

# 多时间尺度混合模式振荡\*

Mathieu Desroches<sup>†</sup>John Guckenheimer<sup>‡</sup>Bernd Krauskopf<sup>§</sup>Christian Kuehn<sup>¶</sup>Hinke M. Osinga<sup>§</sup>Martin Wechselberger<sup>†</sup>

**摘要:** 混合模式振荡 (Mixed-Mode Oscillations, MMOs) 是产生于动力系统中一种复杂振荡模式 (轨线), 它是由一系列大振幅振荡 (Large-Amplitude Oscillations, LAOs) 和小振幅振荡 (Small-Amplitude Oscillations, SAOs) 共同组成, 交替出现。MMOs 已经在化学、物理和生物系统中被观察和研究了 30 多年。到目前为止, 相较于有关爆破振荡现象的分类, 很少有人对 MMOs 的不同模式进行分类。本文对不同类型的 MMOs 进行研究, 并着重分析 MMOs 的由局部多时间尺度“机制”产生的 LAOs。近期的研究大大加深了我对这些机制的数学属性的思考。在这项调查研究中, 我们对 MMOs 的各种观察进行了汇总并建立了一个研究其属性的系统框架。本文中还着重分析描述了用数值的方法来计算不同类型的不变流形及其交叉点。

**关键词:** 混合模式振荡, 奇异摄动, 动力系统

AMS 学科分类: 34C15, 34D15, 37M20

DOL: 101137/100791233

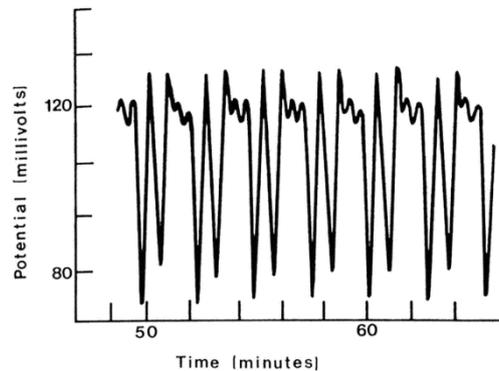


图 1: 在 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应中的溴离子电极电位。经同意, 转载自文章 Hudson, Hart 和 Marinko, J. Chem. Phys., 71 (4), 1601–1606, (1979). ©1979, 美国物理研究所。

## 1. 引言

已经在数个应用领域观察到伴有振幅明显分离的振荡, 特别是在化学反应动力学中尤为突出。图 1 是 Hudson, Hart 和 Marinko 论文中的图 12。该图展示出了在搅拌反应釜中的 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应在一个时间序列中表现出的复杂化学振荡。该时间序列下的振荡是周期性的, 在每个周期内都有明显的振荡结构。特别是成对的 SAO 与成对的 LAO 交替出现的这种周期性表现的较为明显。该结果是混合模式振荡 (MMO) 的一个示例, 振荡表现出 (至少) 存在两个不同幅度的循环。没有公认的标准对这两种振幅进行区分, 但在图 1 中振荡的振幅大小的分离是明显的。在 MMO 中大小振荡连续出现的模式是一个会引起观察者立即注意的方面。通常, 可以用记号  $L_1^s L_2^s \dots$  来标记以  $L_1$  LAOs 开头的序列, 紧接着是  $s_1$  SAOs,  $L_2$  LAOs,  $s_2$  SAOs 等等。我们把  $L_1^s L_2^s \dots$  称为 MMO 的**特征**; 它可能是周期性的或非周期性的。而多周期性的轨线特征可以被简化为单周期特征。因此, 在图 1 中按照时间序列来看振荡表现出了周期性, 表现出的特征为  $2^2$ , 即两个连续的 LAOs 和两个连续的 SAOs 的交替出现。当 Hudson, Hart 和 Marinko 通过反应釜来改变反应过程的流速, 观察到伴有不同振荡特征的 MMOs, 以及仅有大振幅或仅有小振幅的简

单振荡。类似的结果也在他们的某些论文中的其他实验和模型化学系统中有所提及。此外，在激光系统和神经元中也已经观察到 MMOs。在本文的最后一节的表 4 中，我们对在激光、神经元以及其它系统中的 MMOs 有关实验性研究的参考文献进行了总结。

动力系统理论主要是用来研究微分方程解的定性性质。该理论通过研究平衡点和周期轨线的分岔，从而确定这些方程的极限集是如何依赖于系统参数的。MMOs 可能是周期性的轨线，但我们会提出一些已然超越经典动力系统理论可以来论证的问题。具体来说，人们试图把 MMOs 分成 SAOs 和 LAOs 两个时段来分析，从而确定这两个时段的振荡在该系统的状态空间中所表现出的几何特征，并确定它们之间的转换方式。由于这两种振荡转换的速度比这两种振荡本身的振荡速度快得多，使得我们不得不寻求具有多个时间尺度的 MMOs 模型。

早期对模型系统中的 MMOs 的研究通常仅限于将 MMO 特征编排的方式作为参数进行分类，分类结果是多种多样的。Barkley 在参考文献[16]中提出了一个例外：他评估了多时间尺度模型对 MMOs 所产生的作用，他所评估的 MMOs 产生的行为已被 Hudson, Hart 和 Marinko 观察到，并在参考文献[106]中有所提及。他把从一些实验中产生的 MMOs 和在参考文献[207]中被 Showalter, Noyes 和 Bar-Eli 所提出的刻画 BZ 反应的七维模型与三维的多时间尺度模型作了比较。Barkley 无法给出在较大的模型中能够体现 MMOs 定性特征的三维模型，但这种具有人们所渴求性质的模型随后慢慢被建立起来。本文讨论了其中两个模型，尤其剖析了 Koper 在参考文献[123]中提出并研究的模型。Koper 模型类似于一种标准奇异 Hopf 分岔 (singular Hopf bifurcation)，一个余维-1 的分岔产生于具有两个慢变量和一个快变量的动力系统中。我们所关注的焦点是 MMOs 的 SAOs 是在一般的多时间尺度系统中局部现象产生的副产物。类似于在分岔理论中的标准形式那样，以其最简单的表现形式来理解 MMOs 的多时间尺度的动力学会引起对更复杂系统中的 MMOs 的特性的深入理解。我们再次研究了 Showalter, Noyes 和 Bar-Eli 的模型，从而强调多时间尺度在研究 MMOs 中的作用。

多时间尺度动力系统的几何结构是复杂的。第二节会给出一个简短的回顾。从 20 世纪 70 年代“斯特拉斯堡”学校和 Takens 的关于“约束向量场”的研究工作开始，几何方法就已经用于研究一般的具有两个慢变量和一个快变量的多时间尺度系统。在这项工作中折奇异点 (Folded singularities) 是一个较为突出的现象。正如第 2 节所表述的那样，它们位于临界流形 (Critical manifold) 的一个折点上，在该折点上吸引分支和一个排斥分支相交。折奇异点产生于一个去奇异简化向量场 (Desingularized reduced vector field) 的平衡点中，该向量场是构建在以时间尺度为参数的奇异极限中。最近，Dumortier, Roussarie, Krupa, Szmolyan 和 Wechselberger 介绍了奇异 blow-up 技术，该技术用于分析研究在折奇异点附近的动力学。这些方法使我们获取了一些鸭轨线 (Canard orbits) 的相关信息，这个鸭轨线连接了既包含吸引分支又包含排斥分支的慢流形 (slow manifolds)。

鸭轨线组织控制了与折结点相关的 MMOs 的 SAOs 的数目。折结点[88, 237]、折鞍点[86, 144]和奇异 Hopf 分岔[87]的展开方便了我们理解 MMOs 的特性，并说明了它们是如何随着系统参数的变化而产生的。一段轨线穿过折结点区域是产生 MMOs 的一种机制，我们将在 3.1 节详细讨论它，并在第 4 节和第 5 节中举例说明。奇异 Hopf 分岔和与之密切相关的第二类折鞍点分岔共同构成第二种机制，这种机制是在有两个慢变量和一个快变量的系统中以稳定的方式产生 SAOs 和 MMOs。这些分岔在快慢系统中当平衡点穿过临界流形的折曲线时产生。会在本文 3.2 节中详细讨论奇异 Hopf 分岔，并在第 4 和第 5 节举例说明。我们将讨论第三种在慢-快系统中产生 SAOs 的机制，这种快-慢系统是由边界层方程 (The layer equations) 中的 Hopf 分岔组成，系统中有两个快变量。我们称这种机制为动力学 Hopf 分岔 (dynamic Hopf bifurcation)，并且我们可以把具有迟滞动力学 Hopf 分岔轨线和具有回旋 (Tourbillon) 的轨线[235]区分开，具有回旋的轨线的 SAOs 比那些具有迟滞的动力学 Hopf 分岔轨线的要大得多。会在本文 3.4 节详细讨论动力学 Hopf 分岔，并在第 6 和第 7 节举例说明。

作为对慢-快系统的分析理论进展的补充，数值方法已经开发了用计算机计算和可视化几何结构，来构建这些系统的动力学。现在慢流形和鸭轨线可以在具体的系统中进行计算；关于这一点可以参见 Gucken

-heimer 的论文[87, 91]和 Desroches, Krauskopf 和 Osinga 的论文[42, 43, 44, 45]。在先前研究的许多例子中, 新理论与新数值计算方法的结合对研究 MMOs 产生了新的理解。本文对这些研究进展进行了综述和总结。总结如下: 第二部分介绍了几何奇异摄动理论的部分相关背景。在第 3 节中讨论并详细说明了 MMOs 中产生 SAOs 的多时间尺度机制。后面四个部分提供了一些研究案例, 用于阐明和强调最近的理论进展和计算技术。在本文的第 8 节会更详细地介绍一些常使用到的计算方法。在最后, 本文的第 9 部分会对 MMO 文献的简要概述, 并讨论其他与慢变量和快变量分离无关的机制。

## 2. 慢-快系统的几何奇异摄动理论

我们考虑下面的一个慢-快向量场, 它的动力系统方程形式如下:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau} = g(x, y, \lambda, \varepsilon) \end{cases}$$

其  $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  是状态空间变量,  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  是该系统的参数, 并且  $\varepsilon$  是一个远小于 1 的正参数, 表示不同时间尺度的比例。函数  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  和  $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 假设它们足够光滑, 即无穷次可微 (属于  $C^\infty$ ), 变量  $x$  是快变量, 变量  $y$  是慢变量。系统 (2.1) 可以通过把慢时间尺度  $\tau$  转换为快时间尺度  $t = \tau/\varepsilon$  重新缩放为如下形式:

$$(2.2) \quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda, \varepsilon) \\ y' = \frac{dy}{dt} = \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon) \end{cases}$$

已有几种观点被采取用于研究慢-快系统, 第一种观点是使用匹配渐近展开等技术进行渐近分析。第二种观点是几何奇异摄动理论 (Geometric singular perturbation theory, GSPT) 采用几何方法研究不变流形、奇异点的标准型以及它们的开折分析。Fenichel 在不变流形的基础工作为 GSPT 奠定了基础, 因此他在不变流形的研究成果也被称为 Fenichel 理论。第三种观点被一群在斯特拉斯堡的法国数学家采用。就是通过非标准分析对慢-快系统进行研究, 他们对慢-快系统有了许多重要的发现。本文只关注了用 GSPT 方法来研究慢-快系统获得的结果。这个结果对研究 MMOs 是很有必要的。还有其他一些重要的技术是 GSPT 的一部分, 比如交换引理[113, 115], 爆破法[57, 143, 237], 慢-快标准型理论[10], 这些在本文中未被具体说明。

### 2.1. 临界流形和慢流

慢-快系统的解通常是通过解的增长速度的变化来表现出慢和快的时段特征。当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 系统 (2.1) 的快时段的收敛轨线是快子系统或边界层方程的解, 如下:

$$(2.3) \quad \begin{cases} x' = f(x, y, \lambda, 0) \\ y' = 0 \end{cases}$$

另一方面, 当处于慢时段时, 系统 (2.2) 的收敛轨线为系统 (2.4) 的解。

$$(2.4) \quad \begin{cases} 0 = f(x, y, \lambda, 0) \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda, 0) \end{cases}$$

这个微分方程 (DAE) 称为慢流 (slow flow) 或者简化系统 (reduced system)。GSPT 的目标之一就是利用快子系统 (2.3) 和慢子系统 (2.4) 来理解整个系统 (2.1) 或 (2.2) 的当  $\varepsilon > 0$  时的动力学。在系统 (2.4) 中的代数方程定义了临界流形 (退化流形, critical manifold):

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid f(x, y, \lambda, 0) = 0\}$$

我们注意到  $S$  可能会有奇异点，但是在这里我们假设  $S$  没有奇异点，所以  $S$  是一个光滑的流形。 $S$  中的点是边界层方程 (2.3) 的平衡点。

如果  $S$  (或  $M$ ) 是**法向双曲线** (normally hyperbolic)，当正值参数  $\varepsilon$  会足够小时，Fenichel 理论 [71] 保证了临界流形  $S$  (或  $S$  的子集  $M$ ) 作为系统 (2.1) 或 (2.2) 的慢流形的持续性。法向双曲率的概念更一般地被定义为不变流形，这个定义有效地说明了对流形的吸引和/或排斥比流形本身的动力学更强；具体的定义见参考文献 [68, 69, 70, 97]。当只有一个时间尺度时，法向双曲线通常很难去判定。然而，在我们的慢-快系统环境中， $S$  完全由平衡点构成，并且当所有  $p \in M$  是边界层方程的双曲平衡点时， $S$  的子集  $M$  的法向双曲性的条件就会被满足，也就是说，雅可比矩阵  $(D_x f)(p, \lambda, 0)$  没有实部为零的特征值。如果对  $p \in M$ ， $(D_x f)(p, \lambda, 0)$  的特征值实部小于零，我们称法向双曲  $S$  的子集  $M$  是**吸引的** (attracting)；同样，如果对  $p \in M$ ， $(D_x f)(p, \lambda, 0)$  的特征值实部大于零，我们称法向双曲  $S$  的子集  $M$  是**排斥的** (repelling)。如果  $M$  是法向双曲并且既不吸引也不排斥，我们称之为**鞍型** (saddle type)。

边界层方程的双曲性在  $S$  里的点处失效， $S$  在慢变量空间上的投影是奇异的。一般来说，在奇点理论的意义这些点是折点 [10]。在折点  $p^*$  处，会有  $f(p^*, \lambda, 0) = 0$  并且矩阵  $(D_x f)(p^*, \lambda, 0)$  的秩为  $m - 1$ ， $(D_x f)(p^*, \lambda, 0)$  与左、右零向量  $\omega$  和  $\nu$  作用，使得  $\omega \cdot [(D_x^2 f)_{p^*, \lambda, 0}(\nu, \nu)] \neq 0$ ， $\omega \cdot [(D_x^2 f)_{p^*, \lambda, 0}] \neq 0$ 。临界流形轨线到快变量仿射空间的这些不平等状态类似于二次函数。奇点理论更有力地说明了存在局部坐标系使得函数  $f$  转换成  $y_1 = x_1^2$ 。在  $n$  维临界流形  $S$  中，折点形成了一个余维-1 子流形的集合，特别是当  $m = 1$  和  $n = 2$  时，折点形成平滑曲线，该曲线分隔了吸引分支和排斥分支的二维临界流形  $S$ 。在本文中，我们不考虑  $S$  在慢变量空间上的投影的退化奇异点。

除了折点外，隐函数定理表明  $S$  是函数  $h(y) = x$  的局部曲线图，而且简化系统 (2.4) 可以被表示成如下形式：

$$(2.5) \quad \dot{y} = g(h(y), y, \lambda, 0)$$

我们也可以把系统 (2.4) 保持成 DAE 结构，并把它记为 (2.6) 式，作为  $S$  的限制向量场。

$$(2.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = \pm (D_x f)^{-1} (D_y f) g \\ \dot{y} = g \end{cases}$$

在  $R^m \times R^n$  上通过观察  $f = 0$  和  $\dot{y} = g$ ，表明  $\dot{x} = \pm (D_x f)^{-1} (D_y f) g$ 。当  $f$  是奇异的时，向量场 (2.6) 会**爆破** (blows up)。它可以通过用  $\pm \det(D_x f)$  的方式来缩放时间，从而实现**去奇异化** (desingularized)，我们选择正负号，使得轨线的方向在  $S$  的吸引分支上保持不变。这种去奇异化系统在我们的许多分析中都起着重要作用。如果  $S$  是法向双曲的，不仅仅是  $S$ ，慢流形在  $\varepsilon > 0$  时也保持着这种特性；以下基本定理是更为精确的说明这一点。

**定理 2.1 (Fenichel 定理 [71])** 设  $M = M_0$  是一个紧的系统 (2.2) 临界流形  $S$  的法向双曲子流形 (可能有界)，并且  $f, g \in C^r$ ， $r < \infty$ 。则对于充分小的正值  $\varepsilon$  有下列结论成立：

(F1) 存在一个局部不变流形  $M_\varepsilon$  微分同胚到  $M_0$ 。局部不变的意思是  $M_\varepsilon$  具有轨线进入或离开所穿过的边界。

(F2)  $M_\varepsilon$  距  $M_0$  有一个  $O(\varepsilon)$  量级的 Hausdorff 距离。

(F3) 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时， $M_\varepsilon$  上的流收敛于  $M$  上的慢流。

(F4)  $M_\varepsilon$  是  $C^r$ -光滑的。

(F5)  $M_\varepsilon$  是法向双曲的，并且  $M_\varepsilon$  与作为  $M_0$  的快变量有相同稳定的性质 (吸引，排斥，或鞍型)。

(F6)  $M_\varepsilon$  一般是不唯一的。在与  $M_\varepsilon$  的边界保持固定距离的区域中，所有的流形都满足 (F1) - (F5)，并且每个流形之间会存在一个 Hausdorff 距离  $O(e^{-K/\varepsilon})$ ，其中  $K > 0$  且  $K = O(1)$ 。

法向双曲流形  $M_0$  与局部稳定和不稳定流形相关联，关系如下：

$$W_{loc}^s(M_0) = \bigcup_{p \in M_0} W_{loc}^s(p) \quad \text{和} \quad W_{loc}^u(M_0) = \bigcup_{p \in M_0} W_{loc}^u(p),$$

其中  $W_{loc}^s(p)$  和  $W_{loc}^u(p)$  分别表示在  $p$  点处的作为边界层方程的一个双曲函数平衡点  $p$  的局部稳定和局部不稳定流形。这些流形对充分小的正值  $\varepsilon$  存在局部稳定和局部不稳定流形  $W_{loc}^s(p)$  和  $W_{loc}^u(p)$ ，如果用  $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$  和  $W_{loc}^u(M_\varepsilon)$  代替  $M_\varepsilon$  和  $M_0$ （或者用  $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$  和  $W_{loc}^u(M_0)$  代替  $M_\varepsilon$  和  $M_0$ ），结论 (F1)–(F6) 依然是成立的。我们称  $M_\varepsilon$  为 Fenichel 流形。Fenichel 流形是慢流形 (slow manifolds) 的一个子类，是在当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时，快时间尺度会趋向于 0 的向量场中的不变流形。我们按习惯把奇异极限中的对象标记下标 0，而相关的摄动对象标记下标  $\varepsilon$ 。几何上，一个 Fenichel 流形  $M_\varepsilon$  的稳定流形  $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$  组成点的轨线会提前靠近  $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$ ；类似的， $W_{loc}^u(M_\varepsilon)$  组成点的轨线会延后靠近  $M_\varepsilon$ 。

### 2.1.1. 在 Van der Pol 方程中的临界流形和慢流

让我们用一个例子来说明这些 GSPT 的一般概念。具有常数受迫项的 Van der Pol 方程是最简单的系统中的一个，在这个系统里面的相关概念都是很直白（显然）的，这些概念历史上可能也是第一次给出，Van der Pol 方程如下：

$$(2.7) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} = \lambda - x \end{cases}$$

在这个慢-速系统中虽然快慢变量各一个，但是当这个系统第一次被发现时 [50]，它所展示出来了复杂的动力学确实令人惊讶。在系统 (2.7) 中，通过令  $\varepsilon = 0$ ，我们得到了一个包含一个代数方程的简化系统，该代数方程定义了系统 (2.7) 的临界流形 (2.8)，这个流形是三次曲线：

$$(2.8) \quad S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{3}x^3 - x =: c(x) \right\}$$

