐标<sup>[19]</sup>. 我们引入如下回卷波坐标系:

$$\begin{aligned} x &= (R_0 + \rho \cos \psi) \cos \phi, \\ y &= (R_0 + \rho \cos \psi) \sin \phi, \\ z &= -\rho \sin \psi. \end{aligned} \tag{7}$$

在此坐标系下, 我们寻求如下形式的解:  $\lambda = \rho, \eta = \phi, \psi = \psi(\rho, \phi, t)$  则有

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= ((R_0 + \lambda \cos \psi(\lambda, \eta, t)) \cos \eta, (R_0 + \lambda \cos \psi(\lambda, \eta, t)) \sin \eta, -\lambda \sin \psi(\lambda, \eta, t)), \\ \mathbf{r}_t &= (-\lambda \sin \psi \cos \eta \psi_\eta, -\lambda \sin \psi \sin \eta \psi_\eta, -\lambda \cos \psi \psi_t), \\ \mathbf{r}_\lambda &= ((\cos \psi - \lambda \sin \psi \psi_\lambda) \cos \eta, (\cos \psi - \lambda \sin \psi \psi_\lambda) \sin \eta, -\sin \psi - \lambda \cos \psi \psi_\lambda), \\ \mathbf{r}_\eta &= (-(R_0 + \lambda \cos \psi) \sin \eta - \lambda \sin \psi \cos \eta \psi_\eta, (R_0 + \lambda \cos \psi) \cos \eta \\ &\quad - \lambda \sin \psi \sin \eta \psi_\eta, -\lambda \cos \psi \psi_\eta) \end{aligned} \tag{8}$$

和

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\lambda\lambda} &= ((-2 \sin \psi \psi_\lambda - \lambda \cos \psi \psi_{\lambda\lambda} - \lambda \sin \psi \psi_{\lambda\lambda}) \cos \eta, (-2 \sin \psi \psi_\lambda - \lambda \cos \psi \psi_{\lambda\lambda} \\ &\quad - \lambda \sin \psi \psi_{\lambda\lambda}) \sin \eta, -2 \cos \psi \psi_{\lambda\lambda} + \lambda \sin \psi \psi_{\lambda\lambda} - \lambda \cos \psi \psi_{\lambda\lambda}), \\ \mathbf{r}_{\eta\eta} &= (-(R_0 + \lambda \cos \psi) \cos \eta + 2 \lambda \sin \psi \sin \eta \psi_\eta - \lambda \cos \psi \cos \eta \psi_{\eta\eta} \\ &\quad - \lambda \sin \psi \cos \eta \psi_{\eta\eta}, -(R_0 + \lambda \cos \psi) \sin \eta - 2 \lambda \sin \psi \cos \eta \psi_\eta - \lambda \cos \psi \sin \eta \psi_{\eta\eta} \\ &\quad - \lambda \sin \psi \sin \eta \psi_{\eta\eta}, -\lambda \cos \psi \psi_{\eta\eta} + \lambda \sin \psi \psi_{\eta\eta}). \end{aligned} \tag{9}$$

将(8), (9)式代入(6)式, 并化简得

$$c = \frac{\lambda(R_0 + \lambda \cos \psi) \psi_t}{\sqrt{1 + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}^2} \sqrt{(R_0 + \lambda \cos \psi)^2 + \lambda^2 \psi_{\eta\eta}^2}} - \left\{ \frac{(R_0 + \lambda \cos \psi) (2 \psi_\lambda + \lambda \psi_{\lambda\lambda} + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda})}{\sqrt{(1 + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}^2)^3} \sqrt{(R_0 + \lambda \cos \psi)^2 + \lambda^2 \psi_{\eta\eta}^2}} + A \right\}, \tag{10}$$

其中

$$A = \frac{(R_0 + \lambda \cos \psi)^2 (\sin \psi + \lambda \cos \psi \psi_\lambda) + (R_0 + \lambda \cos \psi) (\lambda \psi_{\eta\eta} + \lambda^2 \psi_{\eta\eta} \psi_\eta) + 2 \lambda^2 \sin \psi \psi_{\eta\eta}}{\sqrt{1 + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}^2} \sqrt{(R_0 + \lambda \cos \psi)^2 + \lambda^2 \psi_{\eta\eta}^2}}.$$

