信阳师范学院学报（自然科学版） Journal of Xinyang Teachers College
1990年 第3卷 第4期 （Natural Science Edition） Vol. 3 No. 4 1990

一个特殊的分歧定理

刘深泉 王彦博 田 林

摘 要 本文主要利用非线性分析中的隐函数存在定理，讨论了一般非线性算子当线性化部分是满射时的分歧问题。得到一个新的分歧定理，并得到其推广形式，文章最后叙述了我们定理的应用并提出几个开问题。

分歧理论是非线性分析的重要组成部分，它有丰富的物理、化学背景。一个物理过程必然涉及多个参数，当参数变化通过某一点时，物理过程的解的本质发生变化，也就是出现了分歧现象。典型的物理现象是沿柱体轴方向受压迫时，产生弯曲解的情况。从数学上，分歧现象可抽象为如下形式：

定义1 设X，Y为实Banach空间，$F\in C(X,Y)$ 记$S=F^{-1}(\theta)$，假设S中包含一条曲线C，C的一个内点x_0之任一邻域U_0，总有$(U_0\setminus C)\cap S\neq\phi$。则称$x_0$为F关于C的分歧点。

将C写成实参数集$\Lambda=\{(\lambda,\theta):\lambda\in(a,b)\}$.
而将方程写成

$$F:\quad \Lambda\times X\to Y \qquad F(\lambda,\theta)=0\in Y \quad \forall\lambda\in(a,b)$$

称(λ_0,θ)为F的一个分歧点，如果对(λ_0,θ)的任一邻域U，存在$(\lambda,x)\in U$
$x\neq\theta\in X$
使得： $F(\lambda,x)=0\in Y$ 成立。

当λ为单参数时称为单参数分歧，否则称为多参数分歧。

分歧理论的内容十分丰富，但主要问题是分歧点的存在性，许多文章利用各种工具，包括隐函数存在定理、拓扑度、临界点理论等得到各种结论，但一般给出的结论大多与Fredholm算子有关，本文主要讨论一类特殊算子的分歧问题，得到一个简明的分歧定理，并讨论此定理的各种应用。为此我们先作如下非线性分析的准备知识。

在非线性分析中，对一般非线性算子引入Fredche′t导数后，有如下典型的隐函数存在定理：

定理1 设X，Y，Z 为Banach space，$U\subset X$，$V\subset Y$为$x_0\in X$，$y_0\in Y$的邻域，且对算子

$F\in C'(U\times V,Z)$满足

（1） $F(x_0,y_0)=\theta\in Z$

（2） $F_y'(x_0,y_0):Y\to Z$ 有有界逆

则存在 $r>0$，$\delta>0$。及

$\varphi\in C'(B(x_0, r), B(y_0, \delta))$

使得 $\forall x\in B(x_0, r)$

$F(x, \varphi(x))=\theta\in Y$ 成立。

上面$B(x_0, r)$表示Banaeh Space X中以x_0为中心 r 为半径的开球。

对上面隐函数存在定理，若X或Y有一是实数轴R'时，我们可利用此特殊形成得到如下单参数分歧定理。

定理2 设X，Y为 Banach Space

$F: R'\times X\to Y$ 满足

（1） $F(\lambda, 0)=0 \quad \forall\lambda\in R'$

（2） F_x'，F_λ'，$F_{\lambda x}''$ 连续可微

（3） $F_x'(0, 0)\overset{\Delta}{=}A : X\to Y$满射

且 $\dim N(A)=n\geq 1$

则 $\lambda=0$ 是方程$F(\lambda, x)=0$ 之分歧点。

证明 由 $\dim N(A)=n$ 有限，故$N(A)$为X的闭子空间，故存在X的闭子空间 X_1，使得直和分解 $X=N(A)\oplus X_1$ 成立。

构造算子

$\varphi: R'\times N(A)\times X_1\to Y$。

$\varphi(\lambda, u, x_1)=F(\lambda, u+x_1)$ 其中$(u, x_1)\in N(A)\times X_1$

考察$(0, 0, 0')\in R'\times N(A)\times X_1$。

算子φ在$(0, 0, 0)$点关于x_1的Frechet导数

$\varphi_{x_1}'(0, 0, 0)x_1^*=F_x'(0, 0)x_1^*: X_1\to Y_1$

由假设$F_x'(0, 0): X\to Y$为满射，故必有

$\varphi'_{x_1}(0, 0, 0): X_1\to Y$为满射。而$\varphi_{x_1}'(0, 0, 0)$显然是单射。再由假设$F(\lambda, x)$的连续可微性可知 $\varphi(\lambda, u, x_1)$也是连续可微，从而得到

$\varphi_{x_1}'(0, 0, 0): X_1\to Y$是同胚，从而有有界逆，由隐函数存在定理，存在$(0, 0)\in R'\times N(A)$的邻域$U_1\times U_N$及算子$X_1^*: U_1\times U_N\to X_1$