除了三次曲线上的局部极值点（极小值点和极大值点） $p_\pm = (\pm 1, \mp 2/3)$  外，该曲线是法向双曲的，上述的临界流形  $S$  有一个服从于快变量  $x$  的折，在极值点  $p_\pm$  处法向双曲性是不满足的，因为  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \lambda, 0) = 1 - x^2$  在极值点  $p_\pm$  等于 0。因此，在极值点  $p_\pm$  为折点而且在极值点  $p_\pm$  处自然地将临界流形分解成如下三个分支：

$$S = S^{a,-} \cup \{p_-\} \cup S^r \cup \{p_+\} \cup S^{a,+}$$

其中  $S^{a,-} := S \cap \{x < -1\}$ ， $S^{a,+} := S \cap \{x > 1\}$  并且  $S^r := S \cap \{-1 < x < 1\}$ 。从  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \lambda, 0)$  的正负情况中我们可知分支  $S^{a,-}$  和  $S^{a,+}$  都是吸引分支， $S^r$  是排斥分支。图 2 中的灰色三次曲线就是临界流形  $S$ ，我们注意到临界流形  $S$  和它的吸引/排斥分支不依赖  $\lambda$ ，因此在子图 (a) 中  $\lambda = 0$  的情况和子图 (b) 中  $\lambda = 1$  的情况是一样的。任何不在  $S$  上的点的动力学完全受快变量  $x$  的方向的控制，这些点在图 2 中已用水平双箭头表示出来；注意到临界流形  $S$  的中间部分是排斥分支，两边无界的部分是吸引分支。

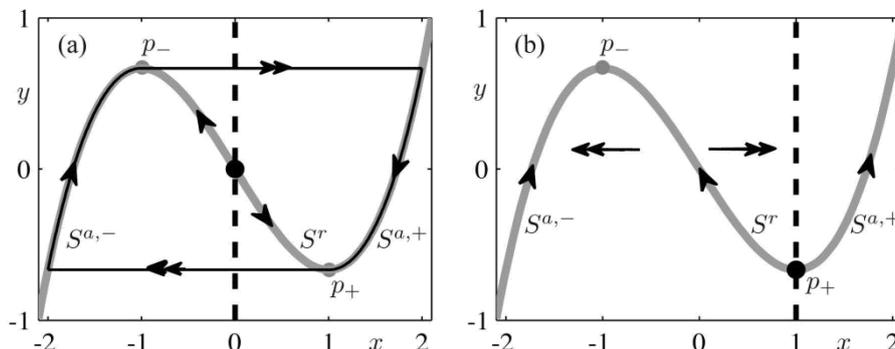


图 2: Van der Pol 方程在  $\lambda = 0$  (a) 和  $\lambda = 1$  (b) 的情况下的相图。展示了临界流形  $S$  (灰色实曲线) 和  $y$  零值线 (虚线)；双箭头表示快流的方向，单箭头表示慢流的方向。子图 (a) 展示了当张弛振荡 (黑色线) 围绕着不稳定平衡点时的辅助流形。子图 (b) 是在局部极小值点  $p_+$  处带有折奇点的奇异 Hopf 分岔时期。

在 Van der Pol 方程 (2.7) 中, 为了得到临界流形  $S$  上的慢流 (2.5), 实际上不需要精确地解出  $S^{a,-}$ 、 $S^r$  和  $S^{a,+}$  上的三次方程  $y = c(x)$  中的  $x$ 。使用快变量  $x$  来表述慢流(简化流)更方便。为此, 我们对  $f(x, y, \lambda, 0) = y - c(x) = 0$  关于慢时间尺度  $\tau$  求导, 得到如下形式:

$$\dot{y} = \dot{x}x^2 - \dot{x} = \dot{x}(x^2 - 1)$$

以上有关  $\dot{y}$  的等式结合 (2.7) 式中第二个等式, 我们可以得到 (2.9) 式:

$$(2.9) \quad (x^2 - 1)\dot{x} = \lambda - x \quad \text{或} \quad \dot{x} = \frac{\lambda - x}{x^2 - 1}$$

图 2 中灰色曲线的箭头表示的是临界流形  $S$  上的慢流方向。慢流依赖于  $\lambda$ , 因为流的方向也由临界流形  $S$  的  $x = \lambda$  时的局部平衡点决定。慢流是定义在  $S^{a,-}$ 、 $S^r$  和  $S^{a,+}$  上的, 但在  $x = \pm 1$  时不成立(只要  $\lambda \neq \pm 1$ )。我们可以通过对因式  $(x^2 - 1)$  收缩时间, 达到对慢流的  $x = \pm 1$  附近去奇异化的目的。这样就得到了去奇异化慢流的等式  $\dot{x} = \lambda - x$ 。同时也注意到, 这样的时间收缩会使排斥分支  $S^r$  上的时间方向反转, 因此, 当将去奇异化系统的相图与慢流的相图相关时, 必须注意。

现在我们来关注一下图 2(a) 中  $\lambda = 0$  的情况, 这种情况在  $|\lambda| < 1$  的范围中是具有代表性的。(2.7) 式的  $y$ -零值线, 是通过  $\dot{y} = 0$  来定义的, 图中黑色垂直虚线表示的就是  $y$ -零值线( $x$ -零直线就是  $S$ ), 并且原点是唯一的平衡点, 在平衡点(原点)处可以得出  $\lambda$  的值。图中的闭曲线是一条奇异轨线, 这条轨线是由起始于两个折点  $p_{\pm}$  处并连续到  $S$  的部分组成的。边界层方程轨线的连续相互关联的部分和慢流形一起被称为**辅助线流形(次流形, candidate)** [20]。奇异轨线沿着  $S$  上的慢流到一个折点, 然后它跳跃了, 也就是说, 它做了一个流向快轨线部分的转换, 流向了  $S$  的另一个分支。利用相同的机制, 又把奇异轨线返回到  $S$  的初始分支, 当  $\varepsilon > 0$  时, 奇异轨线摄动到一条 Van der Pol 系统中的周期轨线, 该 Van der Pol 系统与该奇异轨线(辅助流形)之间有个 Hausdorff 距离  $O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$ 。Van der Pol 将**张弛振荡**(relaxation oscillation)引入用于描述在慢和快阶段运动交替的周期轨线。

## 2.2 奇异 Hopf 分岔和鸭爆炸 (Canard Explosion)

慢-快系统的动力学在临界流形上失去法向双曲性的点附近是十分复杂的, 和我们所知道的拥有单时间尺度的系统完全不同。本节讨论一种被称为**鸭爆炸**(canard explosion)的现象, 这种现象发生在平面慢-快系统中, 也是发生在一个奇异的 Hopf 分岔之后。我们首先讨论 (2.7) 式 Van der Pol 系统这个例子。

### 2.2.1. 在 Van der Pol 系统中的鸭爆炸

正如上所述, 在图 2(a) 中的相图在  $\lambda$ -值取值范围中是具有代表性的。然而, 在图 2(b) 中的  $\lambda = 1$  时的相图是退化的。线性稳定性分析表明, 当  $\varepsilon > 0$  时,  $(x, y) = (\lambda, \frac{1}{3}\lambda^3 - \lambda)$  是唯一的平衡点, 在这个平衡点处可以求出  $|\lambda| < 1$  范围内的  $\lambda$  值。当  $\lambda = \pm 1$  时, 就会发生 Hopf 分岔。一个动力学系统的 Hopf 分岔的特征在于当参数改变时, 在平衡点处有一对纯虚数特征值以非零速度穿过虚轴 [148]。结果, 我们发现了一族从分岔点产生的周期轨线。我们把这两个一般情况区别如下: 分岔周期轨线稳定的**超临界**(supercritical) Hopf 分岔和分岔周期轨线不稳定的**亚临界**(subcritical) Hopf 分岔。Hopf 分岔的类型由 **Lyapunov 系数** (Lyapunov coefficient) 的符号决定(这个系数与 Hopf 标准型中三阶项有关), 对于 Hopf 分岔而言, Lyapunov 系数要求为非零。在一般的 Hopf 分岔附近, 周期轨线的振幅与参数到分岔点距离的平方根相(比较)差不多。对于 (2.7) 式 Van der Pol 系统来说, 超临界的 Hopf 分岔在  $\lambda_H = \pm 1$  时发生, 并且在参数区间  $|\lambda| < 1$  分岔周期轨线内是存在。

当正值参数  $\varepsilon$  较小时, 对如何观察 (2.7) 式 Van der Pol 系统的稳态动力学随  $\lambda$  的改变从稳定焦点到张弛振荡的分析是慢-快系统理论的一个重要发展。图 3(a) 展示了, 当  $\varepsilon = 0.05$  时, 以  $\lambda$  为参数且产生于 Hopf 分岔的周期轨线的数值延拓结果。可以预料得到, 在  $\lambda_H = 1.0$  处, 靠近 Hopf 分岔周期轨线(深灰色曲线)很小的。然而, 当  $\lambda$  减小时, 周期轨线又会非常迅速的增长, 在增长过程中, 周期轨线会沿着慢流形  $S_c^r$  延伸一段时间。事实上, 对于图 3(a) 中黑色轨线  $\lambda$  的值约为 0.993491, 也就是说,  $\lambda$  的值可以取到 6 位小数。

注意，我们仅仅展示了一个中等大小特征的增长轨线：图 3(a) 中最大的周期轨线仅仅包含折点  $p^-$ 。当让  $\lambda$  继续减小时，这个周期轨线会继续快速增长，直到它达到张弛振荡的形状；就像图 2(a) 那样。

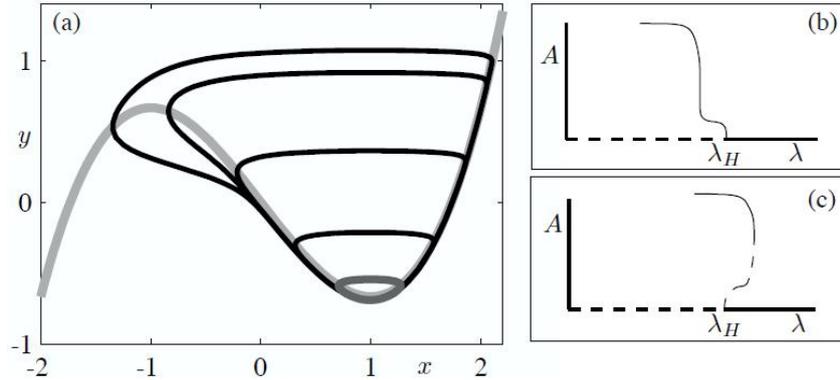


图 3: 当  $\varepsilon=0.05$  时，在 Van der Pol 方程中的周期轨线的数值延拓。子图 (a) 展示的是周期轨线的一部分：深灰色轨线是典型的在  $\lambda=\lambda_H$  时 Hopf 分岔附近的小极限循环，所有的黑色轨线都是在  $\lambda\approx 0.993491$  的小参数区间内产生的。子图 (b) 和 (c) 是对应于超临界和亚临界奇异 Hopf 分岔的分岔图；这里， $A$  表示极限环的振幅。

当平衡点移动越过折点  $p_+$  时，在  $\lambda_H=1$  处，会产生 Hopf 分岔。此时的 Hopf 分岔被称为奇异 Hopf 分岔。在 Hopf 分岔处的特征值具有  $O(\varepsilon^{-1/2})$  的量级，使得周期轨线在 Hopf 分岔处产生，其周期介于快  $O(\varepsilon^{-1})$  量级和慢  $O(1)$  量级时间尺度之间。这个周期轨线的大小在长度为  $O(\varepsilon^{-K/\varepsilon})$  (对于某个固定正值  $K$ ) 的参数值  $\lambda$  的区间内从直径  $O(\varepsilon^{1/2})$  迅速增长到直径  $O(1)$ ，即  $O(\varepsilon)$  会接近  $\lambda_H$ 。图 3(b) 和 (c) 分别是超临界情况 (这种情况已经在 Van der Pol 系统中发现) 和亚临界情况下奇异 Hopf 分岔的  $\lambda$  可能的分岔草图；纵轴表示周期轨线的最大振幅。这两个分岔草图突出了上述的特性。有一个非常小的  $\lambda$  区间，其中振荡的振幅以平方根方式增长，这在 Hopf 分岔附近是可以预测的 [148]。然而，振荡的振幅急剧增长，直到它达到对应的张弛振荡才会停下来。

在 Hopf 分岔附近的周期轨线的振幅的快速增长被称为**鸭爆炸** (canard explosion)。鸭爆炸的名字来源于鸭爆炸时的一些周期轨线看起来有点像鸭子 [50]。事实上，在图 3(a) 中最大的周期轨线就是这种“鸭形”轨线的一个例子。更一般地说，不管它的实际形状如何，如果它在慢时尺度上沿一个排斥慢流形 (延伸) 运行一段  $O(1)$  量级的时间，就把它称为鸭轨线。如果它连接吸引和排斥慢流形，鸭轨线被称为**最大鸭解** (maximal canard)。由于慢流形不是唯一的，所以这个定义取决于特定的吸引和排斥慢流形的选择；这一点可以参照定理 2.1 的 (F6)。其他的情况产生的轨线是以指数方式接近彼此的。在 (2.7) 式 Van der Pol 系统中，流形  $S_\varepsilon^{a_+}$  和  $S_\varepsilon^r$  在最大鸭轨线中相交的点附近的参数空间中发生  $O(\varepsilon^{-K/\varepsilon})$ -封闭式鸭爆炸。它与参数值  $\lambda=1$  相关联，其中平衡点位于临界流形  $S$  的折点  $p_+$  处，参见图 2(b)。

### 2.3. 一般平面系统中的奇异 Hopf 分岔和鸭爆炸

在 (2.7) 式 Van der Pol 系统中，在  $\lambda=1$  时产生奇异 Hopf 分岔，此时的平衡点就是折点。在一个一般慢-快平面系统族中，奇异 Hopf 分岔不会精确的产生于折点，而是产生于相空间和参数空间中，在与距离平衡点和折点重合处  $O(\varepsilon)$  的地方。将 (2.7) 式 Van der Pol 系统的慢系统修正为下式，可得到一个一般系统族：

$$\dot{y} = \lambda - x + ay$$

在这个修正后的系统中，平衡点和折点仍然在  $x=1$  处重合，但在  $x=\sqrt{1+\varepsilon a}$  处会发生 Hopf 分岔。对于平面慢-快系统，存在使用几何或渐近线的方法对鸭爆炸及其相关奇异 Hopf 分岔的详细动力学分析；我们将这些结果总结如下：

**定理 2.2** (在  $R^2$  中的鸭爆炸 [143]) 假设一个平面慢-快系统有一个一般折点  $p_* = (x_p, y_p) \in S$ ，也就是在  $p_*$  处满足以下关系：

$$(2.10) \quad f(p_*, \lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(p_*, \lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(p_*, \lambda, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(p_*, \lambda, 0) \neq 0$$

假设临界流形在  $x < x_p$  时是局部吸引, 在  $x > x_p$  时是局部排斥, 并且  $\lambda = 0$  时在  $p_*$  处满足

$$(2.11) \quad g(p_*, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(p_*, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} g(p_*, 0, 0) \neq 0.$$

则分别会在  $\lambda_H$  和  $\lambda_C$  出发生奇异 Hopf 分岔和鸭爆炸, 其中

$$(2.12) \quad \lambda_H = H_1 \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$$

$$(2.13) \quad \lambda_C = (H_1 + K_1) \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$$

系数  $H_1$  和  $K_1$  可以通过标准变换或者通过 Hopf 分岔的第一个 Lyapunov 系数计算出来。

$\lambda_H$  和  $\lambda_C$  的奇异极限是相等的, 对于任意的充分小的正值  $\varepsilon$ , 在 Hopf 分岔点的线性系统 [90, 148] 中有一对奇异特征值 (singular eigenvalues):

$$\sigma(\lambda; \varepsilon) = \alpha(\lambda; \varepsilon) + i\beta(\lambda; \varepsilon)$$

其中  $\alpha(\lambda_H; \varepsilon) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha(\lambda_H; \varepsilon) \neq 0$ , 且

在慢时间尺度  $\tau$  中,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H; \varepsilon) = \infty$ ; 在快时间尺度  $t$  中,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H; \varepsilon) = 0$ 。

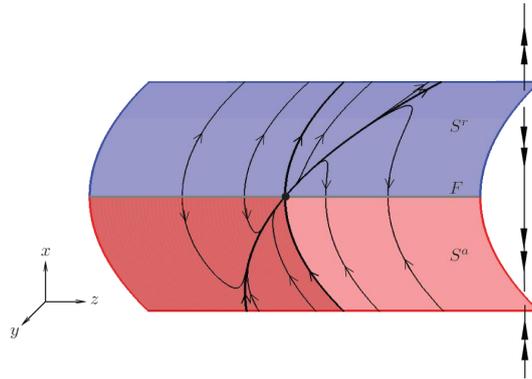


图 4: 具有吸引分支  $S^a$  (红色) 和排斥分支  $S^r$  (蓝色) 的临界流形  $S$  在折曲线  $F$  (灰色) 处相接。横向于  $S$  的快流用双 (大) 箭头表示, 而靠近折结点的  $S$  上的慢流用单个 (小) 箭头表示; 参见图 5 (b)。  $S^a$  的深色阴影区域是漏斗, 是由穿过折结点的所有点组成。

## 2.4. 在有一个快变量和两个慢变量的系统中的折奇异点

平面系统的鸭爆发生在指数型小参数区间内。然而, 只要存在一个以上的慢变量, 鸭轨线就可以在  $O(1)$  范围内存在。为了说明这一点, 我们考虑 (2.1) 式当  $m=1$  和  $n=2$  的特殊情况, 如下:

$$(2.14) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, z, \lambda, \varepsilon), \\ \dot{y} = g_1(x, y, z, \lambda, \varepsilon), \\ \dot{z} = g_2(x, y, z, \lambda, \varepsilon). \end{cases}$$

我们假设 (2.14) 的临界流形  $S = \{f = 0\}$  有一个吸引分岔  $S^a$  和一个排斥分岔  $S^r$ , 这两个分岔在折曲线  $F$  处相交, 如图 4 所示。我们还假设在临界流形  $S$  上的折点  $p_* \in F$  在奇异点理论的意义上都是一样的, 也就是说它们满足下面的条件:

$$f(p_*, \lambda, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(p_*, \lambda, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_*, \lambda, 0) \neq 0, D_{(y,z)}f(p_*, \lambda, 0) = \text{满秩}$$

慢流在去奇异化前，在折曲线上没有被定义。在大多数折点上，轨线会接近或远离临界流形  $S$  的吸引和排斥分支。在一般系统中，可能存在孤立点，这样的点被称为折奇异点，在该点处慢流轨线会穿过去。折奇异点是去奇异化的慢流的平衡点。如上所述，去奇异化的慢流可以表示成 (2.15) 式：

$$(2.15) \quad \begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g_1 + \left(\frac{\partial}{\partial z} f\right) g_2, \\ \dot{y} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g_1, \\ \dot{z} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g_2. \end{cases}$$

(2.15) 被限制在  $S$  上。如果下式成立

$$g_1(p_*, \lambda, 0) \frac{\partial f}{\partial y}(p_*, \lambda, 0) + g_2(p_*, \lambda, 0) \frac{\partial f}{\partial z}(p_*, \lambda, 0) = 0$$

则折点  $p_* \in F$  是折奇异点。图 4 是在  $S$  上的慢流系统，并且图中  $F$  上的粗实心点就是折奇异点，在该点处  $F$  由吸引变为排斥（满足慢流形）。

在 (2.15) 系统中的折点  $p_*$  的稳定性有不同的可能性。设  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是临界流形  $S$  上 (2.15) 系统雅可比矩阵的特征值，讨论折奇异点  $p_*$  处的情况，如下：

$$\begin{cases} \text{折鞍点} & \text{如果 } \sigma_1 \sigma_2 < 0, \quad \sigma_{1,2} \in \mathbb{R} \\ \text{折结点} & \text{如果 } \sigma_1 \sigma_2 > 0, \quad \sigma_{1,2} \in \mathbb{R} \\ \text{折焦点} & \text{如果 } \sigma_1 \sigma_2 > 0, \quad \text{Im}(\sigma_{1,2}) \neq 0 \end{cases}$$