特别地, 当边界关于  $z$  轴对称时,  $\lambda = \rho, \eta = \phi, \psi = \psi(\rho, t)$ , 我们有

$$c = \frac{\lambda \psi_t}{\sqrt{1 + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}^2}} - \left\{ \frac{2 \psi_\lambda + \lambda \psi_{\lambda\lambda} + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}}{Fa \sqrt{(1 + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}^2)^3}} + \frac{\sin \psi + \lambda \cos \psi \psi_\lambda}{(R_0 + \lambda \cos \psi) \sqrt{1 + \lambda^2 \psi_{\lambda\lambda}^2}} \right\}. \tag{11}$$

显然, 三维 eikonal 方程太复杂, 即便是上面的最简单的对称情况, 我们也无法直接去研究它的解. 下面我们对 eikonal 方程引入 Fife 量级, 用两种不同的摄动方法分析 eikonal 方程.

1) 首先将 eikonal 方程放在 Fife 量级的框架内, 即对方程(6)引入摄动

$$R = \zeta^{2/3} r, \quad T = \zeta^{1/3} t, \quad C = \zeta^{1/3} c,$$

则(6)式变为

$$C = \frac{R_T \circ R_\eta \times R_\lambda}{|R_\eta \parallel R_\lambda|} - \zeta^2 \left[ \frac{R_{\eta\eta} \circ R_\eta \times R_\lambda}{|R_\eta \parallel R_\lambda|^3} + \frac{R_{\lambda\lambda} \circ R_\eta \times R_\lambda}{|R_\eta \parallel R_\lambda|^3} \right]. \quad (12)$$

在新的变量下, 时间和空间具有 Fife 量度, eikonal 方程变为类似(11)式的形式. 我们略去  $O(\zeta^2)$  项(为方便仍用小写字母)得

$$c = \frac{r_t \circ r_\eta \times r_\lambda}{|r_\eta \parallel r_\lambda|}. \quad (13)$$

将变换  $\lambda = \rho, \eta = \phi, \psi = \psi(\rho, \phi, t)$  代入

$$\frac{\lambda \psi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \psi_\lambda^2}} = c \sqrt{1 + \left[ \frac{\lambda \psi_\eta}{R_0 + \lambda \cos \psi} \right]^2}. \quad (14)$$

对上述方程我们寻求如下形式的解:

$$\psi = \omega t + \alpha \eta \epsilon + p(\lambda). \quad (15)$$

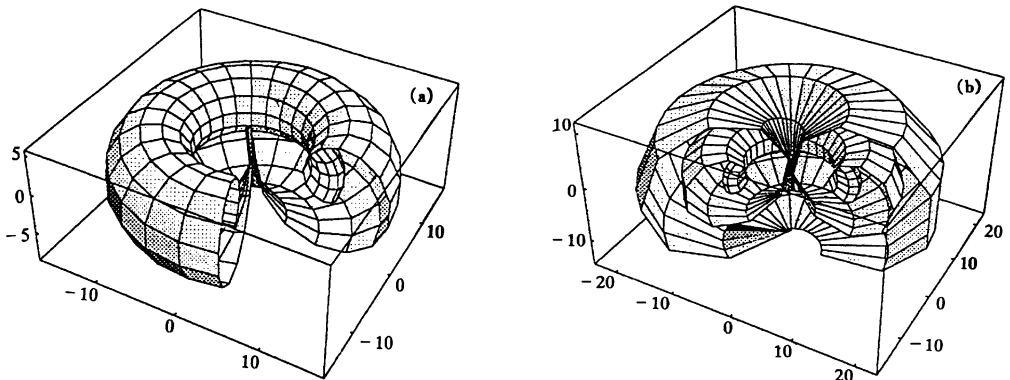
将(15)式代入(14)式解出  $p(\lambda)$  得到

$$p(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 \omega^2 - c^2}}{c} - \arctan \frac{\sqrt{\lambda^2 \omega^2 - c^2}}{c} + c_0. \quad (16)$$

从而我们得到(13)式的  $O(\epsilon)$  解

$$\psi = \omega t + \alpha \eta \epsilon + \frac{\sqrt{\lambda^2 \omega^2 - c^2}}{c} - \arctan \frac{\sqrt{\lambda^2 \omega^2 - c^2}}{c} + c_0, \quad (17)$$

