郑州大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF ZHENGZHOU UNIVERSITY
第 25 卷 第 4 期 (1993,12)
Vol. 25 No. 4 (1993,12)

一个多参数的分歧定理

刘深泉 史本广
(郑州粮食学院基础部 郑州 450052)
王彦博
(郑州广播电视学校 郑州 450002)

摘要 本文主要应用非线性算子的 $L-S$ 分解,讨论了分歧理论中单参数 Grandall-Rabinowitz 定理和多参数 Hale 定理,得到一个关于任意 Fredholm 算子的分歧定理,此定理不仅推广了多参数的 Hale 定理,而且得到单参数 Crandall-Rabinowitz 定理关于零指标 Fredholm 算子的典型推广.

关键词 分歧;导算子;Fredholm 算子
中图分类号 O 176.82

0 引言

分歧问题是非线性问题的本质,许多文章讨论这方面的内容,本文主要结果是推广一类单参数分歧定理,得到一类多参数的结论.

在 197i 年 Crandall-Rabinowitz 在文献[1]中对单参数的非线性算子提出了如下结果.

定理 1 设 X,Y 为 Banach-Space,V 是 0 在 X 中的邻域.$F:(-1,1)\times V\to Y$ 具有性质

(1) $F(t,0)$ $\quad$ $|t|<1$;(2) F_t,F_{tx},F_x 连续可微;(3) $N(F_x(0,0))$ 和 $Y/R(F_x(0,0))$ 是一维空间;(4) $F_{tx}(0,0)x_0\notin R(F_x(0,0))$. 此处 $N(F_x(0,0))=\mathrm{span}\{x_0\}$.

如果 Z 是 $N(F_x(0,0))$ 在 X 中补空间,那么存在 $(0,0)$ 是一个邻域 U,$(-a,a)\subset(-1,1)$ 及连续函数 $\varphi:(-a,a)\to R^1$ $\quad\varphi(0)=0$, $\quad\psi:(-a,a)\to Z$ $\quad\psi(0)=0$

使得 $F^{-1}(\theta)\cap U=\{(\varphi(\alpha),\alpha x_0+\alpha\psi(\alpha)):|\alpha|<a\}\cup\{(t,0):(t,0)\in U\}$

本定理提出以后,许多文章讨论与此有关的问题,特别是文献[2]中,J. K. Hale 提出如下多参数分歧定理.

定理 2 设 X,Y 为 Banach Space,$\Lambda\subset R^n$ 是开集,$M\in C^m(\Lambda\times X,Y)$ $\quad m\geqslant 2$

$M(\lambda,x)\triangleq L(\lambda)x+N(\lambda,x)$,其中 $M(\lambda,0)=0$ $\quad N_x(\lambda,0)\equiv 0$

$$L(\lambda)=A-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iB_i \qquad \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

若 λ_0 是 $(A_1,B_1,\cdots,B_n)$ 之单本征值,则 $(\lambda_0,0)$ 为 $M(\lambda,x)=0$ 之分歧点.

来稿时间:1993 年 1 月 12 日

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

定理 2 是定理 1 很深刻的推广，但明显有两个缺点，首先导算子的零空间仍限制一维，其次，在证明方法上，没有新的突破，基本上是定理 1 证明的复杂化.

1 主要结果

我们的主要工作是将上面定理的结果从零空间一维推广到有限维，然后给出一个一般零指标 Fredholm 算子的分歧定理. 为了推广定理 2，我们先证明如下定理 3，定理证明所涉及的知识，请参考文献[3].

定理 3 设 X,Y 是 Banoch-Space，Λ 是 R^n 中 $O\in R^n$ 的一个开集，记 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 算子 $F:\Lambda\times X\to Y$ 满足

(1) $F(\lambda,0)=0$，　$\lambda\in\Lambda$；(2) $F_x,F_{\lambda_i x},F_{\lambda_i}$ 存在且连续 $i=1,2,\cdots,n$；(3) $\dim N(A)\geqslant 1$ 且有限，$\operatorname{codim}R(A)=n$. 其中　$A=F_x^1(0,0)$.

