美国数学月刊问题分析和教学中的应用

刘深泉

（华南理工大学数学科学学院， 广东广州 510640）

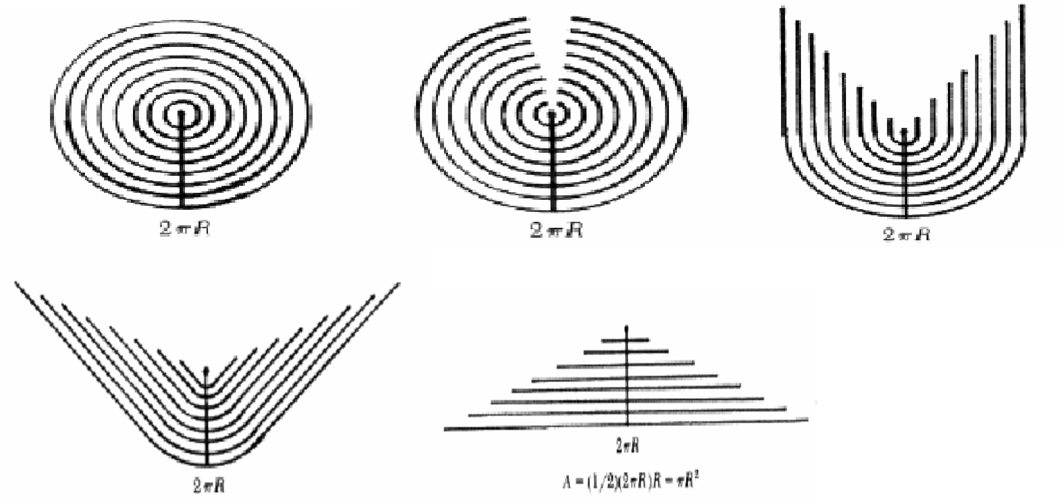
摘 要: 美国数学月刊主要刊登《大学数学》中有的独特创新的观点，这些内容经常综合大学数学中不同分别课程的知识点，提出与经典教材不同的教学思路和新颖的解题方法。本文介绍几个大学数学中的几个典型问题和自己对极值单调性教学的新方法，说明这些思路在《大学数学》教学过程的应用。

关键词: 教学；大学数学

高等学校大学数学的教学包括《高等数学》，《线性代数》，《概率统计》，《复变函数》和《数学物理方程》等课程。一般老师的教学过程只涉及一门课程，即便个别老师同时教几门课程，教学课程的方法内容大多独立完成。本文介绍美国数学月刊刊登的几个新颖问题和作者在不同课程教学过程中的交叉方法，强调课堂应用最新研究成果，提高教学质量。

1、 高等数学中的直线近似代替曲线，可用于计算曲面的面积，直线和曲线的相互转化是重要的技巧。

文献[1]给出一个曲线转化为直线的图形解释，应用直观图形，没有证明符号直接得到圆的面积，请看下面图形变化：



从图形变换明显得到，圆的面积公式可以用三角形面积公式得到。这个图形直观变化，说明直线和曲线的转化在面积计算的效果。用直线代替曲线是高等数学的基本思想，准确直观表达直曲转化对问题理解十分重要。

2 、广义积分的教学在高等数学教学过程中十分特殊，若将积分理论和实际应用结合起来，教学效果会十分明显。

对广泛广义积分问题，理论上应用最多的是概率统计中的分布计算，包含常见的各类分布函数和密度函数。对实际问题，微积分历史上最著名的例题是有点宗教色彩的 Gabriel's 喇叭， 具体构造 是将双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ $x\in[1,+\infty)$ 绕 x 轴旋转一周，得到一个无穷长度的喇叭形状的立体图形，称为 Gabriel's 喇叭，见图1。该喇叭立体具有一个很奇怪的特性：整个喇叭的体积是有限值，但整个喇叭表面积的确是无穷大。

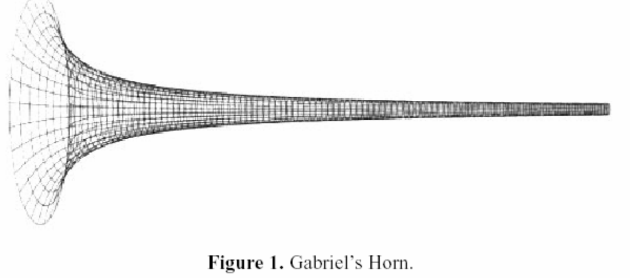


Figure 1. Gabriel's Horn.

这个例子非常有趣，课堂教学中可以吸引学生的好奇心理，经典教学应用是学习旋转体体积公式和立体曲面面积公式。文献[1]给出 Gabriel’s 喇叭的一个变形，构造 Gabriel’s 结婚蛋糕。可以利用这个新奇问题，学习无穷级数的收敛发散性。具体先 构造分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ for } 1 \le x < 2\\ \frac{1}{2} \text{ for } 2 \le x < 3\\ \quad \dots\\ \frac{1}{n} \text{ for } n \le x < n+1\\ \quad \dots\end{cases}$$

然后将阶梯函数绕 x 轴旋转一周，得到 Gabriel’s 结婚蛋糕，如图2：

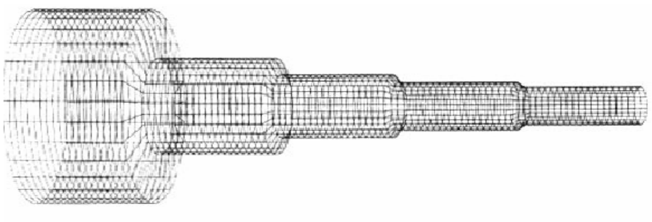


Figure 2. Gabriel’s Wedding Cake

Gabriel’s 结婚蛋糕具有有限的立体体积和无穷大的表面积的特点。直观计算容易得到 Gabriel’s 结婚蛋糕的整个体积为：

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{1}{n}\right)^2=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