使得 $\forall(\lambda, u)\in U_1\times U_N$

$\varphi(\lambda, u, X_1^*(\lambda, u))=0$成立。

即 $F(\lambda, u+X_1^*(\lambda, u))=0 \quad \forall(\lambda, u)\in U_1\times U_N$成立。

令 $\xi=u+X_1^*(\lambda, u)$，

由于$X_1^*(\lambda, u)\in X_1$， $u\in N(A)$。

而 $X_1\cap N(A)=\{\theta\}$ 故 $\xi\neq\theta$

所以 $\lambda=0$是 $F(\lambda, x)=0$之分歧点，且非零分歧解为 $\xi=u+X_1^*(\lambda, u)$，$A(\lambda, u)\in U_1\times U_N$ ▌

上面利用隐函数存在定理证明了分歧解的存在性，得到分歧解的简单构造。由于隐函数

存在定理是用压缩映射证明的，所以上面的定理也可用压缩映射来直接证明，此证明比较复杂，我们也不在多述，其方法类似于证明隐函数存在定理，但结果比较深刻，不仅得到存在性，而且有如下估计

$$\|X_1^*(\lambda, u)\|_x = 0(\|u\|_x)$$

定理2的结论中，参数空间为R'，且分歧点为$\lambda=0 \in R'$，我们很容易将上面定理2作如下推广。

定理3 设 X，Y为Banach Space。

$F: R^n \times X \to Y$ 满足：

（1） $F(\lambda, 0)=0 \quad \forall \lambda \in R^n$

（2） $F_x{}'F_{\lambda_i}{}'F_{\lambda_i x}{}'$ 连续可微。$i=1, 2 \cdots n$。

（3） $F_x{}'(\lambda_0, 0) \stackrel{\Delta}{=} A: X \to Y$满射 其中$\lambda_0 \in R^n$

且 $\dim N(A)=n \geq 1$

则 $\lambda=\lambda_0$是方程 $F(\lambda, x)=0$之分歧点。

证明：类似定理2，请读者自己完成。 ∎

下面我们讨论前面定理的应用。

考察如下非线性方程

$$\ddot{x}+\lambda x=f(\lambda, x)$$

其中 $f(\lambda, \theta)\equiv 0$，而且 $f(\lambda, x)$ 在$x=\theta$是x的高阶无穷小。

取 $X=C^2[a, b]$。$\|x\|_x=\max\limits_i\{\sup\limits_{t\in[a,b]}|x^i(t)|, i=0, 1, 2\}$

$Y=C[a, b] \quad \|y\|_Y=\sup\limits_{t\in[a,b]}|y(t)|$

下面可以证明 当$\lambda=R^2$时 R为自然数

方程 $\ddot{x}+\lambda x=f(\lambda, x)$出现非零分歧解。

设 $F: R'\times X \to Y$

$$F(\lambda, x)=\ddot{x}+\lambda x-f(\lambda, x)$$

显然 $F(\lambda, 0)\equiv 0$而且由$F(\lambda, x)$存在连续可微的Freche't导数。

$$F_x{}'(R^2, 0)x^*=\ddot{x}^*+R^2x^*$$

令$A_R=F_x{}'(R^2, 0)$

则 $N(A_R)=\mathrm{Span}\{\sin Rt, \cos Rt\}$

由常微分方程解的存在性定理可知：

A_R：$X\to Y$为满映射

由定理3可知 $\lambda=R^2$ 即A_R的特征值点是方程$F(\lambda, x)=0$的分歧点 ∎

作为本文结束，我们提出如下问题，欢迎读者与作者共同探讨

如何将上面局部分歧解推广到整体分歧解，进而与Holf分歧联系起来。

参 考 文 献

1 M. S. berger Nonlinearity and Function Analysis (1977)
2 Jorge Ize Introduction to Bifurcation Theory Lecture-Note in Math. 957 Differential Equation
3 Shui-Nee chow and Jack K. Hale Methods of bifurcation Theory Grundlehren 251 Springer-Verlag New-York.
4 陈文嫄，《非线性分析》，甘肃人民出版社（1982）

A Special Bifurcation Problem

Liu Shenquan　Wang Hongbuo　Tian Lin

Abstract

A special bifurcation problem about a nonlinear operator is discussed by means of the implicit function existence theorem, in which the linearized portion is from Banach space, Xonto Banach space Y. And a new bifurcation theorem is obtained, along with it, its application forms. Finally, several open problems are also presented.

（上接第337页）

参 考 文 献

1 H·戈德斯坦著，《经典力学》，科学出版社，第二版（1986），p112－120
2 郭士坤编，《理论力学》，人民教育出版社，第一版（1982），p145—146
3 谢克敬，谈谈地球的运动，《中学物理教学参考》，1989年第2期，p46—47

Study on the Earth's S—shaped Orbital Motion

Xing Hongjun

Abstract

On the basis of theoretical reasoning on effective potential energy it is concluded that the Earth's S-shape orbital motion is a combined motion of its Circular motion subjected to the Sun and its radial forced vibration subjected to the Moon.

Key words: effective potential energy, s-shaped orbit