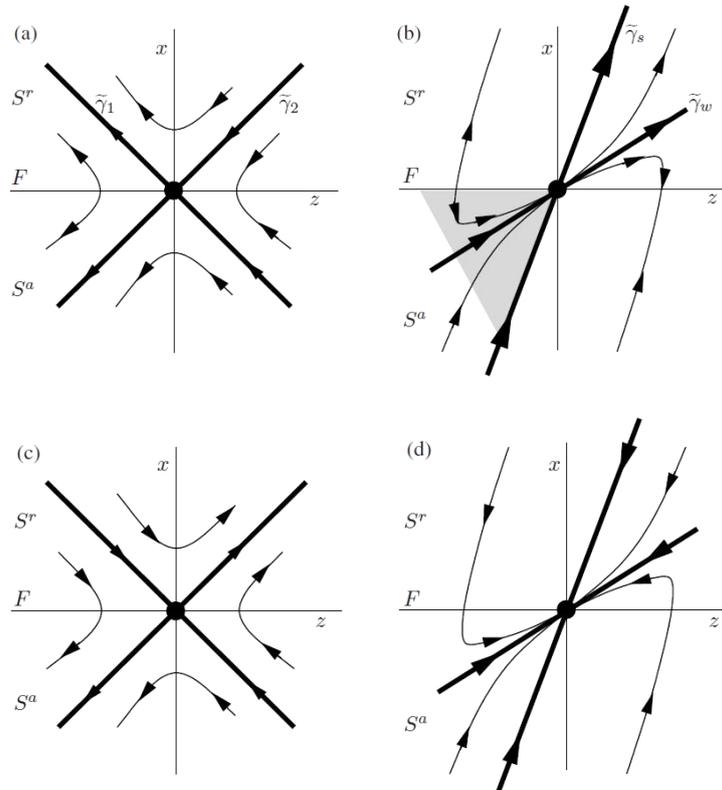


图 5: 折鞍点 (a) 和折结点 (b) 附近的局部线性化慢流的相图；由特征方向定义的奇异鸭解图显示为粗线。相应的非奇异慢流分别显示在 (c) 和 (d) 中。

图 5(a) 和 (b) 中, 分别展示了(线性)慢流的相图, 在 (c) 和 (d) 中, 分别展示了相对应的去奇异化的慢流相图。(a) 和 (c) 中的是折鞍点相图, (b) 和 (d) 中的是折结点相图。注意到, 图 5(a) 和 (b) 的相图可以通过将  $S^r$  上流方向反转获得, 其中  $\frac{\partial}{\partial x} f > 0$ , 即通过反转 (c) 和 (d) 中去奇异化的慢流相图的上半边的方向箭头则有图 5(a) 和 (b) 的相图, 其中  $x > 0$ 。在慢流形上, 沿着折鞍点或者折结点的特征方向连接着临界流形的吸引和排斥分支, 并在有限(缓慢)时间内穿过折奇异点的轨线, 称之为**奇异鸭解**(singular canard)。我们注意到, 对于折焦点的情况, 没有奇异鸭解, 这就是为什么这里没有展示折焦点的相图。对于折结节点的情况, 一般具有  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$  形式的不等式, 我们写  $|\sigma_s| > |\sigma_w|$ , 用  $s$  和  $w$  替换数字下标, 以强调强 ( $s$ ) 和弱 ( $w$ ) 的特征方向。进一步注意到, 在图 5(b) 中折结点的情况, **强奇异鸭解**(strong singular canard)  $\tilde{\gamma}_s$  和折曲线  $F$  围出了一整个扇形区域(阴影部分), 在该区域里的轨线从  $S^a$  区域穿到  $S^r$  区域, 并穿过折结点。该扇形区域和整个 (2.14) 系统所对应的区域合起来称为折结点的**漏斗**(funnel)。图 5(b) 中的线性系统应与图 4 进行比较, 图 4 展示了折结点附近的非线性慢流形, 因此, 也有一个漏斗, 由穿过折奇异点的整个扇形组成。

当  $\varepsilon > 0$  时, 奇异鸭解为整个系统的**最大鸭解**(maximal canard)的**次鸭解**(secondary canard)。这将在下面这个定理 [19, 23, 31, 214, 237] 中具体描述。

**定理 2.3** (在  $R^3$  中的鸭解) 对于快-慢系统 (2.14), 当  $\varepsilon$  为充分小的正值时, 下列结论成立:

(C1) 折焦点处没有最大鸭解产生;

(C2) 在这鞍点处, 两个奇异鸭解  $\tilde{\gamma}_{1,2}$  会摄动到最大鸭解  $\gamma_{1,2}$ ;

(C3.1) 在折结点处, 设  $\mu := \frac{\sigma_w}{\sigma_s} < 1$ , 奇异鸭解  $\tilde{\gamma}_s$  (强鸭解) 会摄动到最大鸭解  $\gamma_s$ 。如果  $\mu^{-1} \notin N$ , 则奇异鸭解  $\tilde{\gamma}_w$  (弱鸭解) 也会摄动到最大鸭解  $\gamma_w$ 。我们称  $\gamma_s$  和  $\gamma_w$  为主鸭解;

(C3.2) 在折结点处, 设  $k \in N^+$ , 且满足  $2k + 1 < \mu^{-1} < 2k + 3$ ,  $\mu^{-1} \neq 2(k + 1)$ 。则除了主鸭解  $\gamma_{s,w}$  外, 存在其他  $k$  个最大鸭解, 称之为次鸭解;

(C3.3) 在折结点处, 当  $\mu^{-1} \in N$ , 为奇数时, 主弱鸭解经历了一个跨临界分支, 当  $\mu^{-1} \in N$ , 为偶数时, 主弱鸭解经历了一个叉式分支。

定理 2.3 的证明是基于对折结奇异点附近慢-快系统的标准形式的分析。回想一下, 最大鸭解对应于一个折结奇异点附近的慢流形的吸引分支  $S_\varepsilon^a$  和排斥分支  $S_\varepsilon^r$  的(横向)交叉。通过引入合适的坐标后, 标准系统变成了一个正则摄动问题, 变分方程沿着“blown-up”的奇异鸭解 ( $\varepsilon = 0$  的问题) 成为经典的**韦伯方程**(Weber equation), 韦伯方程在数学物理方法中经常用到。韦伯方程的性质意味着当  $\mu^{-1} \notin N$  时,  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  会发生横向交叉, 因此, (根据(C2)-(C3.1)可知) 当摄动量  $\varepsilon$  足够小且  $0 < \varepsilon \ll 1$  时, 存在最大鸭解。(C3.2) 和 (C3.3) 的证明更加复杂, 这个证明是基于一个扩展的 Melnikov 理论 [236], 该理论说明了当  $\mu^{-1} \in N$  时, 次鸭解的分岔来自于主弱鸭解。

### 3. MMOs 的慢-快系统机制

在本节中, 我们给出 MMOs 在慢-快系统是如何产生的关键理论结果, 在 MMOs 产生的过程中在相空间的局部区域会有 SAOs 产生。更具体地说, 我们将讨论导致这种 SAOs 产生的四种局部机制:

◎在 3.1 节中讨论折结点附近的通道;

◎在 3.2 节中讨论奇异 Hopf 分岔;

◎在 3.3 节中讨论具有奇异 Hopf 分岔的三时间尺度问题;

◎在 3.4 节中讨论动力学 Hopf 分岔的回旋机制。

在 3.1-3.4 节中, 我们主要关注的是产生 SAOs 的系统的局部机制是怎样的。为此, 我们介绍了相关的标准形式和模型系统, 并就产生的 SAOs 的本质提供了精确的说明。这门学科的性质决定了其中一些分析是技术性很强的。然而, 这种分析使我们能够估算某些量, 这些量是可以从数值模拟和实验数据产生的, 并在产生 MMOs 例子中可以测量的。具体来说, 我们考虑的是 SAOs 的数量以及每个周期的振幅变化。每个

局部机制的这些特性都用基本的几何概念进行了说明和讨论，并在第 4-7 节中给出了研究案例。此外，在第 3.1-3.4 节中，我们将展示在存在将轨线带回具有 SAOs 的区域的**全局回归机制**(global return mechanism)的情况下，各个局部机制如何导致 MMOs 产生的。这种全局回归机制是在模型中被发现的；参见第 3.2 节和第 4-5 节的研究案例，研究的是具有 S 形的慢流形。我们还考虑了与进出 SAOs 区域相关的邻近慢流形的轨线的几何结构。

### 3.1. 在折结点处的 MMOs

折结点仅仅是针对在慢时间尺度上的系统 (2.1) 的奇异极限 (2.4) 而定义的。然而，它们与 MMOs 直接相关，因为当对充分小的正值  $\varepsilon$ ，系统 (2.1) 的轨线会穿过一个折结点处具有小振荡的区域。Wechselberger 和合作者在 [31, 214, 237] 中对折结点进行了详细的分析，而 Guckenheimer、Haiduc [88] 和 Guckenheimer [86] 则计算了在折结点附近的慢流形的交点并绘制了沿着穿过这些区域的轨线的流形图。从定理 2.3 中，我们知道折结点处的特征值之比  $0 < \mu < 1$  是决定折结点附近动力学的一个关键量。特别是， $\mu$  控制振动的最大数量。上述研究采用标准形式描述了折结点附近的振荡动力学。这些标准形式的两个等价形式是 (3.1) 和 (3.2)：

$$(3.1) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = -(\mu + 1)x - z \\ \dot{z} = \frac{1}{2}\mu \end{cases}$$

注意到  $\mu$  是系统 (3.2) 的特征值之比，并且  $v \neq 0$  且  $\mu \neq 0$  表明了系统在 (3.1) 和 (3.2) 中没有平衡点。如果把系统 (3.1) 中的  $(x, y, z)$  用  $(u, v, w)$  替换掉，并记时间变量为  $\tau_1$ ，则通过以下的坐标变换

$$x = (1 + \mu)^{1/2}u, \quad y = (1 + \mu)v, \quad z = -(1 + \mu)^{1/2}w$$

可得到系统 (3.2)。并且对时间变量作变换  $\tau = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 + \mu}}$  可得

$$(3.3) \quad v = \frac{\mu}{2(1 + \mu)^2} \quad \text{或} \quad \mu = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8v}}{-1 - \sqrt{1 - 8v}}$$

因此系统 (3.1) 中的次鸭解的数量会随着参数  $v$  而变化：当  $v$  较小时， $\mu \approx 2v$ ，将  $x, y, z, t$  再次缩放为  $x = \varepsilon^{1/2}\bar{x}, y = \varepsilon\bar{y}, z = \varepsilon^{1/2}\bar{z}, t = \varepsilon^{1/2}\bar{t}$ ，并应用于系统 (3.1) 中，为了便于记号，把横杠去掉，得到系统 (3.4)

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v \end{cases}$$

因此，对于不同的  $\varepsilon$  取值，系统 (3.1) 的相图通过线性映射在拓扑上等价。系统 (3.4) 的标准形式描述了折结点（这里是原点）附近的动力学，特征值之比  $\mu$  与系统 (3.3) 所给的相同。从  $x > 0, y = \infty$  的区域处过来的轨线穿过折结点区域的过程中会产生一些振荡，这些振荡是在向  $x < 0, y = \infty$  区域处延伸之前产生的。在这个系统中没有返回到折结点区域的轨线。我们先关注小振荡的数量。如果对于某个  $k \in \mathbb{N}$ ，使

得  $2k + 1 < \mu^{-1} < 2k + 3$ ，则在系统 (3.4) 中折结奇异点的  $O(1)$  附近，主强鸭解  $\gamma_s$  绕主弱鸭解  $\gamma_w$  扭转 1 次，第  $i$  个次要鸭解  $\xi_i$ ， $1 \leq i \leq k$ ，绕主弱鸭解  $\gamma_w$  扭转  $2i + 1$  次。系统 (3.4) 对应于一个在系统 (3.1) 和 (3.2) [214, 237] 中的  $O(\sqrt{\varepsilon})$  邻域。(扭转相当于半旋转。) 在图 6 中描述了系统 (3.4) 当  $\nu = 0.025$  时的这种扭转。注意到当  $\nu = 0.025$  时对应的  $\mu \approx 0.0557$ 。因此，当  $k = 8$  时，满足  $2k + 1 < \mu^{-1} \approx 17.953 < 2k + 3$ ，所以根据定理 2.3，存在八个次鸭解  $\xi_i$ ， $1 \leq i \leq 8$ ，以及强鸭解和弱鸭解  $\gamma_{s/w}$ 。图 6 展示了在一个三维的区域的系统 (3.4) 的吸引分支  $S_\varepsilon^a$  和排斥分支  $S_\varepsilon^r$ ， $z$  轴取在  $-\alpha$  到  $\alpha$  之间的相图， $z = \alpha$  和  $z = -\alpha$  的两个平面记为  $\Sigma_\alpha$  和  $\Sigma_{-\alpha}$ ，其中  $\alpha = 0.14$ ；有关如何完成这些计算的详细信息，请参见第 8 节。尽管简化的标准形式的系统 (3.4) 不再依赖于  $\varepsilon$ ，我们仍然要了解慢流形的  $\varepsilon$ -相关，以便把它们从临界流形的吸引分支和排斥分支中区分开来；此外，吸引慢流形  $S_\varepsilon^a$  和排斥慢流形  $S_\varepsilon^r$  可以被看做是系统 (3.1) 或系统 (3.2) 的慢流形。这两个流形都是 Fenichel 流形的拓展形式，并且它们说明了慢流形如何在临界流形的折曲线附近相交；折曲线是  $z$  轴。由于标准形式系统 (3.4) 的对称性：

$$(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, -z, -t)$$

这两个慢流形  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  关于  $y$  轴旋转 90 度，它们就是彼此的像。图 6(a) 中相交曲线为鸭轨线；被黑色标记的是主强鸭解  $\gamma_s$ （黑色）和前三个是次鸭解  $\xi_1$ （橙色线）， $\xi_2$ （红色线）和  $\xi_3$ （青色线）。嵌在其中的 (b) 图展示的是  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  在平面  $\Sigma_{fn} := \{z = 0\}$  上相交的曲线，其中包含位于原点的折结点。在平面  $\Sigma_{fn}$  上鸭轨线被确定为交集点；只有主强鸭解  $\gamma_s$  和三个是次鸭解  $\xi_1 - \xi_3$  被标记出来，但是请注意，在图的中心还有其他的互相非常接近的鸭解（包括弱鸭解  $\gamma_w$ ）。

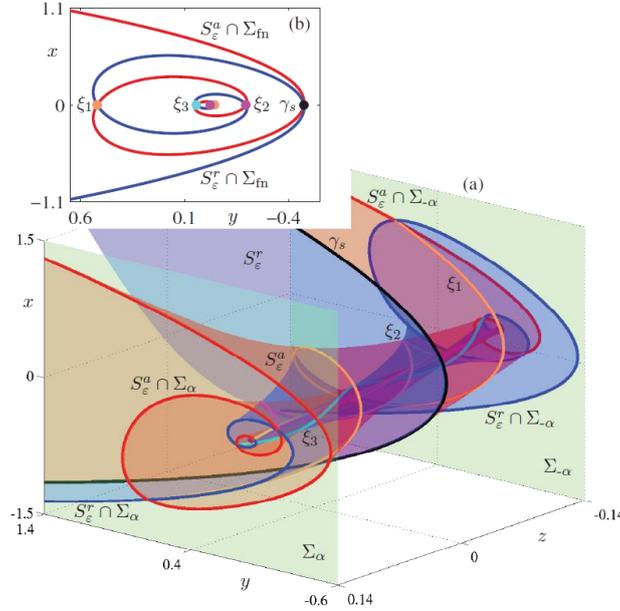


图 6: 当  $\nu = 0.025$  时的系统 (3.4) 在折结点附近的不变慢流形。吸引慢流形  $S_\varepsilon^a$  (红色) 和排斥慢流形  $S_\varepsilon^r$  (蓝色) 都是 Fenichel 流形的扩展。主要强鸭状  $\gamma_s$  (黑色曲线) 和三个次要的鸭解  $\xi_1$  (橙色线)， $\xi_2$  (红色线) 和  $\xi_3$  (青色线) 是  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  的前四条相交曲线；插图 (b) 显示了这些对象如何与正交于折曲线  $\{x = 0, y = 0\}$  的截面相交的。

进入折区域的轨线被限制在由  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  及其两条相交曲线围住的带状区域中。相交曲线是最大鸭解，并且这个轨线受到这两个有界鸭轨线振荡影响。为说明有多少鸭解，以及它们究竟产生多少振荡，我们在图 7(a) 中展示了系统 (3.4) 在  $\nu = 0.025$  时的流形图。由于流形沿着  $S_\varepsilon^a$  强收缩，对于沿  $S_\varepsilon^r$  不延伸的轨迹，穿过折区域的流形图沿一个方向强收缩。因此，流形图几乎是一维的，并且可以用一些始于临界流形且远离折曲线的轨线来近似。图 7(a) 所示流形图是通过线段  $\{x = 20, y = x^2 = 400, -3.25 \leq z \leq -0.75\}$  上的 500 个等间隔的初始值分别到平面  $x = 10$  进行积分而获得；所绘制的是最终值相对于初始值的  $z$ -坐标。在这个流形图中可以看到不连续性的十个片段。这些不连续的分段标记在线段  $\{x = 20, y = x^2 = 400, -3.25 \leq z \leq -0.75\}$  的扇区上，这些扇区对应于不断增长的 SAOs；实际上，每个分段对应于慢流形的吸引分支  $S_\varepsilon^a$  上的二维的扇区  $I_i$ ， $0 \leq i \leq 9$ 。图 7(a) 中右侧的外部扇区  $I_0$  在左侧由主强鸭解  $\gamma_s$  界定；扇区  $I_1$  由主强鸭解  $\gamma_s$  和第一个最大次鸭解  $\xi_1$  共同界定；扇区  $I_i$  ( $i = 2, \dots, 8$ ) 由最大次鸭轨线  $\xi_{i-1}$  和  $\xi_i$  界定，最后一个（左外部）扇区  $I_9$  在右边由  $\xi_8$  界定。在主强鸭解  $\gamma_s$  和最大次鸭解  $\xi_i$  的一侧， $0 \leq i \leq 8$ ，轨线沿着排斥慢流形  $S_\varepsilon^r$ ，然后随

着  $x$  值的减小跳跃。在  $\gamma_s$  和  $\xi_i$  的另一侧，轨线跳回到吸引慢流形，并在流向  $y = \infty$  之前，通过折结点区域再进行一次振荡。图 7 中的四个图 (b1)–(b4) 展示了四条轨线投射到  $(x, y)$  平面上的部分；它们的初始值是  $(x, y, z) = (200, 400, z_{in})$ ， $z_{in}$  是图 (a) 中所标记部分的  $z$  轴对应坐标，即 (b1)–(b4) 分别对应  $z_{in} = -1.25$ ， $z_{in} = -1.5$ ， $z_{in} = -1.75$  及  $z_{in} = -2.25$ 。子图 (b1) 中的轨线选自扇区  $I_2$ ，由  $\xi_1$  和  $\xi_2$  界定；该轨迹产生 2 次振荡。在图 (b2) 中的轨线来自扇区  $I_5$ ，并且实际上它产生 5 个振荡。图 (b3) 和 (b4) 中的另外两条轨线分别产生 7 次和 9 次振荡，但是在这些振荡中，有一些因为太小而不可见。

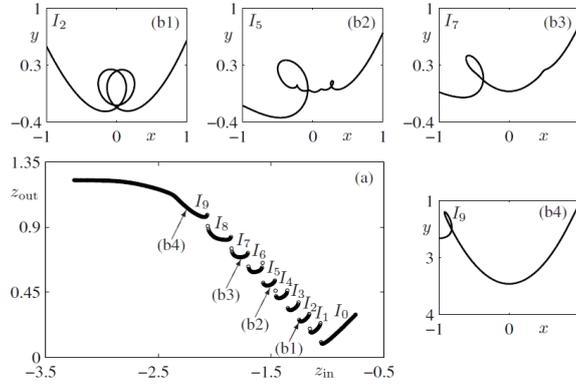


图 7: 当  $\nu = 0.025$  时的系统 (3.4) 的旋转扇区数目的数值研究。子图 (a) 通过绘制  $z$ -坐标  $z_{out}$  第一次回归到具有等间隔初始值为  $(x, y, z) = (20, 400, z_{in})$  的 500 条轨线在截面  $x = -10$  的图, 其中  $-3.25 \leq z_{in} \leq -0.75$ 。子图 (b1)–(b4) 显示了投影到  $(x, y)$ -平面上的四个轨线, 这些轨线对应于子图 (a) 中标记的点, 其中面板子图 (b1) 中  $z_{in} = -1.25$ , 子图 (b2) 中  $z_{in} = -1.5$ , 子图 (b3) 中  $z_{in} = -1.75$ , 子图 (b4) 中  $z_{in} = -2.25$ 。