(4) 当空间分解 $X=N(A)\oplus X_1$，$Y=R(A)\oplus Y_1$ 时，存在 $u_0\in N(A)$，使得 $B_1u_0,B_2u_0,\cdots,B_nu_0$ 在 Y_1 上的投影是 n 个线性无关的 n 维向量，其中　$B_i=F''_{\lambda_i x}(0,0)$　$i=1,2,\cdots,n$，则 $(0,0)\in\Lambda\times X$ 是算子 $F(\lambda,x)=0$ 之分歧点.

证明　利用(4)的空间直和分解

算子　$F(\lambda,x)=0$　可以写成 $\begin{cases}(I-P)F(\lambda,u+x_1)=0\\ PF(\lambda,u+x_1)=0\end{cases}$. 其中　$u\in N(A)$，$x_1\in X_1$. P　$Y\to Y_1$ 为投影算子. 由 Liapunov-Schmidt 分解可知存在 $(0,0)\in\Lambda\times N(A)$ 的邻域 G 及算子 $X_1(\lambda,u)$

$X_1(\lambda,u):G\to X_1$　使得下列算子

$\begin{cases}PF(\lambda,+X_1(\lambda,u))=0\\ X_1(0,0)=0\end{cases}$　与上式的解 1—1 对应.

设　$Y_1=\operatorname{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$　则任意 $y\in Y$，　$y=s_1y_1+\cdots+s_ny_n+\tilde{y}$，$\tilde{y}\in R(A)$，选取　$y_i^*\in Y$　使得　$\langle y,y_i^*\rangle=s_i$　$i=1,2,\cdots,n$. 则有　$\langle y_j,y_i^*\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

定义　P'　$Y\to Y_1$　、$P'y=\sum_{i=1}^{n}\langle y,y_i^*\rangle y_i$　　$y\in Y$

易验证　$P'^2=P'$　即 P' 为投影算子，可取上面的投影算子　$P=P'$

从而得到如下算子方程

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\langle F(\lambda,u+X_1(\lambda,u)),y_i^*\rangle y_i=0\\ X_1(0,0)=0\end{cases}$$

写成向量形式：

$$\begin{cases}(\langle F(\lambda,u+X_1(\lambda,u)),y_1^*\rangle,\cdots,\langle F(\lambda,u+X_1(\lambda,u)),y_n^*\rangle)=\bar{O}\\ X_1(0,0)=0\end{cases}$$

其中　$\bar{O}=(0,0,\cdots,0)\in R^n$

构造向量函数

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

$$g(\alpha,\lambda,u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}(\langle F(\lambda,\alpha u+X_1(\lambda,\alpha u)),y_1^*\rangle,\cdots,\langle F(\lambda,\alpha u+X_1(\lambda,\alpha u)),y_n^*\rangle)\alpha\neq 0\\ (\langle F_x(\lambda,0)(u+X'_{1x}(\lambda,0)u),y_1^*\rangle,\cdots,\langle F(\lambda,0)(u+X'_{1x}(\lambda,0)u),y_n^*\rangle)\alpha=0\end{cases}$$

由定理 3 条件(2)可知 $g(\alpha,\lambda u)$ 连续可微,当 $u\in N(A)$ 固定时,考察映射

$$g(\alpha,\lambda,u):\quad R^1\times\Lambda\times N(A)\to R^n$$

$$g(0,0,u_0)=0\quad(\text{此处用到 } X'_{1x}(0,0)u_0=0)$$

$$g'_\lambda(0,0,u_0)\bar\lambda=\bar\lambda C\ (\text{此处注意 } y_i^* \text{ 的零空间})$$

其中　$\bar\lambda=(\bar\lambda_1,\cdots,\bar\lambda)\in R^n$

$$C=\begin{pmatrix}\langle B_1u_0,y_1^*\rangle & \cdots & \langle B_1u_0,y_n^*\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle B_nu_0,y_1^*\rangle & \cdots & \langle B_nu_0,y_n^*\rangle\end{pmatrix}_{n\times n}$$

设 $B_iu_0=a_{i1}y_1+\cdots+a_{in}y_n+\tilde y_i$　　$\tilde y_i\in R(A)$ 则有　$C=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}$

由定理 3 中条件(4)可知 $detC\neq 0$　根据隐函数存在定理,存在 $0\in R^n$ 的邻域 V^n 和 $(0,u_0)\in R^1\times N(A)$ 的邻域 $V^1\times V^N$,以及连续函数 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,　$\lambda:V^1\times V^N\to V^n$,