其中  $c_0$  是任意常数, 此解显然也是(10)式  $O(\epsilon)$  解, 从解的表达式可知,  $\alpha=0$  时, 解关于  $z$  轴对称, 且在任意  $\eta = \text{const}$  的截面上, 得到螺旋波解, 于是整体上得到涡环解. 当  $\alpha \neq 0$  时, 由于  $\eta$  的影响, 整体涡环解会发生不同的变形. 图 2 给出当  $t=1, c_0=0, c=1, \alpha=1, \epsilon=0.1, \omega=1, R_0=10$  时, 两种不同的  $\lambda$  取值由(17)式所得的波形. 这两图的波形在 BZ 反应中都出现过, 从截面看, 其构造与文献[11]的数值计算结果完全一样.



(a)  $0 < \lambda < 10, 0 < \eta < 5$

(b)  $0 < \lambda < 15, 0 < \eta < 4$

图 2 非轴对称涡环解

2) 直接用 Fife 量级来摄动简化 eikonal 方程, 即对方程(10)引入如下摄动:

$$c = \epsilon^{1/3} C, \quad t = \epsilon^{1/3} T, \quad \lambda = \epsilon^{2/3} \Lambda.$$

我们得到  $O(\epsilon^{2/3})$  解(为方便起见仍用小写字母)

$$c = \frac{\lambda \psi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \varphi_\lambda}} - \frac{2\psi + \lambda \psi_\lambda + \lambda^2 \varphi_\lambda}{\sqrt{(1 + \lambda^2 \varphi_\lambda)^3}}. \quad (18)$$

方程(18)是对三维 eikonal 方程用 Fife 度量摄动简化后得到, 它与 Keener 的二维 eikonal 方程当  $\epsilon=1$  时完全一致. 我们设  $\psi = \omega t + \Psi(\lambda)$ , 并引入变量  $\theta = \lambda \Psi_\lambda$ , 上式变为

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = (1 + \theta^2) [c\lambda(1 + \theta^2)^{1/2} - \omega\lambda^2 + \theta]. \quad (19)$$

对上述方程, 文献[9]中给出如下解:

$$\text{当 } \lambda \text{ 很小时} \quad \theta = -c\lambda/2 + \omega\lambda^2/3 + O(\lambda^3);$$

$$\text{当 } \lambda \text{ 很大时} \quad \theta = -\omega\lambda/c - \omega/c^2 + O(1/\lambda).$$

特别地, 当  $\omega = (3 - \sqrt{3})c^2/4\epsilon$  时, 可综合两者得到

$$\theta = -\frac{\omega\lambda}{c} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{3 + c\lambda}} \right]. \quad (20)$$

因此(18)式的解为

$$\text{当 } \lambda \text{ 较小时} \quad \psi = k + \omega t - c\lambda/2 + \omega\lambda^2/6 + O(\lambda^3);$$

$$\text{当 } \lambda \text{ 较大时} \quad \psi = k + \omega t - \omega\lambda/c - \omega \ln \lambda / c^2 + O(1/\lambda).$$

特别地, 当  $\omega = (3 - \sqrt{3})c^2/4\epsilon$  时, 我们有

$$\psi = k + \omega t - \omega\lambda/c - \omega \ln(\sqrt{3 + c\lambda}) / c^2. \quad (21)$$

上面各式中  $k$  为积分常数. 这样我们又得到了涡环解, 且在  $\eta$  为常数的截面上得到阿基米德螺线, 此解与(17)式的对称解(即不考虑  $\eta$  的影响)本质上一致, 都说明轴对称

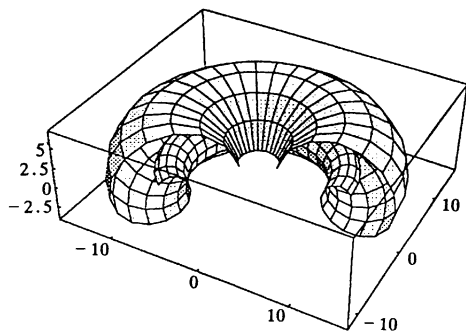


图3 轴对称涡环解

回卷波的整体结构为: 组织中心是圆环, 截面是螺旋波. 图3给出(21)式当  $k=0, t=1, c=1, \omega=1, 0 < \lambda < 5, R_0=10$  时的波形. 当然上面的解只是  $O(\epsilon^{2/3})$  近似, 其中没有计及  $\eta$  的影响, 更精确的近似仍需继续研究.