图 7 中的扭转扇区的实际宽度非常接近, 导致与  $\varepsilon$  相关的伸缩常会获得系统 (3.4)。当在系统 (3.1) 和系统 (3.2) 中的方程依赖于  $\varepsilon$  时, 扇区的宽度也会依赖于  $\varepsilon$ 。事实上, 除了最大扭转对应的扇区外, 所有扇区宽度都非常小, 最大扭转对应的扇区被  $\xi_k$  和主弱鸭解所界定。对于产生振荡的旋转扇区宽度的渐近分析, 系统 (3.2) 更方便些, 因为去奇异化的慢流的特征值是  $-\mu$  和  $-1$ 。Brons, Krupa 和 Wechselberger [31] 发现以下结果。

**定理 3.1 (旋转扇区的宽度)** 考虑系统 (2.14), 假设该系统有一个折结奇异点。在距离折曲线  $O(1)$  处, 所有次鸭解都位于主强鸭解的  $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$  邻域内。因此旋转扇区的宽度  $I_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) 为  $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$  且扇区  $I_{k+1}$  的宽度是  $O(1)$ 。

注意, 当  $\mu \rightarrow 0$  (折鞍点极限) 时, 旋转扇区的数目会无限增加, 并且它们的宽度上限减小到  $O(\varepsilon^{1/2})$ 。

### 3.1.1. 具有全局回归机制的折结点

全局回归机制可以保证轨线再次回到到折结点漏斗, 从而产生 MMO。在这种情况下, 我们产生一条辅助轨线, 如图 8 所示的那样。从折结点开始, 随着快流形, 直到它返回漏斗中, 然后流形再回到折结点。我们把流形 (全局回归点) 到奇异强鸭解  $\tilde{\gamma}_s$  的距离记为  $\delta$ , 这个距离是在距离折曲线  $O(1)$  距离的横截面上测量的, 在 (折点处) 辅助轨线返回到漏斗。在满足一定的技术条件下,  $1^s$  模式的 MMO 就形成了, 其中 SAOs 的数目  $s$  可以根据定理 3.1 预测出来; 这个定理也表明了辅助轨线最有可能通过最大旋转的扇区  $I_{k+1}$ , 这里的  $k$  是由特征值比  $\mu$  所决定的。综上所述, 我们得到了以下结果。

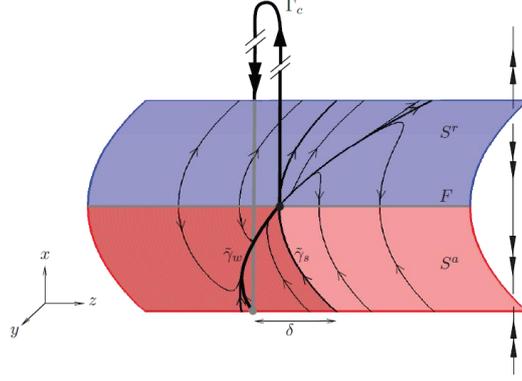


图 8: 产生 MMOs 的辅助周期轨线  $\Gamma^c$  的示意图, 该 MMOs 具有由折结点奇异性产生的 SAOs。辅助周期轨线  $\Gamma^c$  在与弱奇异鸭解  $\tilde{\gamma}_w$  相关的最大旋转扇区中沿着临界流形 (red) 的吸引分支  $S^a$  (red) 靠近折结点。当轨线到达折结点 (黑点) 时, 它沿着一层跳跃并继续进行全局回归。

定理 3.2 (泛型特征  $1^{s+1}$  的 MMOs [31]) 考虑系统 (2.14) 满足以下列假设:

(A0) 假设  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 并且充分小,  $\varepsilon^{1/2} \ll \mu$ , 对于  $k \in N$ , 有  $2k+1 < \mu^{-1} < 2k+3$ 。

(A1) 临界流形  $S$  是 (局部) 一个折曲面。

(A2) 相应的简化问题具有折结奇异性。

(A3) 存在一个辅助周期轨线 (如图 8 构建的那样), 它是由层界问题的快纤维组成, 是一个全局回归段的一部分, 他也是从距离奇异强鸭解  $\tilde{\gamma}_s$  为  $\delta$  处开始的漏斗内的吸引流行  $S^a$  的一部分。(在到折曲线  $F$  距离  $O(1)$  处测量的)。

(A4) 假设存在一个适当的横截面。则存在一个稳定的  $1^{k+1}$  特征 的 MMO。

(A4) 中所提到的横截面假设在一般情况下难以确切的表述。在一个  $S$  形流形的环境下, 它涉及到两个折曲线在吸引慢流形相对分支上的投影, 并且这些流形沿这些分支, 关于这一点可以参考文献 [31]。

定理 3.2 不仅要求对充分小的  $\varepsilon$  满足  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 而且还要求  $\mu \gg \varepsilon^{1/2}$  ( $0 < \mu < 1$ )。然而,  $\varepsilon$  在应用中通常为  $O(10^{-2})$  量级的, 为了该定理得以应用,  $\mu$  必须接近 1。因此, 这种最大 MMO 特征在实际应用中很少见到。此外, 具有特征  $1^{k+1}$  的 MMO 的 SAOs 往往太小, 不容易看到。

图 7 说明当轨线接近折结点时 (靠近强鸭解的折结点), 其中的 SAOs 的振幅是很大的, 并且是位于  $I_i$  之间的, 其中  $i \leq k$ 。由定理 3.1 可知,  $i \leq k$  的扇区  $I_i$  的最大宽度上界由  $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$  ( $\mu < 1/3$ ) 所界定。当  $\delta$  为  $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$  时, 实际上可以找到伴有  $i \leq k$  的 SAO 的稳定的 MMO, 关于这一点有下面的定理 [31]。

定理 3.3 (具有特征  $1^i$  的稳定的 MMOs) 假设系统 (2.14) 满足定理 3.2 的假设条件 (A0)–(A3), 并还满足假设条件 (A5):

(A5) 当  $\delta = 0$  时, 全局回归点在奇异强鸭解  $\tilde{\gamma}_s$  上, 并且当  $\delta \neq 0$  时, 回归点会以一定的速度 (非零) 穿过奇异强鸭解  $\tilde{\gamma}_s$ 。

假设  $\delta = O(\varepsilon^{(1-\mu)/2}) > 0$ 。若充分小的  $\varepsilon$  满足  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $k \in N$ , 有  $2k+1 < \mu^{-1} < 2k+3$ , 则对于每一个  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , 存在子扇区  $\tilde{I}_i \subset I_i$ , 其宽度为  $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$ , 此宽度对应的距离区间为  $(\delta_i^-, \delta_i^+)$ , 如果  $\delta \in (\delta_i^-, \delta_i^+)$ , 则存在一个具有特征  $1^i$  的稳定的 MMOs。

定理 3.3 指出, 当  $\delta$  增加时 (假设  $\mu$  在这种参数变化中保持不变), 我们应该会观察到一系列特征  $1^i$  的稳定的 MMO, 相应的 SAOs 越多。在从特征  $1^i$  到特征  $1^{i+1}$  的 MMO 的转换中, 即在区间  $(\delta_i^-, \delta_i^+)$  和区间  $(\delta_{i+1}^-, \delta_{i+1}^+)$  之间的区域中, 我们期望发现更复杂的类型, 它们通常是特征  $1^i$  和特征  $1^{i+1}$  的混合。从几何上讲, 当将图 7 (a) 的流形图向上或向下移动时, 会筛选出不同的稳定的 MMOs; 由于一般  $\varepsilon$ -相关的系统的旋转扇区  $1^{k+1}$  的宽度比其他扇区大得多, 因此当参数  $\delta$  引起变化时, 应该期望通过对扇区  $I_i$  ( $i \leq k$ ) 的转换会非常快地。

如果  $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$ , 即假设条件 (A0) 不成立, 那么只要全局回归点落在漏斗区域内,  $\delta = O(1)$  时, 我们仍然期望会有特征  $1^{k+1}$  的稳定的 MMO 产生; 注意到,  $k = O(1/\varepsilon^{1/2})$ , 并且这种 MMO 的 SAOs 的振幅将再

次变小。如果  $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$  且  $\delta = O(\varepsilon^{1/2})$ ，则产生含有较大幅度 SAO 的混合 MMO 的可能性更大。例如，在第 4 部分中图 20 展示了在 Koper 模型中特征  $1^2 1^3$  型的 MMO。在这个 MMO，全局回归非常接近次最大鸭解  $\xi_2$ ，首先稍微向左（进入具有两个 SAOs 的旋转扇区  $I_2$ ），然后稍微向右（进入具有三个 SAO 的旋转扇区  $I_3$ ），就会得到这个特征的 MMO。

迄今为止所有的理论没有涵盖折结点附近的所有可能的动力学。如果高阶项包含在标准形式 (3.1) - (3.2) 式中，则当  $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$  或更小时，在折结点的  $O(\varepsilon^{1/2})$  邻域中可能出现平衡点。这一观察激发了我们对三维奇异 Hopf 分岔的研究。

### 3.2. 奇异 Hopf 分岔导致的 MMOs

慢-快系统 (2.1) 的平衡点总是满足  $f(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0$ ；一般地，它们位于某个区域中，该区域与临界流形  $S$  相关，是法向双曲的区域。然而，慢-快系统的一般单参数族中，平衡点可以跨越  $S$  的折。当这种情况发生时，在平衡点跨越折曲线处的折奇异点是慢-快系统的实际平衡点。在具有两个慢变量的广义向量场中，由此产生的折奇异点是折鞍点，该折鞍点正好存在于平衡点跨越折曲线处的特定参数值上，它被称为  $II$  型折鞍点。这与  $I$  型的折鞍点是有区别的， $I$  型的仅仅是指简化流形的鞍点分支，这就意味着它不涉及全系统的（真正）平衡点。这种区别是因为我们在折鞍点和折结点的例子中观察到简化系统的奇异点不必是全慢-快系统的平衡点的投影。然而， $II$  型折鞍点是整个系统的实际平衡点。重要的是这意味着，当  $\varepsilon > 0$  时，系统有一个奇异 Hopf 分岔，它一般发生在参数空间中距  $II$  型折鞍点分岔  $O(\varepsilon)$  处。

为了获得奇异 Hopf 分岔的标准型，根据折结点的标准型 (3.1) 式，并加入高阶项，从而获得 (3.5)：

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v - ax - by - cz \end{cases}$$

类似于系统 (3.1) 那样，对 (3.5) 式中的变量作如下变换：

$$x = \varepsilon^{1/2} \bar{x}, \quad y = \varepsilon \bar{y}, \quad z = \varepsilon^{1/2} \bar{z}, \quad t = \varepsilon^{1/2} \bar{t}$$

系统 (3.5) 变为如下形式：

$$(3.6) \quad \begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - x^2 \\ \bar{y}' = \bar{z} - \bar{x} \\ \bar{z}' = -v - \varepsilon^{1/2} a \bar{x} - \varepsilon \bar{b} \bar{y} - \varepsilon^{1/2} c \bar{z} \end{cases}$$

这个缩放的向量场提供了一个折奇异点邻域的  $O(\varepsilon^{1/2})$  的缩放，在这个邻域里期望会有 SAO 发生。缩放从第一个方程中去除了  $\varepsilon$ ，而第三个方程的系数  $a$ 、 $b$  和  $c$  变得与  $\varepsilon$  相关； $v$  保持不变。注意到当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时， $\bar{y}$  的系数趋向于 0 的速度比  $\bar{x}$  和  $\bar{z}$  的系数趋 0 的速度要快。这个特性使得慢速系统的标准型的定义有些问题：状态空间变量和奇异摄动参数  $\varepsilon$  的缩放相互影响。这些与  $\varepsilon$  相关的尺度在折点和折奇异点的“blow-up”分析中起着重要作用。

与折结点的标准型 (3.1) 式相反，系统 (3.6) 对于所有  $v$  值都具有平衡点。如果  $v = O(1)$ ，则这些平衡点远离原点，其坐标为  $O(\varepsilon^{1/2})$  量级或更大。由于要研究折奇异点附近的动力学，系统 (3.6) 中的  $\varepsilon$  相关项在这个参数域中几乎不起作用，该系统可以看成是折结点标准型 (3.4) 式的微摄动后得到的；因此，如果  $v = O(1)$ ，则定理 3.2 和 3.3 是适用的。另一方面，如果  $v = 0$  ( $\varepsilon^{1/2}$ ) 或更小，则存在一个平衡点位于相空间的  $O(1)$  区域内。这个平衡点是由系数  $a$  和  $c$  所决定，并且在折奇异点附近的局部动力学中起着重要作用 [87, 144]。特别地，对于  $v = O(\varepsilon)$  [87]，平衡点经历奇异 Hopf 分岔。因此，对于参数值  $v = O(\varepsilon^{1/2})$  或更小，系统 (3.6) 中第三个方程的高阶项是至关重要的。

因此, 经历奇异 Hopf 分岔的系统的最合适的标准型是什么? (几个组) 已经导出了系统 (3.5), 但是由于在缩放后  $\varepsilon$  具有较高的阶数, 所以使 (该项) 下降。然而, 该项出现在系统 (3.5) Hopf 分岔的第一 Lyapunov 系数  $\varepsilon$  中的最低阶项的公式中, 因此如果我们希望确定奇异 Hopf 分岔的完全展开 [87], 则该项必须保留。

发生在奇异 Hopf 分岔附近的 MMOs 具有与通过折结点机制生成的 MMOs 稍微不同的特性。Guckenheimer 和 Willms [95] 观察到亚临界 (普通) Hopf 分岔可能导致参数空间的一大片区域汇集到具有不稳定的复特征值的鞍平衡点的小邻域中。在轨线接近平衡点后, SAOs 的量级随着轨线螺旋离开平衡点而增加。类似的 MMOs 有可能穿过奇异 Hopf 分岔附近, 此时平衡点是一个鞍焦点, 吸引 Fenichel 流形上的轨线汇集进入靠近平衡点的一维稳定流形的区域, SAOs 随着轨迹螺旋离开平衡点 (鞍焦点) 而发生。我们在此回顾我们对奇异 Hopf 分岔和附近经过的 MMOs 的理解, 这仍然是不完整。

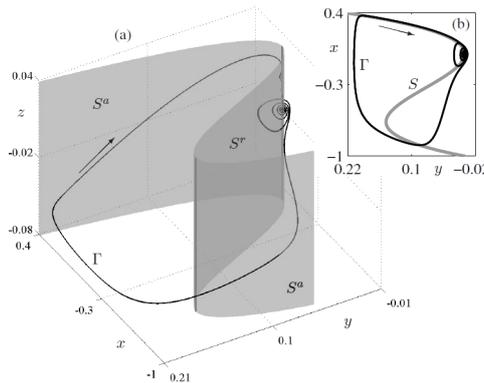


图 9: 参数为  $(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.0072168, -0.3872, -0.3251, 1.17, 0.01)$  的系统 (3.7) 的 MMO 周期轨线 (黑曲线) 的相图。临界流形  $S$  (灰色) 是在  $x = 0$  和  $x = -\frac{2}{3}$  处有折的  $S$  形表面。轨线由两个靠近  $S$  吸引分支的慢段和两个快段组成, 其中 SAOs 位于靠近平衡  $p$  的区域, 而  $S$  排斥分支  $S^r$  正好经过  $x = 0$  处的折。子图 (a) 显示了三维视图, 子图 (b) 是在  $(x, y)$  平面上的投影。

因为没有全局回归机制, 标准型 (3.5) 式不能产生 MMOs; 在该系统中, 轨线在有限时间内离开平衡点和折曲线流到无限大的区域。这种特性可以通过向使临界流形为  $S$  形的标准型中添加三次项来改变, 类似于 Van der Pol 方程:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 - x^3 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v - ax - by - cz \end{cases}$$

对奇异 Hopf 分岔的标准型的这种修改作为 MMO 的“简化”模型导出。如图 9 所示, 系统 (3.7) 在原点附近只引入一个小扰动, 但是  $S$  形临界流形创建了离开原点附近的轨线可能返回的可能性。图 9 展示了在具有参数  $v$  的系统 (3.7) 中 MMOs 总体结构的一个例子, 也就是说, 其中的参数

$$(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.0072168, -0.3872, -0.3251, 1.17, 0.01)$$

注意到  $v = O(\varepsilon)$ 。  $S$  形临界流形  $S$  是图 9(a) 中的灰色线; (b) 中展示的是图 9(a) 的顶视图。流形  $S$  具有两条折曲线, 一条在  $x = 0$  处, 一条在  $x = -\frac{2}{3}$  处, 它们将  $S$  分解为一个排斥分支和两个吸引片分支。对于我们的参数选择, 在排斥片分支上存在靠近原点的鞍焦点平衡点  $p$  (该原点是折结奇异点)。平衡点  $p$  具有一对不稳定共轭复特征值。图 9 中的黑色曲线是一个稳定的 MMO 周期轨线, 记为  $\Gamma$ , 它与平衡点  $p$  相互作用如下: 从  $x = 0$  处的折刚好经过, 即在原点附近且  $x < 0$  的区域, 轨线  $\Gamma$  沿着其二维不稳定流形从平衡点  $p$  螺旋形离开, 并反复与临界流形  $S$  的排斥分支  $S^r$  相交。当轨线  $\Gamma$  与排斥慢流形 (未示出) 相交时, 它便跳到  $x < -\frac{2}{3}$  的临界流形  $S$  的吸引分支  $S^a$  上。然后, 轨线  $\Gamma$  跟随这个分支到达  $x = -\frac{2}{3}$  的折处, 之后它跳到  $x > 0$  的临界流形  $S$  的排斥分支  $S^r$  处。然后, 轨线  $\Gamma$  返回到平衡点  $p$  附近, 并重复这个周期运动。

图 9 所示的 MMO 周期轨线  $\Gamma$  只是系统 (3.7) 中的多种复杂动力学类型之一。对于系统 (3.7) 超临界 Hopf 分岔产生的小振幅稳定周期轨道, 存在 (参数区)。这些周期轨线的后续分岔可能是倍周期分岔或

环面分岔[87]。倍周期(级联)会产生可能与混沌 MMOs 相关的小振幅混沌不变集。例如,图 10 显示了系统 (3.7) 在参数  $(\nu, a, b, c, \varepsilon) = (0.004564, -0.2317, 0.2053, 1.17, 0.01)$  时的混沌 MMO 轨线, (该轨线)是由奇异 Hopf 分岔产生的周期轨线的倍周期(级联)产生的。由于时间序列的非周期性,它看起来是混沌的,如图 10(a) 中的  $x$  坐标所示。在图 (b) 上显示了  $(x, y)$  平面上的二维投影。注意到这个轨线既不接近平衡点  $p$  也不接近原点的折奇异点。当  $\nu$  从图 10 中使用的值(其中  $\nu$  值已经是  $O(\varepsilon)$  量级)减小时,轨线的大振幅周期变得不那么频繁并且很快消失,导致小振幅混沌(吸引子)。在第 4 节讨论了系统 (3.7) 的一个重新缩放的子族,给出了复杂动力学的进一步例子以及与该系统相关的 MMOs 的组织方式的一些分析。