使得　$\begin{cases}g(\alpha,\lambda(\alpha,u),u)=0\\ \lambda(0,u_0)=0\end{cases}$　任意 $(\lambda,u)\in V^1\times V^N$,由此可得

$$\langle F(\lambda(\alpha,u),\alpha u+X_1(\lambda(\alpha,u),\alpha u)),y_i^*\rangle=0\quad i=1,2,\cdots,n.$$

根据 Liapunov-Schmidt 分解可知(0,0)是 $F(\lambda,x)=0$ 的分歧点,而且分歧解为

$$(\lambda(\alpha,u),\alpha u+X_1(\lambda(\alpha,u),\alpha u)),(\alpha,u)\in V^1\times V^N$$

从上面定理的证明,可得如下定理 2 的推广

定理 4　在定理 3 的记号下,(1),(2)不变,(3)改为 $N(A)=\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_m\}$,$\mathrm{codim}R(A)=n$,(4)改为 $B_1u_i,B_2u_i,\cdots,B_nu_i$ 在 Y_1 上的投影是 n 个线性无关的 n 维向量 $(i=1,2,\cdots,m)$. 则(0,0)是 $F(\lambda,x)=0$ 的分歧点,且有 m 条分歧曲线通过此分歧点.

证明　只须将定理 3 中 u_0 分别换成 u_i 即可. 对于 $m=1$ 时,即 Hale 分歧定理.

定理 3、定理 4 的证明,有个共同的特点就是导算子像空间的余维数与参数空间的维数相同,从而可利用隐函数存在定理,当 $n=1$ 即文献[1]中所用的手法. 下面我们讨论导算子为零指标 Fredholm 算子的情况,这个结论可以作为 Crandall-Rabinowitz 定理的典型推广.

定理 5　设 X,Y 为 Banach Space. λ 是 R^n 中 $0\in R^n$ 的一个开集,记 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,算子　F　$\Lambda\times X\to Y$ 满足

(1) $F(\lambda,0)=0$,任意 $\lambda\in\Lambda$;(2) $F_x,F_{\lambda_i},F_{\lambda_ix}$ 连续可微.

(3) $F'_x(0,0)=A:X\to Y$ 是零指标 Fredholm 算子,且 $X=N(A)\oplus X_1,Y=R(A)\oplus Y_1$

$$N(A)=\mathrm{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_n\},Y_1=\mathrm{span}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

(4) $F_{\lambda_ix}(0,0)u_j=\lambda_{ij}y_j+\tilde y'_j$.　$\tilde y'_j\in R(A)$　且 $det(\lambda_{ij})\neq 0$

$$\lambda_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix}$$

则(0,0)$\in\Lambda\times X$ 是算子 $F(\lambda,x)=0$ 之分歧点.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

证明　在定理 3 的证明中，取 $u_0=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则

$$F_{\lambda_i x}(0,0)u_0=\lambda_{i1}y_1+\cdots+\lambda_{in}y_n+\sum_{j=1}^{n}\bar{y}_j,\quad i=1,2,\cdots,n$$

显然，定理 3 的条件满足，即(0,0)是一分歧点.

致谢：感谢洪友诚教授的亲切指导.

参 考 文 献

1 Crandall M Rabinowitz P. Bifurcation from Simple Eigenvalues. J Funct Anal, 1971, 8: 321～340

2 Hale J K. Bifurcation from Simple Eigenvalues for Serveral Paraeter Values. Nonlinear Analysis 1979, 2: 491～497

3 陈文源. 非线性分析. 兰州：甘肃人民出版社，1982

A BIFURCATION THEOREM OF MULTIPARAMETER

Liu Shenquan　Shi Benguang　　Wang Yanbuo

(*Zhengzhou Grain College*)　(*Zhengzhou Broadcast and TV School*)

Abstract　By using the method of L－S procedure discuss the one parameter eigenvalues of Crandall-Rabinowitz theorem and multiparameter Hale theorem in the bifurcation theory. Main result here concerns with a generality Fredholm operator when bifurcation phenomenon occurs. Not only obtain a common form of Hale theorem, but also get a interesting corollary. That is typical extension of Crandall-Rabinowitz bifurcation the orem which deals with the nonlinear Fredholm operator of index zero.

Key Words　bifurcation; derivative operator; Fredholm operator

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.