### 3 结 论

本文主要利用 Fife 量级, 通过两种不同的方法来简化三维 eikonal 方程, 从理论上得到了我们所期望的回卷波. 这些回卷波的结构与数值结果符合得很好<sup>[10-13]</sup>, 也在 BZ 实验中出现过. 从本文可知:

1. Fife 量级本来是对二维螺旋波提出的. 但本文的结果表明, 这样的量级关系对三维回卷波仍然有效. 这说明 Fife 量级关系在时间和空间上刻画了激发介质转变层的构造特点.

2. 二维 eikonal 方程在 Fife 量级的意义下, 具有通有性, 即对反应扩散方程来说与具体的函数  $f, g$  无关. 我们在方法 2) 中得知三维 eikonal 方程在 Fife 量级意义下与二维 eikonal 方程一致, 即方程 (19). 这说明三维 eikonal 方程也具有通有性.

3. 在方法 1) 中, 得到  $O(\epsilon)$  阶近似解. 在方法 2) 中, 得到  $O(\epsilon^{2/3})$  阶近似解. 我们不仅得到涡环解, 而且从三维 eikonal 方程的通有性可知, 涡环解是激发介质回卷波的基本结构. 至于其它形式的结构, 在 Fife 量级的意义下, 不过是涡环解的  $O(\epsilon^{2/3})$  扰动.

当然, 要更精确地了解回卷波的波形, 彻底解决 Fife 边值问题, 就需要分析  $\eta$  对涡环的影响. 也就是要解整个三维 eikonal 方程, 这无论从数值计算还是理论分析都要作更深入的工作.

感谢李卫国副教授在使用 Mathematica 方面给予的帮助.

- [1] J. P. Keener, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**(1980), 528.
- [2] J. J. Tyson and J. P. Keener, *Physica*, **D32**(1988), 327.
- [3] J. P. Keener, *SIAM J. Appl. Math.*, **46**(1986), 1039.
- [4] J. Gomati, P. Grindrod, *J. Math. Biol.*, **25**(1987), 611.
- [5] D. F. Ding, *Phys.*, **D32**(1988), 471.
- [6] P. C. Fife, Propagator-Controller Systems and Chemical Patterns in: Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems, eds. C. Vidal and A. Pacaulteds(Springer, Berlin, 1984), p. 76.
- [7] A. Winfree, *Chaos*, **1**(1991), 303.
- [8] A. Karma, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 397.
- [9] W. K. Burton, N. Cabrera and F. C. Frank, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A243**(1951), 299.
- [10] P. Grindrod, Patterns and Waves: The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations(Clarndon Press, Oxford 1991), p. 177.
- [11] A. V. Panfilov, A. T. Winfree, *Phys.*, **D17**(1985), 323.
- [12] B. J. Welsh, J. Gomati and A. E. Burgess, *Nature*, **304**(1983), 611.
- [13] A. T. Winfree, *SIAM Review*, **32**(1990), 1.
- [14] J. P. Keener, *Phys.*, **D70**(1994), 61.
- [15] H. Lind, H. Engel, *Phys.*, **D49**(1991), 13.

# SOLVING EIKONAL EQUATION BY FIFE'S SCALING

LIU SHEN-QUAN<sup>1)</sup> LU QI-SHAO<sup>1), 2)</sup>

<sup>1)</sup>*(Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of  
Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)*

<sup>2)</sup>*(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)*

(Received 25 December 1996)

## ABSTRACT

In this paper, the Fife's scaling is used to deal with the three dimensional eikonal equation. Firstly, we put the eikonal equation in the frame of the Fife scaling and obtain the expected scroll waves. Secondly, we directly use the Fife's scaling to perturb the eikonal equation and obtain the similar result. The results of two different methods are essentially the same and the patterns have been observed in the BZ reaction.

**PACC:** 0340K