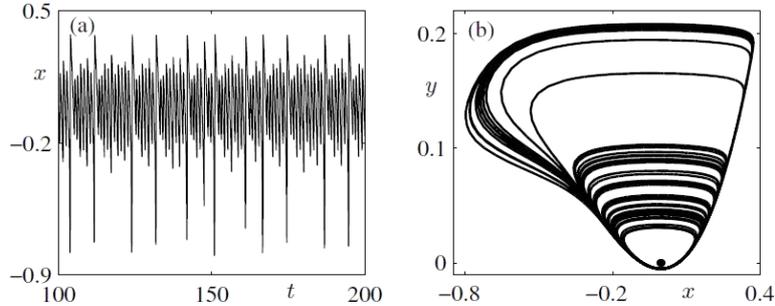


图 10: 参数为  $(\nu, a, b, c, \varepsilon) = (0.004564, -0.2317, 0.2053, 1.17, 0.01)$  的系统 (3.7) 的混沌 MMO 轨线图。子图 (a) 显示从  $t = 100$  到  $t = 200$  的轨线的  $x$  坐标的时间序列,子图 (b) 显示轨线在  $(x, y)$ -平面上的投影。

我们想描述一个 MMOs 的参数机制,这个 MMOs 的 SAOs 由于沿着鞍焦点  $p$  的不稳定流形  $W^u(p)$  螺旋运动而产生,并且是唯一的或者是其中的一部分。对这个问题的分析似乎比折结点的分析要复杂得多,而且是刚刚开始。我们提供了一些定位这些参数机制的见解。首先,我们将奇异 Hopf 分岔的标准型 (3.7) 式中的  $\nu$  作为主要的分岔参数,并寻找  $\nu$  的取值范围,在这个范围里可以找到 MMOs。如果  $\nu = \nu_H$  处的 Hopf 分岔是超临界的,那么对于足够接近 Hopf 分岔的参数,  $W^u(p)$  的极限集就是分岔稳定的周期轨线。由于一种新型的分岔,观察到 MMOs 的起始点在距离 Hopf 分岔  $\nu = O(\varepsilon)$  处发生[87]。这种新型的分岔发生在某个参数机制中,在该机制中  $p$  为鞍焦点且  $W^u(p)$  与二维排斥 Fenichel 流形  $S_\varepsilon^r$  相切。如果不仔细观察,人们可能认为动态系统中的两个不稳定对象不能相交。然而,回想一下,  $W^u(p)$  由当  $t \rightarrow -\infty$  时接近  $p$  的轨线组成,而  $S_\varepsilon^r$  由在慢时间尺度上保持  $O(1)$  量级时间慢速的前向轨线组成。因此,单轨线可能满足以上(两个情况)。图 11 展示了系统 (3.7) 在参数  $(\nu, a, b, c, \varepsilon) = (0.007057, 0.008870, -0.5045, 1.17, 0.01)$  时,  $W^u(p)$  和  $S_\varepsilon^r$  之间的切线的一个例子(注意到,  $\nu = O(\varepsilon)$ , 因此,  $\nu_H \approx -8.587 \times 10^{-5}$ )。其中展示了在  $W^u(p)$  (红色线)上从靠近  $p$  处开始并在截面  $\Sigma := \{y = 0.3\}$  处结束的轨线集合,以及在临界流形的排斥分岔上开始并在  $\Sigma$  上结束的  $S_\varepsilon^r$  上的轨迹的集合;有关计算这些流形所使用的方法的细节,请参阅第 8.1 节。图 11 (b) 展示了  $W^u(p)$  和  $S_\varepsilon^r$  与  $\Sigma$  相交的两条曲线的的切线。

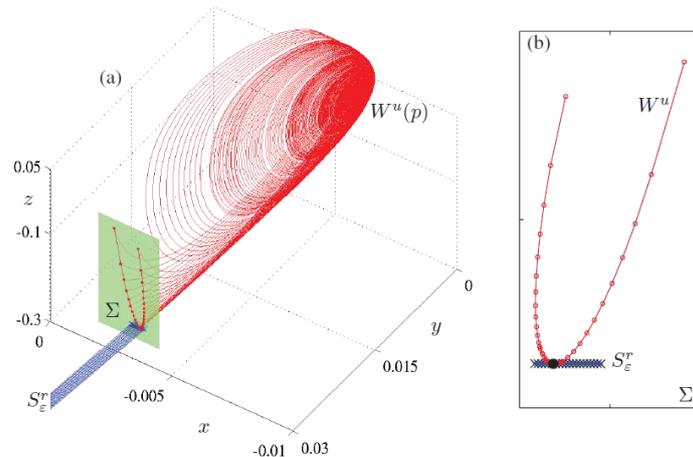


图 11: 平衡点的不稳定流形  $W^u(p)$  与参数为  $(\nu, a, b, c, \varepsilon) = (0.007057, 0.008870, -0.5045, 1.17, 0.01)$  的排斥慢流形  $S_\varepsilon^r$  之间的切面图。子图 (a) 显示了  $W^u(p)$  (红色) 和  $S_\varepsilon^r$  (蓝色) 的轨线,它们终止于由  $y = 0.3$  定义的绿色截面处。子图 (b) 中显示了  $W^u(p)$  (在被计算的轨线上的点标记为“o”) 和  $S_\varepsilon^r$  (在被计算的轨线上的点标记为“x”) 的交点。

一个 MMO 的周期轨线  $\Gamma$  沿着  $W^u(p)$  形成的 SAO 的数目取决于  $\Gamma$  与  $p$  的距离有多近, 以及  $p$  的复特征值的实部与虚部的比率。接近  $p$  的唯一方法是沿着其稳定流形  $W^s(p)$ , 所以如图 9 所示的 MMO 必须非常接近  $W^s(p)$ 。MMO 和  $W^s(p)$  之间的最小距离  $d$  类似于在折结点的情况下轨线距主强鸭解的距离  $\delta$ 。与折结点的情况不同, 在  $W^u(p)$  附近观测到的 SAO 的最大振幅与  $d$  基本无关。当  $d \rightarrow 0$  改变时, SAOs 的周期长度增加, 并且该周期从小到不能够检测到的振荡时就开始了。关于标准型 (3.7) 式的参数是如何影响  $d$  的相关研究很少, 但是在 Guckenheimer 的论文[87]中的图 8 说明了  $d$  以复杂的方式依赖于参数  $c$ 。已知存在一个参数区域, 在这个区域内 MMO 轨线的全局回归接近  $W^s(p)$ 。然而, 由于在超临界 Hopf 分岔附近没有立即发现 MMOs, 所以在 MMO 轨线上, 复特征值的实部与虚部的比值仍然 (被限制) 远离 0。这就防止出现极其其长的瞬时的振荡, 这些振荡像在次临界 Hopf 分岔附近发现的振荡一样任意缓慢地增长; 参见第 5 节以及 [89, 图 5]。

用于产生 SAOs 的奇异 Hopf 和折结点机制不是互斥的, 并且这两种机制可以存在于具有  $v = O(\varepsilon^{1/2})$  的过渡区域中的单个 MMO 中。所发现的具体行为部分取决于奇异 Hopf 分岔附近的平衡点  $p$  是具有一对复特征值的鞍焦点还是具有两个实特征值的鞍点。图 21 中展示的 MMO 包含一些 SAOs, 它们位于吸引和排斥慢流形之间的旋转扇区内, 并且一些 SAOs 位于鞍焦平衡点的不稳定流形上。另一方面, 我们注意到, SAOs 不能与只有实特征值的鞍平衡点相关联; 这种情况发生在参数区域  $v > (a + c)\varepsilon^{1/2}$  里 (按照前导顺序), 此时  $v = O(\varepsilon^{1/2})$ 。因此, 在这种情况下, SAOs 仅与  $v = O(1)$  (即,  $\mu = O(1)$ ) 的折结点类型机制相关联。Krupa 和 Wechselberger [144] 对过渡区  $v = O(\varepsilon^{1/2})$  进行了分析, 并指出如果全局回归机制投影到漏斗区, 则折结点理论可以推广到该参数区。

具有单个快变量的慢-快系统, 就像我们过去研究折结点和奇异 Hopf 分岔那样, 没有快速振荡。它们的快速子系统是一维的, 直线上向量场的轨线被约束为单调的。这就意味着这些系统中的 LAOs 总是张弛振荡, 这种振荡的轨线不沿着快速变量方向, 而通过临界流形。因此, 具有看起来不是张弛振荡的 LAOs 的 MMOs 的模型必须至少具有两个快速变量; 图 1 中展示的 BZ 反应的振荡就是这样的例子。下一节讨论具有三个时间尺度的系统。这样的系统可以看作一个或两个快速变量之间的中间变量, 并且它们确实具有  $L > 1$  的“简单”MMO 的特征。

### 3.3. 在三个时间尺度系统中的 MMOs

当奇异 Hopf 分岔的标准型 (3.5) 式和 (3.7) 式的系数  $v$ 、 $a$ 、 $b$  和  $c$  为  $O(\varepsilon)$  量级或更小时, 则  $z$  相对于  $y$  变化缓慢, 且系统实际上有三个时间尺度: 快、慢和超慢。Krupa、Popovic 和 Kopell [139] 用几何方法和在  $a = c = 0$  情形的渐近展开的方法来研究了该系统。他们观察到了 SAOs 的振幅相对较大的 MMOs。他们的分析是基于伸缩系统, 该系统具有两个快变量和一个慢变量。为了使三时间尺度结构显式化, 我们设置  $v = \varepsilon\hat{v}$ ,  $a = \varepsilon\hat{a}$ ,  $b = \varepsilon\hat{b}$  且  $c = \varepsilon\hat{c}$ 。将 3.2 节中的奇异 Hopf 标准型 (3.7) 式重新用  $x = \varepsilon^{1/2}\bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $z = \varepsilon^{1/2}\bar{z}$ ,  $t = \varepsilon^{1/2}\bar{t}$  缩放, 得到 (3.8) 式:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - \varepsilon^{1/2}x^3 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = \varepsilon(-\hat{v} - \varepsilon^{1/2}\hat{a}x - \varepsilon\hat{b}y - \varepsilon^{1/2}\hat{c}z) \end{cases}$$

系统 (3.8) 仍然是一个奇摄动系统, 但是现在有两个快变量  $x$  和  $y$  和一个慢变量  $z$ 。如果  $\hat{v} = O(\varepsilon^{1/2})$  或更小, 即  $v = O(\varepsilon^{3/2})$  或更小, 则平衡点位于原点附近的  $O(1)$  邻域内。如果该平衡点是鞍焦点类型的, 那么它在动力学中起着重要作用; 尤其是, 它经历  $\hat{v} = O(\varepsilon)$  的 Hopf 分岔, 即  $v = O(\varepsilon^2)$ 。

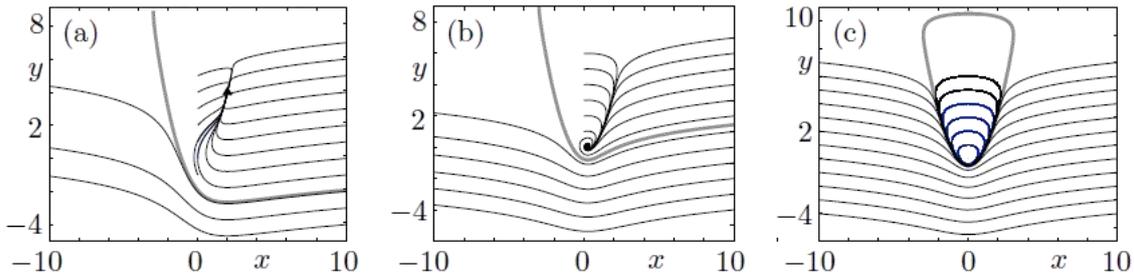


图 12: 系统 (3.9) 取三个不同的  $z$  值的相图。图中显示了几个轨线 (黑色) 和一个近似于分隔线的轨线 (灰色)。对于每个  $z$ , 在  $(x, y) = (z, z^2)$  处有一个平衡点  $p$ 。子图 (a) - (c) 分别表示  $z=2$ 、 $z=0.25$  和  $z=0$  的情况, 其中  $p$  是稳定结、稳定焦点和由连续周期轨线族包围的中心。这个轨线族的边界是最大鸭解。

我们首先考虑  $z$  作为参数的系统 (3.8) 的二维边界层问题。它通过系统 (3.9) 导出的, 如下:

$$(3.9) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

该系统与对平面鸭解问题分析中所得到的系统完全相同, 与系统 (2.7) 相比较, 只是参数  $\lambda$  被  $z$  代替。系统 (3.9) 对于每个  $z$  值都具有唯一的平衡点  $p$ , 且由  $(x, y) = (z, z^2)$  所确定。在图 12 中的 (a)、(b) 和 (c) 中分别展示了系统 (3.9) 在  $(x, y)$ -平面中取三个不同  $z$  值的时的相图, 即  $z = 2$ 、 $z = 0.25$  和  $z = 0$ 。对于  $z > 0$ , 平衡点  $p$  是  $(x, y)$ -平面上的吸引不动点; 在  $z > 1$  时, 它是结点, 在  $0 < z < 1$  时, 它是焦点; 注意到, 这个信息 ( $z$  的取值范围) 还决定了  $\hat{v} = O(\epsilon^{1/2})$  到 (前导阶) 的系统 (3.8) 的平衡点类型, 同样的参数也可以用来确定 3.2 节中鞍-焦平衡点的流域边界。平衡点  $p$  的流域边界是一条无界轨线, 该轨线在图 (a) 和 (b) 中是以灰色表示。当  $z = 0$  时, 向量场 (3.9) 具有时间反转对称性, 这导致存在周期轨线族。的确, 函数

$$H(x, y) = \exp(-2y) \left( y - x^2 + \frac{1}{2} \right)$$

是一个整体, 水平曲线  $H = 0$  是一条抛物线, 它把围绕  $p$  (原点) 的周期轨线与位于抛物线之下的无界轨线分开, 并且在有限时间内, 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时, 变成无界轨线。

当  $z$  保持较小的值且与  $x$  和  $y$  相比变化缓慢, 系统 (3.8) 可以看作系统 (3.9) 的摄动。在这种情况下,  $H$  的变化可以用来监测轨线的 SAOs。我们在 (未缩放的) 奇异 Hopf 标准型 (3.7) 中, 用 MMOs 的研究数值来证明这一点, 其中我们主要关注于在参考文献 [139] 中研究的  $a = c = 0$  的情况。而且我们固定  $b = -0.005$  和  $\epsilon = 0$ , 并改变参数  $v$  的值。然后我们得到  $\dot{z} = -v - by$ , 这个式子表明当  $y$  变大时,  $z$  会增加, 但是当系统产生 SAO 且  $y$  变小时,  $z$  会减小。的更准确地说, 我们希望在产生 SAOs 时,  $z$  的平均值会增加, 而在产生 LAOs 时,  $z$  的平均值会减少。 $z$  的变化应该足够大, 以驱动轨线穿过慢流形并引起 SAOs 和 LAOs 之间的转换。

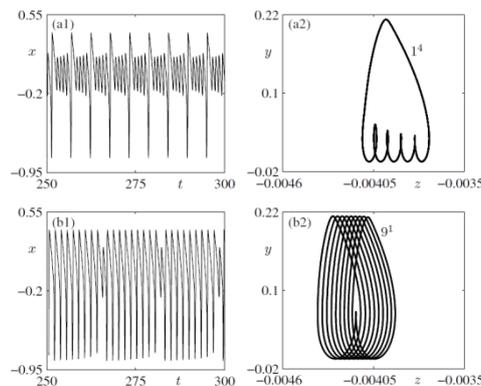


图 13: 参数为  $(a, b, c, \epsilon) = (0, -0.005, 0, 0.01)$  的系统 (3.7) 的稳定周期 MMOs 图。第一行 (a1) 是在  $v = 0.00015$  时,  $x$  为时间序列, 具有特征  $1^4$  的周期 MMO, 并将其投影到 (a2) 中的  $(z, y)$ -平面上; 类似的第二行 (b) 是  $v = 0.00032$  时的投影, 其中周期 MMO 具有特征  $9^4$ 。

图 13(a) 展示了一个周期性的具有特征 $l^4$ 的 MMO, 该振荡是在  $\nu = 0.00015$  时被发现的 (它是  $O(\varepsilon^2)$  量级的)。注意, 对于该参数的选择, 在平面  $y = 0.03$  上  $z = 0$ 。在子图 (a2) 上, 轨线在  $(z, y)$ -平面上的投影表明,  $z$  大约是从  $-0.003713$  下降到  $-0.004143$ , 而轨线产生了四个个 SAOs, 并且  $z$  在单个 LAO 期间增加了。注意到系统 (3.7) 还具有两个平衡点, 它们的  $z$ -坐标为  $\pm \sqrt{-y/(b\varepsilon)}$ , 在这种情况下它们的  $z$  坐标等于  $\pm \sqrt{3}$ 。然而, 子图(a2)中所示的 MMO 模式只局限于原点附近 (在  $z$  方向上), 所以这两个平衡点对动力学没有影响。

当  $\nu$  增加时, 在  $z = 0$  时的  $y$  值增加了, 并且轨线倾向于更快地通过 SAOs 区域。图 13 (b) 展示出了一个当  $\nu = 0.00032$  时而获得的周期性的特征 $l^9$ 的 MMO。这里的  $\nu$  值接近于取值范围的最大值, 在一个取值范围中的参数取值  $(a, b, c, \varepsilon) = (0, -0.005, 0, 0.01)$  时会有 MMOs 存在且  $z = 0$ ,  $y = 0.064$ 。正如子图(b2)中所展示的投影那样,  $z$  的平均值在每个 LAO 期间增加 ( $|z|$  减少), 但是在它越过阈值进入 SAOs 区域之前会产生 9 个 LAOs。另一方面, 单个 SAO 会将轨线带回 LAOs 的区域。

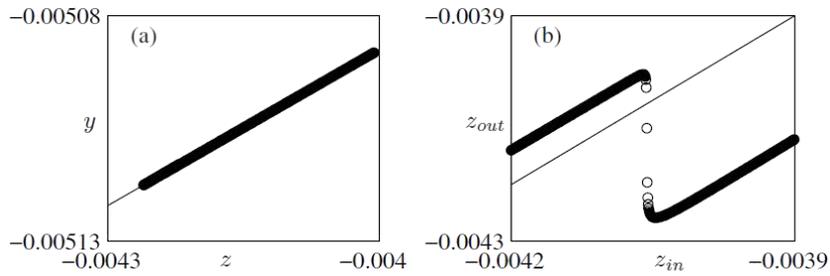


图 14: 将参数为  $(\nu, a, b, c, \varepsilon) = (0.0003, 0, -0.005, 0, 0.01)$  的系统 (3.7) 在区段  $x = 0$  的回归图。子图 (a) 显示返回几乎是一维的沿着一由  $y = 0.1153z - 0.004626$  近似给出的直线。在子图 (b) 中, 绘制了具有  $z \in [-0.0043, -0.004]$  的初始条件返回的  $z$ -坐标与其初始  $z$ -值的关系。

对于  $\nu \in (0.00015, 0.00032)$  的中间值, 系统显示具有各种特征的非周期性 MMOs 以及周期性 MMOs。这些特征可以通过到  $x = 0$  的截面的近似一维 (回归图) 来分析。返回到这个截面, 随着  $x$  的减小, 它会与一条薄带重合; 这种情况如图 14(a) 所示, 此时  $\nu = 0.0003$ , 系统应该会产生非周期性 MMOs。图 14(a) 中的薄带近似可由  $y = 0.1153z - 0.004626$  (此时  $x = 0$ ) 拟合。如果我们在  $z \in [-0.0043, -0.004]$  时, 在这条线上取 600 个初始条件, 则它们返回横截面的下一个值落就会到两个段上, 这两个段接近初始线并且  $z \in [-0.0043, -0.004]$ 。图 14(b) 描绘了这些返回, 显示了 600 个初始条件的回归中的  $z$  坐标  $z_{out}$  与其初始  $z$  坐标  $z_{in}$ ; 还显示了对角线  $z_{out} = z_{in}$ 。图 14(b) 表明, 线段附近的回归图可以通过 (秩一图) 来近似, 在这个秩一图中具有两个斜率接近于一的线段, 且被初始值  $z_{in} \approx -0.004055$  的陡峭段分开。回归图在该图的左“分岔”上  $z$  值会随之增加, 而在右分岔上  $z$  值会随之减少。这在上述的情况中, 因为较大的  $z$  值对应于 SAOs 产生, 而较小的值对应于 LAOs 产生。没有碰到图陡峭部分的轨线会在两个分岔之间来回重复。当  $\nu$  变化时, 回归图的“形状”在性质上保持相同: 两个分岔仍然具有接近于一的斜率, 但是它们与对角线的偏移不同。大约当  $\nu < 0.00013$  时, 代表 SAOs 的右分岔图像映射到自己, 而当  $\nu > 0.00034$  时, 左分岔图像映射到自己, 且系统只有大周期的且无 SAOs 的张弛振荡。在存在 MMOs 的  $\nu$  取值范围内, 一维映射 [41] 的捏合 (kneading) 理论可以应用于由数值生成的回归映射, 以预测 MMOs 的特征。