显然这个级数收敛，且收敛到 $\pi^3/6$ 。

下面说明 Gabriel’s
结婚蛋糕的表面积为无穷大。致意所有表面积等于圆柱蛋糕上面的面积和蛋糕侧面积之和构成。其中Gabriel’s蛋糕圆柱上面的面积等于

$$A_T=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\pi\left(\frac{1}{n}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right]=\pi.$$

Gabriel’s 结婚蛋糕的侧面积等于

$$A_L=\sum_{n=1}^{\infty}2\pi\left(\frac{1}{n}\right)(1)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

显然，后面一个是调和级数，其和函数发散，这说明Gabriel’s
结婚蛋糕的所有表面积为无穷大。这个问题不仅有趣，而且将级数理论中最重要的两个级数联系起来，可以作为典型的级数教学技巧。

3、无穷级数的展开在不同课程中都有不同的表达，高等数学中有泰勒级数，傅立叶级数，复变函数中有泰勒级数和罗朗级数，积分变换课程内有傅立叶积分公式等。这些内容之间的关系如何，有什么应用？

一般教学过程，大家熟悉的关系是罗朗级数的特殊形式是泰勒级数，傅立叶级数有三角形式和复数形式等。但如果利用公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，在周期函数任意阶导数存在且满足这些级数的收敛条件时，可以得到泰勒级数和傅立叶级数内在关系[3]：

实数泰勒级数 ： $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 　　扩展到复平面

复数泰勒级数 ： $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 　　解析函数

复数泰勒级数 ： $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}$ 　　复数形式 $z-z_0=re^{i\theta}$

傅立叶级数 ： $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(p_n\cos n\theta+q_n\sin n\theta)$ 　　公式 　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

上面变换过程的逆仍然成立，从而将泰勒级数和傅立叶级数联系起来，可以说明在复数范围为，一定程度上两个级数可以转化。这些教学内容将几门课程的不同教学内容联系起来，方便学生掌握大学数学 知识体系。

对上面的傅立叶级数展开，应用最广泛的是通信专业信号分析，课堂教学中一个典型的例子是人们的听觉就等效与一个傅立叶分解[4]。进入人耳的声音分解为进入听觉器官内耳的耳蜗中的频率分量声音在耳蜗入口处振动，并沿基底膜产生行波向前传递，根据输入信号的不同频率，在基底膜的不同位置上产生最大幅度的振动。耳蜗入口附近高频分量振动最大，在耳蜗的纵深处低频分量振动最大。在基底膜上排列的神经细胞按振动振幅大小产生兴奋而发生脉冲。这样，变成内耳蜗频率分析，其信息传递到听觉中枢而被识别为声音信号。

4、极值问题和单调问题是高等数学教学的基本问题，内容包括一元函数和多元函数，对应的充分性判定有很多结论。

一元有一阶导数判别法，二阶导数判别法。多元函数极值判别法和拉哥朗日判别法等，更复杂的有调和函数的极值原理等．教学过程中如何将这些内容综合起来? 这里设计了树型结构，将函数一点的单调性质和极值性质与这点各阶导数全部联系起来。在函数 $x=a$ 附近函数可导，利用导数的不同情形得到下列链型结构：

$$f(x)\to f(a)\to\begin{cases}f'(a)>0\ increase\\ f'(a)=0----\to\\ f'(a)<0\ decrease\end{cases}\begin{cases}f''(a)>0\min imum\\ f''(a)=0----\to\\ f''(a)<0\max imun\end{cases}\begin{cases}f'''(a)>0\ increase\\ f'''(a)=0----\to\\ f'''(a)<0\ decrease\end{cases}$$

$$......\to\begin{cases}f^{(2n-1)}(a)>0\ increase\\ f^{(2n-1)}(a)=0----\to\\ f^{(2n-1)}(a)<0\ decrease\end{cases}\begin{cases}f^{(2n)}(a)>0\min imum\\ f^{(2n)}(a)=0----\to\\ f^{(2n)}(a)<0\max imun\end{cases}\begin{cases}f^{(2n+1)}(a)>0\ increase\\ f^{(2n+1)}(a)=0----\to......\\ f^{(2n+1)}(a)<0\ decrease\end{cases}$$

上面的链型结构说明函数在一点 $x=a$ 附近的极值单调性质与各阶导数的关系，链型不仅包含皮亚诺定理的结论，而且可以添加函数的凹凸性。教学中使用这个链型可以将很多知识联系起来。

此外，教学过程中可以让学生分析特殊函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在链型结构的位置，对二元函数 $u=f(x,y)$，如何类似构造空间的树型结构? 对应多元函数的理论证明，可以让学生联系高等数学中的多元泰勒公式和线性代数的二次型正定负定性等知识完成 。

5、结论

大学数学教学重要性十分明显，如何使用最新科研成果，提高教学水平也是十分重要的手段。本文介绍的几个美国数学月刊典型例子和作者的教学体会，在作者高等数学的教学过程中，效果明显，学生反映很好，希望这些内容对同行的高等数学教学有所帮助。

参考文献:

[1] Mathematics Magazine, June 1990, Volume 63, Number 3, p 188.

[2] The College Mathematics Journal, January 1999, Volume 30,Number 1, pp. 35-38

[3] 数学物理方程：傅里叶分析及其应用-（美）傅兰德-机械工业出版社,2005

[4] 信号分析,（日）日井支朗, 科学出版社,2001

[5] Dale Varberg 等, Calculus (第 8 版),机械工业出版社,2004