进一步深入了解  $z = z_m \approx -0.00405$  处的回归图的陡峭段来自于对吸引和排斥慢流形的交点处的计算。我们从在吸引分岔上的初始条件 ( $x < 23$ ) 计算正向轨线, 从临界流形的排斥分岔上的初始条件计算反向轨线, 直到它们与截面  $\{x = 0\}$  相交。因为轨线快速收敛到吸引慢流形和排斥慢流形, 它们与  $\{x = 0\}$  的交点给出了慢流形曲线与  $\{x = 0\}$  的交点的良好近似。这两条相交曲线的交点坐标大约是  $(y, z) = (0.0050941, 0.0040564)$ 。因此, 这一点位于产生图 14 (b) 所示的陡峭段的区域内。根据定义, 吸引和排斥慢流形的交集是最大的鸭解。在排斥流形一侧的截面  $\{x = 0\}$  的初始条件产生了 SAOs, 而另一侧的轨线产生快速跳转到吸引慢流形的另一侧 ( $x > 0$ )。因此, 我们已经从数值上证实了鸭轨线将图 14(b) 所示的回归图的两个分岔分开; 与图 7(a) 进行了比较, 图 7(a) 说明了在折结点附近计算的一维回归图有几个陡峭部分, 这些部分对应着主强鸭解和问题的最大次鸭解。

### 3.4. 动力学 Hopf 分岔的回旋机制产生的 MMOs

回顾 3.3 节, 系统 (3.8) 中的 SAOs 与 LAOs 之间的突然 (不连贯) 过渡是三时间尺度结构作用的结果, 这样的结构允许我们把系统看成具有两个快变量和仅有一个慢变量, 这种具有两个或更多个快变量的系统可能在边界层方程中具有 Hopf 分岔。现在我们考虑这种情况, 并假设边界层方程的一对复特征值沿着简化系统的轨线穿过虚轴。由于在快变量方向上的复特征值, 在慢流形周围的轨线会产生振荡。这种振荡的幅度最初会减小 (此时复特征值的实部是负的), 然后再次增加 (在实部变为正之后)。我们把情况称为 **动力学 Hopf 分岔** (dynamic Hopf bifurcation)。我们的主要目标是确定 MMOs 何时具有与动力学 Hopf 分岔相关联的 SAOs。注意到与具有单个快变量的系统不同, 这种类型的 SAO 既不与临界流形的折奇异性相关, 也不与  $\varepsilon > 0$  的系统的 (奇异) Hopf 分岔相关。

一个著名的动力学 Hopf 分岔的例子是时滞 Hopf 分岔现象。为了简单起见, 我们在这里讨论一个具有一个慢变量和两个快变量的系统, 这可能是最低维数的情况了。考虑一维临界流形  $S$  上边界层方程发生 Hopf 分岔的  $L$  段。这意味着边界层方程沿  $L$  的线性化具有一对横跨虚轴的复特征值  $\alpha \pm i\beta$ 。在超临界 Hopf 分岔的情形下, 由慢变量参数化的边界层方程吸引周期轨线的单参数族从点  $L_0 \in L$  开始产生, 其中  $\alpha = 0$ 。如果整个系统的轨线  $u(t)$  接近  $L$ , 该  $L$  段靠近距离  $L_0$  的距离为  $\delta = |L_u - L_0| = O(1)$  的点  $L_u \in L$ , 则  $u(t)$  将在慢时间尺度上以指数方式接近  $L$ 。边界层方程经历 Hopf 分岔, 但在分析系统中, 在 Hopf 分岔发生后,  $u(t)$  在  $O(1)$  距离上保持接近  $L$  [169]。发生这时滞 (delay) 是因为  $u(t)$  从  $L$  被排斥需要  $O(1)$  时间, 特别是  $u(t)$  不会立即跟从  $L_0$  开始产生的边界层方程的周期轨线。慢速分析确定了一个确定的“跳跃”点 (称为缓冲点 (buffer point)), 在该点  $u(t)$  离开  $L$  并接近周期性轨线, 如果  $u(t)$  没有更早地离开  $L$  并接近周期轨道。在时滞 Hopf 分岔中沿  $L$  有 SAOs, 但在  $L_0$  附近它们以指数方式变小, 且从  $L$  到周期轨线的跳跃可能在 SAOs 的单个周期内发生。因此, 时滞 Hopf 分岔附近的 SAOs 通常非常小, 以至于在实例中无法观察到。这种情况让我们联想到与  $\delta = O(1)$  折结点相关的 MMOs。更具体地说, 定理 3.2 预测了最大特征  $l^{k+1}$  MMO, 但是由于在  $S_\varepsilon^a$  上向主弱解  $\gamma_w$  强收缩, 实际上只观察到最后的旋转, 可以参见图 7 (b4)。

在许多示例中, 例如在第 6 和 7 节中的那些示例中, 实际上可以在动力学 Hopf 分岔附近观察具有 SAOs 的 MMOs, 该动力学 Hopf 分岔的振幅比较大, 易于被观察到。我们采用 Wallet 在参考文献 [235] 中使用的术语“回旋”来描述通过具有振荡的动力学 Hopf 分岔的轨线, 振荡的幅度保持在可观测阈值。我们讨论了一个慢变量和两个快变量的系统中回旋以及它是如何产生 MMOs 的。考虑动力学 Hopf 分岔的边界层方程线性化得到的模型系统 (3.10):

$$(3.10) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + zx \\ \dot{y} = x + zy \\ \dot{z} = \varepsilon \end{cases}$$

该方程在极坐标下是可分的, 对于平面  $\{z = 0\}$  中具有初始条件的轨线满足  $\dot{r} = \varepsilon r$ 。因此, 一般解是  $r(t) = r(0) \exp(\varepsilon t/2)$ , 这意味着解的振幅在  $z < 0$  时减小, 而在  $z > 0$  时增大。我们得出结论,  $r^{1/\varepsilon} / r(0) = \exp(1/2)$ , 并且振荡在  $1/\varepsilon$  的时间间隔内几乎具有恒定的振幅。如果轨线的  $r$ -坐标在  $z$  值为  $O(\varepsilon)$  时减小到  $r = 1$ , 则与动力学 Hopf 分岔相关的振荡的最小振幅仍可被观测到。这些振荡的振幅和  $\varepsilon$  与接近动力学 Hopf 点的距离的耦合表征了回旋状态并将其与时滞 Hopf 分岔区分开来。当  $\varepsilon$  在系统中固定时, 时滞 Hopf 点和回旋之间的区别变得模糊, 但是在许多例子中还是很清晰的。

系统 (3.10) 描述了 SAOs, 在边界层方程中发生动力学 Hopf 分岔的点附近具有非常明显的非零振幅。然而, 它不能解释 MMOs 中在产生 SAO 期间开端时和结束时的特征性突变, 例如第 6 和 7 节中的突变, 因为这些突变依赖于不属于系统 (3.10) 局部分析的机制。目前还没有全面研究确定由回旋产生的 SAOs 的突然开始和结束可能的几何机制。本文没有讨论这个问题, 而是重点研究了生成 MMOs 的 SAOs 的局部机制。尽管如此, 下面的示例说明了一种突然跳离回旋的 SAOs 的机制。考虑通过展开余维-2 的 Bogdanov-Takens 分岔 [90] 的“动力学”部分, 定义系统 (3.11)。

$$(3.11) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda + zy - x^2 - xy \\ \dot{z} = \varepsilon \end{cases}$$

如前面一样，我们把  $z$  看作是一个缓慢变化的参数。当  $\lambda > 0$  且  $\varepsilon = 0$  时，系统有两条平衡直线，由  $x = \pm\lambda$  和  $y = 0$  所定义。一个超临界 Hopf 分岔沿平衡线  $x > 0$  的部分出现。在该分岔中产生的周期轨线族终止于同宿轨线。而且  $(x, y)$  平面上总是存在一个有界区域，在该区域内围绕平衡点发生振荡，这就是回旋区域。边界层方程在  $x < 0$  时的(鞍)平衡线扰动到鞍型 Feniche 流形，在这个例子中它的稳定流形和不稳定流形引导入口和出口到回旋处。正如我们所见到的那样，振荡的数目及其最小振幅由初始条件和  $\varepsilon$  的大小决定。这在图 15 中用  $\lambda = 0.1$  的系统 (3.11) 的轨线和  $\varepsilon$  的不同值加以说明了，所有这些都从位于回旋区域之外的初始条件  $(x, y, z) = (-1, 0.8, -0.12)$  开始。注意到  $x$  和  $y$  是  $O(1)$  量级的，所以一个回旋产生的条件是  $|z|$  是  $\sqrt{\varepsilon}$  阶的。在图 15(a) 中，当  $\varepsilon = 0.006$  时，我们没有发现回旋的产生，但是观察到衰减很快、在一段时间内非常小的振荡，然后在轨线跳离之前再次快速增长。另一方面，在子图(b)中，当  $\varepsilon = 0.012$  时，振荡先衰减然后逐渐增大，并且它们始终保持可观测的大小。我们得出结论， $\varepsilon$  刚好足够大，足以描述一个回旋区域，在跳跃发生之前通过它可产生七个 SAOs。对于更大的  $\varepsilon$  值，相同的初始条件会产生几乎保持恒定振幅的振荡；这种情况可以参见图 15(c) 中，其中  $\varepsilon = 0.02$ 。注意到由于在边界层系统中通过 Hopf 分岔附近区域的较快的移动，所以我们现在在轨线跳开之前只发现三个 SAOs。

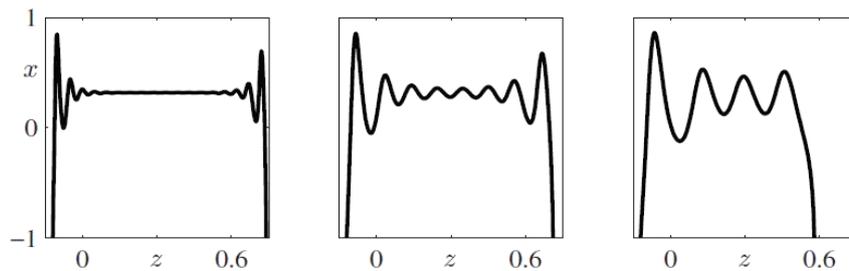


图 15: 具有初始点  $(x, y, z) = (-1, 0.8, -0.12)$  的系统 (3.11) 的轨线的  $x$ -坐标的时间序列。(a) - (c) 分别为当  $\lambda = 0.1$  时，对应  $\varepsilon = 0.006$ 、 $\varepsilon = 0.012$  和  $\varepsilon = 0.02$  的情况。

有趣的是，把与回旋相关的 SAOs 与那些发生在折结点附近或奇异 Hopf 分岔附近的 SAOs 相比较。这两种 SAOs 的第一个区别是，对于回旋来说，振荡周期是  $O(\varepsilon)$  (慢时间)，而对于其他两种情况，振荡周期是  $O(\varepsilon)$ 。其次，一个回旋的最小振幅和 SAOs 的数目是由奇异摄动参数和到时滞 Hopf 分岔点的全局回归距离决定。对于折结点，特征值的比值  $\mu$  和全局回归到强鸣解的距离  $\delta$  决定了 SAOs 的最小振幅和最小数目，而对于奇异 Hopf 分岔，SAO 的这些性质仅由全局回归到鞍焦平衡点的稳定流形的距离决定。最后，对于一个回旋来说，SAOs 的终止取决于全局机制或 SAOs 的振幅的某些（给定）定义的阈值。没有区分与折结点相关联的终止机制，但平衡点的不稳定流形与排斥慢流形的交点通常限制了奇异 Hopf 分岔附近的 SAOs 的振幅。

### 3.5. SAOs 局部机制概述

现在，我们总结一下本节关于产生 MMOs 的局部机制的主要结果。对于具有单个快变量的系统，支持产生 SAOs 的局部机制必须涉及两个时间尺度的混合。我们对在折结点和折鞍点附近产生 MMOs 的区域进行划分：

1. **折结点 (Folded Nodes)**：如果参数满足适当的量级条件 ( $v = O(1)$ )，使得整个系统的平衡点不在折结点附近，那么应用 3.1 节的理论，SAOs 是由于慢流形的扭曲而产生的。

2. **奇异 Hopf (Singular Hopf)**：正如 3.2 节所介绍的那样，在奇异 Hopf 分岔 ( $v = O(\varepsilon)$ ) 附近的动力学趋向于相当复杂状态。当轨线遵循鞍焦点的不稳定流形时，就会产生 SAOs。

3. 过渡区 (Transition regime) : 折结点区和奇异 Hopf 区被中间值为  $v = O(\varepsilon)$  的过渡区分开。参考文献 [144] 对折结点理论进行了推广, 可以发现在参考文献 [144] 中的参数  $\mu$  不仅表示特征值之比, 而且还可以用于描述爆破 (blown-up) 系统中平衡点到折结点的距离。在这种过渡区域中, SAOs 可以穿过折结点的旋转扇区, 也可以沿着鞍焦平衡点的不稳定流形螺旋离开。

在具有至少两个快变量的系统中, 回旋提供了生成 SAOs 的不同的局部机制。这里, 边界层方程具有复特征值, 且 SAOs 与系统的快速方向一致。目前, 把回旋作为 MMOs 生成机制的相关系统性研究较少, 理论上研究也不够完善。

最后, 具有三个时间尺度的三维系统可以展示本节所讨论的所有机制。换言之, 一个三时间尺度系统可以被认为具有两个慢变量, 在这种情况下, 可以找到折结点和奇异 Hopf 机制, 或者, 作为备选方案, 可以认为具有两个快变量, 这允许发生回旋。

下面的四个部分是说明的在不同的局部机制产生 MMOs 的案例研究:

◎在第 4 节中, Koper 模型是一个三维慢系统, 其中具有折结点和超临界奇异 Hopf 分岔。

◎在第 5 节中, 三维简化 Hodgkin-Huxley 模型也具有折结点, 但还具有亚临界奇异 Hopf 分岔。

◎在第 6 节中, peroxidase-oxidase 反应 (PO 反应) 的四维 Olsen 模型显示与回旋有关的 MMOs。

◎在第 7 节中, Showalter-Noyes-Bar-Eli 模型是一个展示 MMOs 的七维系统。组织产生这些 MMOs 的全局机制是未知的, 但我们在这里可以明确的是, MMOs 中的 SAOs 是由于一个回旋。

## 4. 在化学反应器中的 Koper 模型中的 MMOs

我们研究的第一个案例是由 Koper 引入的系统。我们用它来描述在特定的模型方程中, MMOs 是如何在折结点附近和 (超临界) 奇异 Hopf 分岔附近产生的。Koper 模型的方程是 (4.1) :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \dot{x} = ky - x^3 + 3x - \lambda \\ \dot{y} = x - 2y + z \\ \dot{z} = \varepsilon_2(y - z) \end{cases}$$

其中  $\lambda$  和  $k$  是参数。Koper 研究了化学反应中的伴有 MMOs 三维理想化模型。虽然这个例子是大家所熟悉, 我们重新审视它的分析, 并通过使用前面几节中概述的最新发展的理论来提升 (完善) 它。当  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  都较小时, 系统 (4.1) 具有三个时间尺度; 当只有  $\varepsilon_1$  较小时, 它是一个具有两个慢变量  $y$  与  $z$  和一个快变量  $x$  的慢系统。我们注意到 Boissonade 和 De Kepper [26] 首先研究了系统 (4.1) 的二维变体, 试图理解化学系统的双稳性和振荡。Koper 对三维扩展模型中的 MMOs 进行了首次分析, 他通过援引 Shil'nikov 同宿分岔的存在解释了 MMOs。

正如 3.2 节所述, Koper 模型系统 (4.1) 是奇异 Hopf 分岔的立方标准形 (3.7) 的缩放子族。为了验证这一点, 用  $(u, v, w)$  替换系统 (4.1) 中的  $(x, y, z)$ , 并考虑如下的仿射坐标变化:

$$x = \frac{u-1}{3}, \quad y = \frac{kv - \lambda + 2}{27}, \quad z = \frac{2v - w - 1}{3}$$

现在也用  $\frac{-k}{9}$  来收缩时间变量, 这里我们假设  $k < 0$ 。则系统 (4.1) 通过以下变换

$$\varepsilon = -\frac{k\varepsilon_1}{81}, \quad a = \frac{18}{k}, \quad b = \frac{81\varepsilon_2}{k^2}, \quad c = -\frac{9(\varepsilon_2 + 2)}{k}, \quad v = \frac{(3\varepsilon_2\lambda - 6\varepsilon_2 - 3k\varepsilon_2)}{k^2}$$

变为系统 (3.7)。注意到标准形式的系数满足下式:

$$2b - ac + a^2 = 0$$

这就意味着 Koper 模型系统 (4.1) 仅仅等价于奇异 Hopf 标准形式系统 (3.7) 的一个子族。然而系统 (4.1) 在一个确定的参数区间任然存在折结点和奇异 Hopf 分岔。

我们首次分析了由折结点组织产生 SAOs 的参数区间。为此, 我们研究了系统 (4.1) 及其等价系统 (4.2):

$$(4.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \dot{x} = y - x^3 + 3x \\ \dot{y} = kx - 2(y + \lambda) + z \\ \dot{z} = \varepsilon_2(\lambda + y - z) \end{cases}$$

而且我们可以确定 (4.2) 是对称 Koper 模型, 因为它具有以下对称关系:

$$(4.3) \quad (x, y, z, \lambda, k, \tau) \rightarrow (-x, -y, -z, -\lambda, k, \tau)$$

系统 (4.2) 是通过把系统 (4.1) 中的变量  $(x, y, z)$  用  $(u, v, w)$  替换而得到的, 并且利用坐标变换  $x = u$ ,  $y = kv - \lambda$  和  $z = kw$ 。我们把我们的分析重点放在  $\varepsilon_2 = 1$  的情况上, 并且把系统 (4.2) 考虑为具有两个慢变量的系统。观察 (4.2) 的临界流形:

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid y = x^3 - 3x =: c(x)\}$$

$S$  不依赖  $k$  和  $\lambda$ 。这个立方形的临界流形  $S$  拥有两个折曲线  $F_{\pm} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = \pm 1, y = \mp 2\}$ , 可以作如下分解:

$$S = S^{a,-} \cup F_- \cup S^r \cup F_+ \cup S^{a,+}$$

其中  $S^{a,-} = S \cap \{x < -1\}$ ,  $S^r = S \cap \{-1 < x < 1\}$ , 且  $S^{a,+} = S \cap \{1 < x\}$  是法向双曲的。注意  $S^{a,\pm}$  是吸引的,  $S^r$  是排斥的。为了能在  $S$  上导出奇异化慢流, 我们考虑代数等式  $0 = y - c(x)$ , 该等式是通过令系统 (4.2) 中的  $\varepsilon_1 = 0$  而获得的, 并且它可以关于  $\tau$  进行隐式微分。则通过对时间伸缩  $\tau \mapsto \tau(3x^2 - 3)$  得到:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = kx - 2(c(x) + \lambda) + z \\ \dot{z} = (3x^2 - 3)(\lambda + c(x) - z) \end{cases}$$

反奇异化使  $S$  排斥分支  $S^r$  上的时间方向相反。我们发现折奇异点作为系统 (4.4) 的平衡点位于折线  $F_{\pm}$  上。在  $F_+$  上的唯一平衡点是  $(x, z) = (-1, 2\lambda + 4 + k)$ , 且  $y = 2$ 。相关的雅可比矩阵如下

$$(4.5) \quad A_{\pm} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 6(2 + k \mp \lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

通过根据折奇异点的类型和稳定性对折奇异点进行分类, 我们得到一个“奇异”的分岔图, 然后使用第 3 节的结果来 (判别) 识别可能的 MMO 区域。

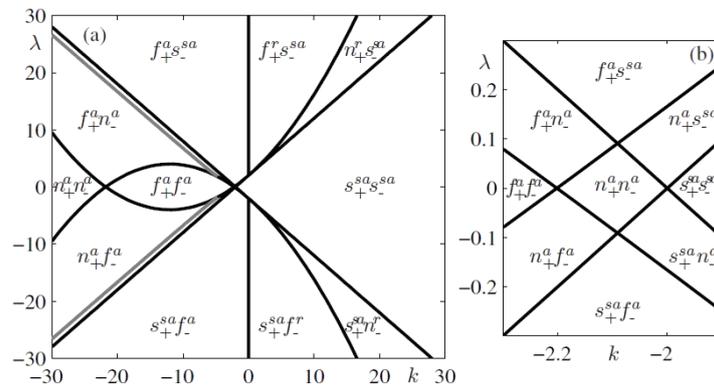


图 16: 非奇异慢流 (4.4) 在  $(k, \lambda)$ -平面上的“奇异”分岔图, 其中显示了 II 型折鞍结点 (直线), 从折结点到折焦点 (抛物线) 的过渡, 以及表示从折结点返回的辅助轨线的  $\delta=0$  的曲线 (灰色曲线, 从数值上获得的), 在 (b) 中未示出。(a) 给出了全局视图, (b) 是两条抛物线右交点附近区域的放大图。每个参数区域中的折平衡点类型如下:  $f$  = 折焦点、 $n$  = 折结点和  $s$  = 折鞍点。下标表示平衡点是否在  $F_+$  或  $F_-$  上, 上标  $a$ 、 $r$  或  $sa$  分别表示吸引子、排斥子和鞍点。

图 16 展示了  $(k, \lambda)$ -空间中的这个奇异分岔图, 其中我们使用记号  $e_{\pm}^h$  来表示折奇异点的类型  $e$  和稳定性  $h$ ; 对于焦点、结点或鞍点,  $e$  是用  $f$ 、 $n$  或  $s$  对应替换, 对于吸引子、排斥子或鞍点,  $h$  是用  $a$ 、 $r$  或  $sa$  对

应替换。不同的参数区域由三种类型的曲线划分。当  $\det(A_{\pm}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm(k+2)$  时, 会产生 II 型折鞍结点。特征值沿抛物线  $\text{tr}(A_{\pm})^2 - 4\det(A_{\pm}) = k^2 + 24(k \mp \lambda) + 48 = 0$  由实共轭变为复共轭。垂线  $\text{tr}(A_{\pm}) = k = 0$  是复特征值的实部变化符号的轨迹。子图 (b) 是对  $(k, \lambda) = (-2, 0)$  的周边区域中的扩大。

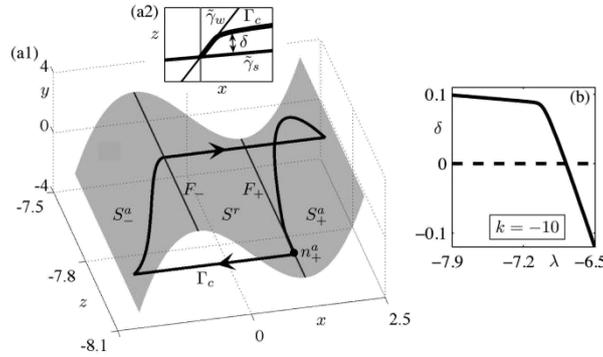


图 17: 具有参数  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \lambda, k) = (0.1, -7, -10)$  的系统 (4.2) 折结点  $n_+^a$  的辅助周期轨线  $\Gamma_c$  在距强奇异解  $\tilde{\gamma}_s^a$  的距离  $\delta$  处返回。(a1) 显示所有  $\Gamma_c$ , (a2) 显示了在  $n_+^a$  附近的放大, 以说明  $\delta$  的定义。(b) 显示  $\delta$  作为  $\lambda$  的函数, 所有其他参数固定。距离  $\delta$  仅当  $\delta > 0$  时有意义,  $\lambda$  值大于当  $\lambda = 8$  时 II 类折鞍结点处的  $\delta$  值有意义。

只要全局回归机制将轨线带回相关联的漏斗区域, MMOs 可能会存在于系统 (4.2) 具有折结点的区域中。回顾 3.1 节中关于辅助周期轨线  $\Gamma_c$  的构造, 该辅助周期轨线  $\Gamma_c$  由  $S^a$  上终止于折结点的段组成, 随后是边界层问题的快纤维和全局回归机制。图 17(a1) 说明了通过  $n_+^a$  的辅助周期轨线的这种结构, 其中我们令  $k = 10$ ,  $\lambda = 7$ ; 这是图 8 所示的计算示例。从  $n_+^a$  开始, 辅助周期轨线  $\Gamma_c$  跳跃到  $S_-^a$ , 其后跟着一个慢段, 直到  $\Gamma_c$  到达  $F$ 。在另一部分跳过  $\Gamma_c$  返回到奇异漏斗内后, 如图 17(a2) 所示, 我们测量周期轨线  $\Gamma_c$  到强奇异解  $\tilde{\gamma}_s^a$  的距离  $\delta$ , 这个距离  $\delta$  大小取决于参数, 例如, 在图 17(b) 中  $\delta$  随  $\lambda$  的函数而变化, 其中  $k = -10$  是固定的。注意,  $\delta < 0$  意味着  $\Gamma_c$  不再返回到奇异漏斗; 只要  $\delta > 0$ , 辅助周期轨线  $\Gamma_c$  就会产生  $\epsilon_1 > 0$  的周期性 MMOs。因此, 在  $(k, s)$ -平面中的曲线沿  $\delta = 0$  标志着 MMO 的开始。图 16(a) 展示  $\delta = 0$  的轨线为灰色曲线, 其对称图像对应于  $n_-^a$  的辅助周期轨线。两个(对称)参数区域由 II 型折鞍结点的线所界定的, 其中  $S_{\pm}^a$  变成  $n_{\pm}^a$ , 且当  $\delta = 0$  时的曲线所在的区域是预测 MMO 存在的区域; 注意, 曲线  $\delta = 0$  一直延伸到 II 型折鞍结点, 这种情况未在图 16(b) 中显示。

Koper 使用延拓方法证实了当  $\epsilon > 0$  时的“复杂且混合模式振荡”的参数区域; 参见参考文献 [123] 第 75 页的图 1。我们可以把他的结果解释为我们在图 16(a) 的奇异分岔图中识别(判别)的 MMO 机制的扰动情况。为此, 我们考虑当  $\epsilon > 0$  时的系统 (4.2) 平衡点的分岔; 关于这一点已经由 Koper [123] 针对系统 (4.1) 进行了分析。图 18 显示了当  $\epsilon_1 = 0.01$  时在  $(k, \lambda)$ -平面中的分岔图, 其中鞍结点曲线(绿色)被标记为  $SN$ , Hopf 曲线(蓝色)被标记为  $H$ 。包括 II 类折鞍结点曲线(虚线, 红色)被标记为  $FNSN_{II}$ ; 曲线  $FNSN_{II}$  对于整个系统当  $\epsilon_1 > 0$  且足够小时, 已经预测到“十字形”分岔图。事实上, 这种分岔结构在  $\epsilon_1$  的较宽范围内仍然存在。我们发现如下的鞍结点和 Hopf 分岔曲线。系统 (4.2) 在快时间尺度上的雅可比矩阵  $A$  具有特征多项式  $\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0$ , 且它的系数为:

$$c_2 = 3(\epsilon_1 + x^2 - 1), \quad c_1 = \epsilon_1(\epsilon_1 + 9x^2 - k - 9), \quad c_0 = \epsilon_1^2(3x^2 - 3 - k)$$

其中  $x$  对应于一个平衡点, 即  $x$  满足  $x^3 - (k+3)x + \lambda = 0$ 。因此一个折结点分岔沿着如下曲线而产生:

$$c_0 = -\det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\left(1 + \frac{k}{3}\right)^{3/2}$$

该曲线在  $k = -3$  处有歧点且不依赖于  $\epsilon_1$ ; 在图 18 中该歧点被标记为  $C$ 。在  $c_0 - c_1c_2 = 0$  ( $c_1 > 0$ ) 时发生 Hopf 分岔, 对于一阶的  $\epsilon_1$ , 我们发现

$$\lambda = \pm \left(2 + k - \frac{1}{3}k\epsilon_1 + O(\epsilon_1^2)\right)$$

这就表明 Hopf 分岔曲线  $H$  与  $II$  类折鞍结点曲线之间存在  $O(\varepsilon_1)$  距离，这正是我们所期望的。当  $k = -\frac{1}{2} \varepsilon_1$  时，鞍结点和 Hopf 分岔曲线在两个 Bogdanov-Takens 点（标记为  $BT$ ）处重合。当  $\varepsilon_1 > 0$  时的 MMO 区域位于  $k < 0$  的区域，并且沿着一条接近  $H$  的曲线对  $\lambda$  有一个下界。对固定  $k = -10$ ，我们对此进行更详细的讨论。注意，从现在起，我们使用原始方程 (4.1)，但是这并不改变图 16 和 18 中的  $(k, \lambda)$ -平面的分岔图。

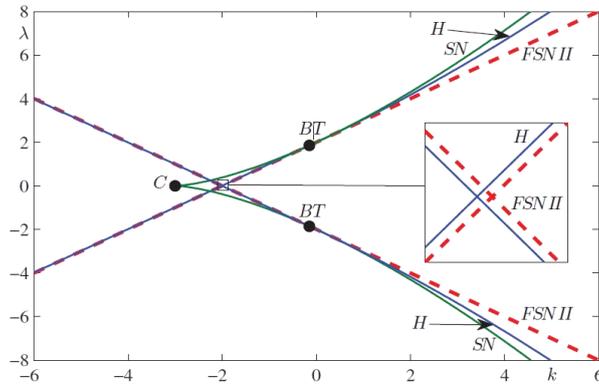


图 18: 当  $\varepsilon_1 = 0.01$  时的全系统 (4.2) 平衡点的分岔图。图中显示了鞍结点分支 (绿色, 标记为  $SN$ ) 和 Hopf 分岔 (蓝色, 标记为  $H$ )。鞍结点的分岔曲线有一个尖点 (标记为  $C$ ), 并且与 Hopf 分岔相交的两个 Bogdanov-Takens 点 (标记为  $BT$ ) 中满足 Hopf 分岔曲线。虚线是发生在奇异极限 (4.4) 中的  $II$  型折叠鞍结点 (红色, 标记为  $FSN II$ )。

Koper[123] 计算了以  $\lambda > 0$  为自由参数的, 并固定  $k = -10$ 、 $\varepsilon_1 = 0.1$  的数值分岔图, 得到了 MMO 周期轨线的孤立闭曲线。我们使用与 Koper 相同的系统 (4.1) 计算更详细的分岔图, 其中我们集中在 (对称相关)  $\lambda < 0$  区域, 并令  $\varepsilon_1 = 0.01$  和  $\varepsilon_1 = 0.1$ 。结果如图 19 所示, 其中 (a) 行为  $\varepsilon_1 = 0.1$  时的情况, (b) 行为  $\varepsilon_1 = 0.01$  时的情况。子图 (a1) 和 (b1) 中的垂直轴是周期轨线的周期  $T$ , 而子图 (a2) 和 (b2) 中的垂直轴是  $x$  坐标的最大绝对值。Hopf 分岔  $H$  产生稳定的周期轨线族, 但在倍周期分岔  $PD$  中会很快失去稳定性。我们引入符号并标记这个族为  $1^0$ ; 倍周期族被标记为  $2^0$ , 并且注意, 它在  $(\lambda, T)$  投影中显示为断开 (不连续) 的曲线, 因为它在点  $PD$  具有两倍的周期。在第二个倍周期分岔中,  $1^0$  轨线再次变得稳定, 紧接着是使其不稳定的折 (未标记), 直到第二个折叠  $SL$ , 此后。张弛振荡持续。MMOs 驻留在等值线上, 该等值线大致存在于两个倍周期分岔之间的  $\lambda$  范围内。我们用交替的浅蓝色和深蓝色用于突出显示这些线族; 我们发现具有  $1^s$  特征的 MMOs, 其中  $s$  从 2 到 14, 如图 19 所示。

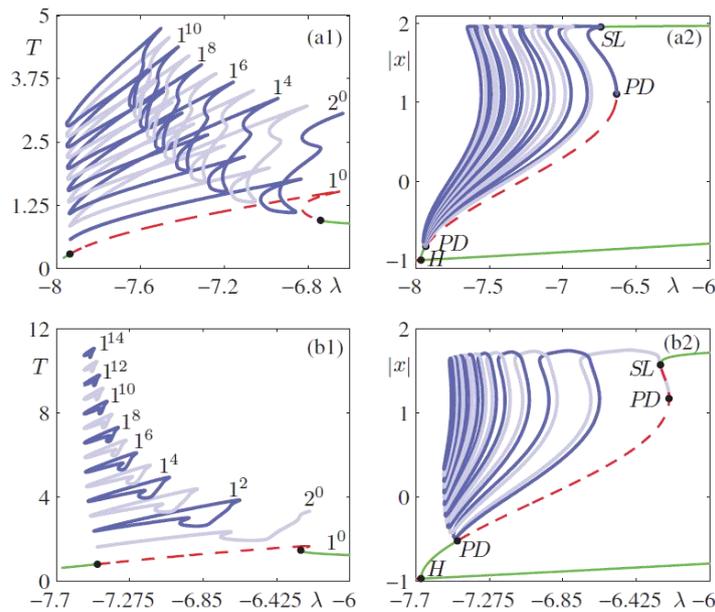


图 19: 参数  $(\varepsilon_1, k) = (1, -10)$  的系统 (4.1) 的 Koper 模型的分支图。(a1) 和 (a2) 表示当  $\varepsilon_1 = 0.01$  时的情况, (b1) 和 (b2) 表示 Koper 取  $\varepsilon_1 = 0.1$  时的情况。(a1) 和 (b1) 以周期  $T$  为变量而绘制的, (a2) 和 (b2) 是  $|x|$  对  $\lambda$  的最大值。周期轨线的一个分支 (带特征  $1^0$  的“MMO”) 来自 Hopf 分支  $H$  处, 并与具有不同特征的孤立 MMOs 共存。

图 19 中等值线上的 MMOs 是由折结点机制生成的；关于这种等值线上的 MMOs 的更详细讨论，请参阅第 5 节。这里，我们关注这样一个事实，即一旦辅助周期轨线返回接近最大鸭解，就可以找到具有更复杂模式的 MMOs。图 20 显示了当  $\lambda = -7$  时存在稳定的 MMO 周期轨线，这里我们令  $\varepsilon_1 = 0.1$ 。子图 (a) 显示了  $x$  坐标的时间序列，在该图中把其中的 MMO 的特征记为  $1^2 1^3$ ；在子图 (b) 中显示了对  $(z, y)$ -平面的投影。我们分别计算了吸引和排斥慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$ 。图 20 (c) 显示了它们以及三个最大的次要鸭轨线  $\xi_2$ 、 $\xi_3$  和  $\xi_4$ ，它们也绘制在子图 (b) 中。该图显示了两个 LAOs 是如何漏斗到折结点区域，实际上是在  $S_{\varepsilon_1}^a$  上，并且非常接近  $\xi_2$ 。图 20 (b) 说明它们实际上在  $\xi_2$  的“两侧”被  $S_{\varepsilon_1}^r$  分开，这意味着其中一个 LAOs 后面的 SAOs 数量是 2，而另一个是 3，如  $\xi_3$  所指示的。参见图 7 (a)，回归图的一维近似将具有与轨线相对应的分岔，当 SAOs 通过折结点时，这些分岔使 SAOs 的数量不断增加，并且图 20 (c) 中所示的轨线返回了相应于两个和三个 SAOs 的分岔之间的交替。

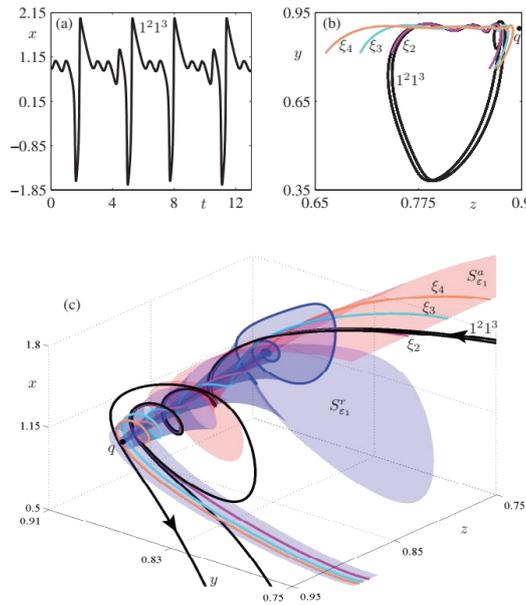


图 20: 由参数为  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.1, 1, -7, -10)$  的系统 (4.1) 的折结点奇异性产生的具有特征  $1^2 1^3$  (黑色) 的 MMO 周期轨线。(a) 显示  $x$ -坐标的时间序列。(b) 描绘了周期轨线在  $(z, y)$ -平面上的投影，以及附近的鸭轨线  $\xi_2$ 、 $\xi_3$  和  $\xi_4$ 。(c) 分别显示了相空间中的这些对象以及吸引和排斥慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  (红色) 和  $S_{\varepsilon_1}^r$  (蓝色)。

我们观察到，三个 SAOs 中的最后一个具有明显的更大的振幅，图 20 表明这是由于该振荡是在鸭解之后，然后跳回到  $S_{\varepsilon_1}^a$ 。然而，在附近也有一个平衡点  $q$ 。当  $k = -10$  奇异 Hopf 分岔在  $\lambda = \lambda_H \approx -7.76$  时产生。我们发现图 20 中的折结点为  $(x, y, z) = (1, [\lambda - 2]/k, [2\lambda - 4 - k]/k) = (1, 0.9, 0.8)$  且在其附近的平衡点  $q$  为  $(x, y, z) = (x_q, x_q, x_q)$ ，其中  $x_q \approx 0.897$  是  $x^3 - (k + 3)x + \lambda$  的根。

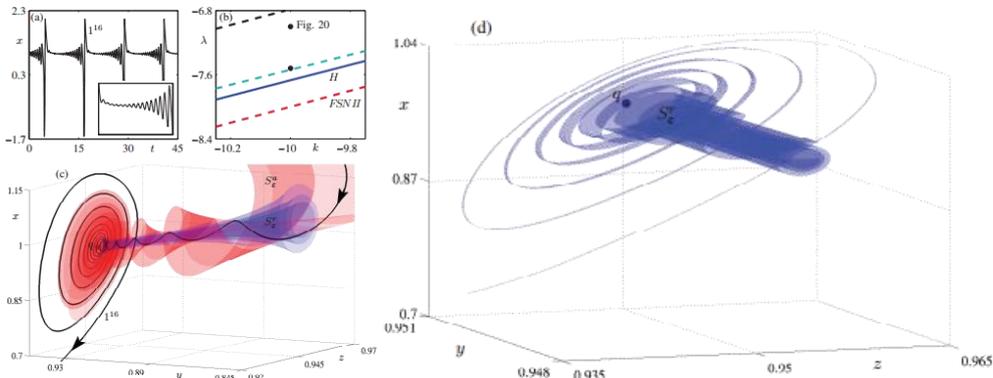


图 21: 参数为  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.1, 1, -7.52, -10)$  的系统 (4.1) 的奇异 Hopf 分岔附近的 MMO 周期轨线。(a) 显示  $x$ -坐标的时间序列。(b) 中的分岔图说明了参数与  $W^u(q)$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  (虚青色) 之间的切分岔有多接近；还显示了 Hopf  $H$  (实青色)、 $II$  型折鞍结曲线  $FSN II$  (虚红) 和曲线  $\delta = 0$  (虚黑)；参见图 16。(c) 所示的慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  将 MMO 引导到平衡  $q \approx (0.951, 0.951, 0.951)$  之后， $W^u(q)$  组织产生 SAOs。在 (d) 中突出显示了  $W^u(q)$  附近  $S_{\varepsilon_1}^r$  的高压缩和扭转。

我们发现，如果我们将  $\lambda$  减小到接近  $\lambda_H$  的值，则奇异 Hopf 分岔产生明显的 SAOs；注意，我们必须保持  $\lambda$  值大于能使  $q$  的不稳定流形  $W^u(q)$  和排斥慢流形  $S_{\varepsilon_1}^r$  之间存在切线时对应的  $\lambda$  值；另见第 3.2 节。图 21 显示了当  $\lambda = -7.52$  的系统 (4.1) 的 MMO 周期轨线。 $x$ -坐标的时间序列显示了与图 20(a) 中的 SAOs 完全不同的 SAOs。图 21(b) 显示了  $(k, \lambda)$ -平面中的放大的分岔图，图 20 和 21 的两个 MMOs 的参数位置由  $k=10$  的两个黑点表示。Hopf 曲线（实心蓝色）和 II 型折鞍结曲线（虚红）分别标记为  $H$  和  $FSN II$ 。MMO 区域由曲线  $\delta = 0$ （虚黑）和  $W^u(q)$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$ （虚青）之间的切线界定；在 Hopf 分岔和这个切线分岔之间，周期轨线具有较小的振幅，并且向 MMOs 的转变发生在远离 Hopf 曲线的  $O(2)$  处。图 21(b) 中有两个点：标记的点位于 MMO 区域内部，并且与图 20 中所示的情况相对应；第二个（未标记的）点非常接近切线曲线，并且与图 21 的其他子图中所示的情况相对应。图 21(c) 从几何角度地显示了 SAOs 是如何组织产生的。红色线和蓝色线分别是吸引和排斥慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$ 。在产生 SAOs 时期，MMO 的周期轨线几乎位于  $S_{\varepsilon_1}^a$  上，它不能通过  $S_{\varepsilon_1}^r$ ， $S_{\varepsilon_1}^r$  扭曲得很紧，并且迫使 SAOs 的振幅减小；SAOs 的第一部分仍然让人想起通过位于折结点  $(1, [\lambda - 2]/k, [2\lambda - 4 - k]/k) = (1, 0.952, 0.904)$  的过程，且它们的振幅随  $\varepsilon_1$  而减小。由于  $S_{\varepsilon_1}^a$  绕  $q$  的一维稳定流形螺旋，MMO 周期轨线非常接近  $q = (x_q, x_q, x_q)$ ，其中  $x_q \approx 0.951$ 。接下来的 SAOs 是由  $W^u(q)$  组织产生的，其振幅在 LAO 产生之前增加到相对较大的值。

总而言之，如果我们固定图 21(b) 中的  $k$ ，并使  $\lambda$  增加，我们观察到在平衡点  $q$  的奇异 Hopf 分岔附近的下列典型事件序列。对于足够小的  $\lambda$ ，没有 MMOs 产生，并且吸引子是平衡点。这个平衡点在  $FSN II$  处穿过临界流形的折，但是它保持稳定，直到在距离  $O(\varepsilon_1)$  处的超临界（奇异）Hopf 分岔引起小振荡。向 MMOs 的过渡发生在  $W^u(q)$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  之间的切线之后；对于刚刚超过这个切线的  $\lambda$  值，MMOs 有许多 SAOs，它们都位于  $W^u(q)$  附近。随着  $\lambda$  的进一步增加，MMOs 显示出由折结点组织产生的 SAOs。最后，曲线  $\delta = 0$  的交叉对应于向张弛振荡的过渡。

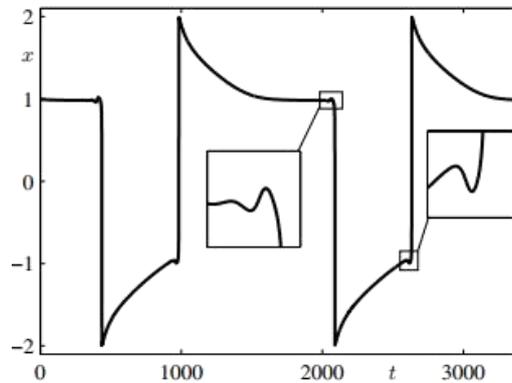


图 22：参数为  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.01, 1, -0.63, -2.1)$  的系统 (4.1) 的 MMO 周期轨线，在 LAO 的最大值和最小值附近的 SAOs。

为了结束这个案例研究，我们报告了 Koper 未发现的不同类型的 MMO 的存在；如图 22 所示。MMO 在 LAO 的最大值和最小值附近都有 SAOs。因此，该 MMO 经过在两个折曲线上靠近折结点  $na \pm$  附近。发生这种情况的参数区域非常小，因此很难使用模拟来定位这样的 MMO；图 16 中靠近  $k=-2$  的区域只能在放大的子图 (b) 中看到。我们在图 22 中当选择参数  $k = -2.1$ 、 $\lambda = 0.063$ 、 $\varepsilon_1 = 0.01$ （相当小）时，发现了 MMO 的周期轨线；对于存在具有两个 SAO 时期的 MMO 的参数范围，更详细的研究还有待于进一步的工作。

## 5. 简化 Hodgkin–Huxley 系统中的 MMOs

作为下一个案例研究，我们考虑著名的 Hodgkin–Huxley 方程的三维简化形式，该方程描述了鱿鱼巨轴突中动作电位的产生；参见 [118, 198] 和 [45] 中的推导，在这这参考文献中使用了相同的示例。该简化模型仅描述电压 ( $V$ )、钾通道 ( $n$ ) 的激活和钠通道 ( $h$ ) 的失活，钠通道 ( $m$ ) 的激活非常迅速，并且几乎瞬间达

到平衡状态  $m = m_\infty(V)$ ，这可以通过简化的中心流形[198]进行数学证明。钾通道( $n$ )和钠通道( $h$ )门的演化被认为是缓慢的，而电压 $V$ 的演化被认为是快速的。为了证明这种时间尺度分离，我们通过引入无量纲电压变量  $v = V/k_v$  和无量纲时间  $\tau = t/k_t$  来无量纲化 Hodgkin–Huxley 方程，其中  $k_v = 10 mV$  是参考电压尺度， $k_t = 1ms$  是快参考时间尺度；这就给出了系统(5.1)

$$(5.1) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{v} = f(v, h, n) := \bar{I} - m_\infty^3(v)h(v - \bar{E}_{Na}) - \bar{g}_k n^4(v - \bar{E}_K) - \bar{g}_l(v - \bar{E}_L) \\ \dot{h} = g(v, h) := \frac{k_t}{\tau_h} \frac{(h_\infty(v) - h)}{t_h(v)} \\ \dot{n} = g_2(v, n) := \frac{k_t}{\tau_n} \frac{(n_\infty(v) - n)}{t_n(v)} \end{cases}$$

表 1 Hodgkin–Huxley 等式 (5.1) 的初始参数值

$g_{Na}$	$g_k$	$g_l$	$E_{Na}$	$E_K$	$E_L$	$\tau_h$	$\tau_n$	$C$
120.0	36.0	0.3	50.0	-77.0	-54.4	1.0	1.0	1.0

其中无量纲参数  $\bar{E}_x = E_x/k_v$ ， $\bar{g}_x = g_x/g_{Na}$ ， $x \in (m, n, h)$ ， $\bar{I} = I/(k_v g_{Na})$ ， $\varepsilon = C/(k_t g_{Na}) =: \tau_v/k_t$ 。初始 Hodgkin–Huxley 参数值在表 1 中列出，因此  $\varepsilon = \frac{1}{170} \approx 0.01 \ll 1$ ，且系统 (5.1) 表示以  $v$  为快变量，以  $(n, h)$  为慢变量的奇摄动系统。函数  $x_\infty(v)$  和  $t_x(v)$ ， $x \in (m, n, h)$ ，描述了门变量的（无量纲）稳态值和时间常量，其中

$$x_\infty(v) = \frac{\alpha_x(v)}{\alpha_x(v) + \beta_x(v)} \quad \text{且} \quad t_x(v) = \frac{1}{\alpha_x(v) + \beta_x(v)}$$

且

$$\begin{aligned} \alpha_m(v) &= \frac{(k_v v + 40)/10}{1 - \exp(-(k_v v + 40)/10)} & \beta_m(v) &= 4 \exp(-(k_v v + 65)/18) \\ \alpha_h(v) &= \frac{0.07 \exp(-(k_v v + 65)/20)}{(k_v v + 55)/100} & \beta_h(v) &= \frac{1}{1 + \exp(-(k_v v + 35)/10)} \\ \alpha_n(v) &= \frac{(k_v v + 55)/100}{1 - \exp(-(k_v v + 55)/10)} & \beta_n(v) &= 0.125 \exp(-(k_v v + 65)/80) \end{aligned}$$

初始的具有伸缩参数  $\tau_h = \tau_n = \tau_m = 1$  的 Hodgkin - Huxley 方程没有显示 MMOs[105]，但如果  $\tau_h > \tau_{h,\varepsilon} > 1$  或  $\tau_h > \tau_{h,e} > 1$  超过了一定阈值，则会观察到 MMOs[45, 198, 199]。这里，我们关注当  $\tau_h = 6.0$ ， $\tau_n = 1.0$ ， $C = 1.2$ （因此  $\varepsilon = 0.01$ ）的具体情况。我们使用初始 Hodgkin - Huxley 方程的电流  $I$ （单位为  $\mu A/cm^2$ ），即重新缩放系统 (5.1) 的  $\bar{I}$  作为唯一的自由参数。此外，为了便于与其他研究进行比较，我们用无缩放电压  $V = 100v$  表示输出，单位为  $mV$ 。

从数学的角度来看，MMOs 是由于在  $I = I_H \approx 8.359$  处存在（次临界）奇异 Hopf 分岔和在奇异极限  $\varepsilon = 0$  处存在折结点而产生的。(5.1) 的临界流形定义为

$$n^4(v, h) = \frac{\bar{I} - m_\infty(v)^3 h(v - \bar{E}_{Na}) - \bar{g}_l(v - \bar{E}_L)}{\bar{g}_k(v - \bar{E}_k)}$$

它是一个立方体形状的表面  $S = S^{a,-} \cup F_- \cup S^r \cup F_+ \cup S^{a,+}$ ，表示  $I$  的相关相关值。外层分支  $S^{a,\pm}$  是稳定的，中间分支  $S^r$  不稳定的， $F_\pm$  表示折曲线[198]。该流形上的去奇异简化系统由下式给出：

$$\begin{cases} \dot{v} = \left(\frac{\partial}{\partial h} f\right)g_1 + \left(\frac{\partial}{\partial n} f\right)g_2 \\ \dot{h} = -\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)g_1 \end{cases}$$

在生理相关范围内，对去奇异简化流的相平面分析表明，对于  $I > I_{FSN} \approx 4.83$ ， $F$  上存在折结奇异点。此外，可以看出，当  $I > I_r \approx 15.6$  时，全局回归机制向漏斗区域投射；见[198199]。因此，折结点理论预测在当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时的奇异极限下  $I$  值收敛到  $I_{FSN} < I < I_r$  的范围内存在稳定的 MMOs。

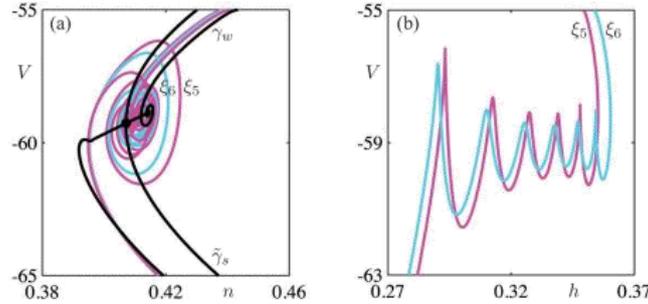


图 23:  $\tau_s = 6.0$ ,  $\tau_n = 1.0$ ,  $C = 1.2$ ,  $I = 12$  的三维简化 Hodgkin - Huxley 方程 (5.1) 的最大次鸭轨线  $\xi_5$  和  $\xi_6$ 。(a) 显示了两个鸭轨线在  $(n, V)$ -平面上的投影，还显示了强奇异鸭解  $\tilde{\gamma}_s$  和弱主鸭解  $\gamma_w$ 。 $\xi_5$  和  $\xi_6$  在 (b) 的  $(h, V)$ -平面上的投影分别显示了五个和六个振荡。

图 23(a) 显示了  $I = 12$  的折结点的奇异性，该折结点大致位于  $(v, h, n) = (0.593, 0.298, 0.407)$  处，然后投影到  $(n, V)$ -平面上。两条黑曲线穿过折结点的强奇异鸭解  $\tilde{\gamma}_s$  和主弱鸭解  $\gamma_w$ 。另外两条曲线是在折结点附近计算的扩展慢流形的交点时发现的最大次要鸭解  $\xi_5$  和  $\xi_6$ ；另见第 8 节和 [45, 图 6]。它们在  $(h, V)$ -平面上的投影，显示了  $\xi_5$  和  $\xi_6$  的振荡性质，如图 23(b) 所示。注意，图 23(a) 中的主弱鸭解  $\gamma_w$  的最终振荡显示了鞍焦点诱导的 SAO 的明显特征。实际上，由于在  $I_H \approx 8.359$  处的奇异 Hopf 分岔，相对靠近折结点存在鞍焦平衡点  $q \approx (-0.589, 0.379, 0.414)$ 。从  $I = 12$  向  $I = I_H$  递减，导致  $q$  向折结点移动，并且与图 21(c) 相比折结点诱导的 SAOs 和鞍焦点诱导的 SAOs 的混合将更加明显。

当  $I$  变化时， $I = 12$  的平衡点  $q$  保持不变。图 24(a) 显示了部分分岔图，在这里我们绘制了  $V$  对  $I$  的最大值。类似于 [45] 中的分析，对于所有  $I$  都存在唯一的平衡点，这些平衡点当  $I < I_H$  且  $I > 270.772$  (约数) 时是稳定的。 $I_H$  上的 (奇异) Hopf 分岔 (标记为  $H$ ) 产生了一系列鞍型周期轨线。这一族周期轨线在  $I \approx 6.839$ ,  $I \approx 27.417$  和  $I = I_{SL} \approx 14.860$  处经历三次分叉 ( $SL$ )，此后两个非平凡的 Floquet 乘子的模小于 1，并且相关的稳定周期轨线对应于该领域中已知的 (放电)。图 24(a) 显示了第一个  $SL$  之后很快在  $I \approx 7.651$  处出现倍周期分岔 ( $PD$ )， $I \approx 7.651$  是 Floquet 乘子中的一个，这两个乘数在第一个  $SL$  之后都不稳定。因此， $PD$  后的周期轨线是不可定向的，并且是鞍形的。注意，第二个  $SL$  (图 24(a) 中未显示) 必须在第二个  $SL$  之前产生。

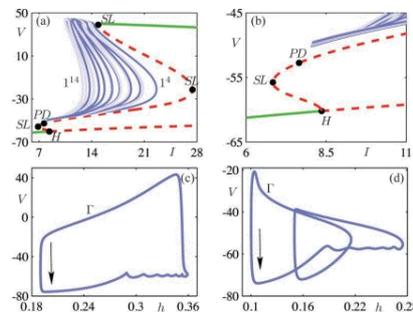


图 24:  $\tau_s = 6.0$ ,  $\tau_n = 1.0$ ,  $C = 1.2$  的三维简化 Hodgkin - Huxley 方程 (5.1) 的 MMO 周期轨线。(a) 显示分岔图，其中绘制了最大  $V$ -值相对于电流  $I$  的图。在由倍周期分岔  $PD$  和极限环分岔  $SL$  的鞍结点所限定的  $I$  范围内，存在 MMO 周期轨线的等值线。等值线呈交替的浅蓝色和深蓝色。(b) 显示 Hopf 分岔附近的扩大图。所有等值线在  $I_{SL} \approx 8.087$  处都具有折分岔。(c) 所示的周期轨线  $\Gamma$  在  $I = 12$  都是稳定的 MMO，(d) 展示了  $\Gamma$  的最大  $V$ -值  $-20mV$ 。

MMOs 以一系列  $I$  对应的周期轨线的孤立族存在；图 24(a) 显示了这些等值线中的 11 个等值线呈交替的浅蓝色和深蓝色。单个等值线上的所有周期轨线具有相同数量的振荡。每个等值线包含一个较短的停滞期（平稳期），在该停滞期（平稳期）内  $V = 40mV$  附近有最大  $V$ ， $V = 40mV$  附近相关的 MMOs 是稳定的，且是特征  $1^s$ 。对于我们选择特定的  $\varepsilon = 0.01$ ，我们发现稳定的 MMO 间期在左侧为  $I_H$ ，右侧为  $I_{SL}$ ，即  $8.359 < I < 14.860$ 。回想一下，基于当  $\varepsilon \rightarrow 0$  的奇异极限的理论，对于  $4.83 \approx I_{FSN} < I < I_r \approx 15.6$ ，预测  $1^s$  模式的稳定 MMO 周期轨线的存在；即使  $\varepsilon$  相对较大，匹配结果也是出奇的好。当  $I$  下降到  $I_H$  时，稳定特征  $1^s$  MMO 中的数  $s$  趋于无穷大，因为由于 Hopf 奇异性形成了同宿轨线；参见 [45]。此外，存在具有更复杂模式的稳定 MMO 特征  $1^s 1^{s_2} \dots$ ；参见 [199]。比较图 19 中第 4 节中的 Koper 模型；MMO 周期轨线沿着等值线经过几个分岔（主要是极限环分岔的倍周期和/或鞍结点）。最大  $V$  值表示各个 MMO 周期轨线的最大振荡幅度。注意  $V = V_{F_c} \approx -20mV$  的等值线的折结构，它近似于动作电位的复极阈值。该值还对应于上折曲线  $F_+$  的  $V$ -值，在该  $V$  值处，轨线跳回。对于停滞期（平稳期）上的 MMO，LAOs 对应于一个完整的动作电位，而随后的  $s$  个 SAOs 是亚阈值振荡。

图 24(b) 显示了在 Hopf 分支附近 MMO 周期轨线的等值线如何累积扩展，该 Hopf 分支是理论预测特征  $1^s$  的区域，即 MMO 具有一个大（位移）的和  $s$  个 SAOs。这是通过全局回归机制随着  $I$  的变化而投影到临界流形  $S$  上来组织产生的。如果回归投射到一个次要流形上，那么周期轨线的一部分跟随次要流形到慢流形的不稳定分支  $S_c^*$  上。然而，只有到达上折曲线  $F_+$  区域的鸭周期轨线才是最大次鸭结。因此，相应的次要鸭解族可以分成两组：一组是具有最大  $V < V_{F_c}$  回跳鸭解的次要鸭解，另一组是具有最  $V < V_{F_c}$  跳离鸭解的次要鸭解。这是在此应用中的一个重要区别，因为虽然跳离鸭解将创建动作电位，但是跳回鸭解将不创建动作电位。

我们沿着图 24(a) 和 (b) 所示的等值线之一来阐述鸭解。如图 24(c) 所示，在  $I = 12$  时的停滞期（平稳期）上存在稳定的 MMO 周期轨线；它的特征是  $1^6$ ，它位于等值线上，该等值线对应于总共有七个振荡的周期轨线。注意， $\Gamma$  的大（位移）高于阈值。与图 23(b) 比较， $\Gamma$  的六个 SAOs 是由于全局回归在旋转扇区上起作用了，该旋转扇区由当  $I = 12$  时的最大次鸭解  $\xi_5$  和  $\xi_6$  界定（未在图中示出）。当周期轨线  $\Gamma$  继续沿  $I$  增加的方向延伸，最大  $V$  值就会减小，LAO 从动作电位变为亚阈值振荡。图 24(d) 显示了当最大  $V$  值大约为  $-20mV$  时的  $\Gamma$ （此时是不稳定的）。观察到  $\Gamma$  仍然总共有七个振荡，但是此时其中两个具有快速段。这些快速的片段是跳回的鸭解。更准确地说，周期轨线  $\Gamma$  由  $\xi_6$  鸭解族的回跳鸭解的一段组成，该段连接到强鸭解族的回跳鸭解的一段，该段又返回连接到初始形成段，从而形成闭循环。可以把图 24(d) 中的  $\Gamma$  归类为具有特征  $2^5$  的 MMO，因为只有五个振荡是由于靠近折结点的（通道）而具有非常小的振幅，而由于回跳鸭解，存在两个明显可区分的更大的具有快速段的振荡。然而， $\Gamma$  的这些较大的鸭振荡都不能产生完整的动作电位，这意味着下文中有这个应用的所有振荡都被归类为 SAOs。

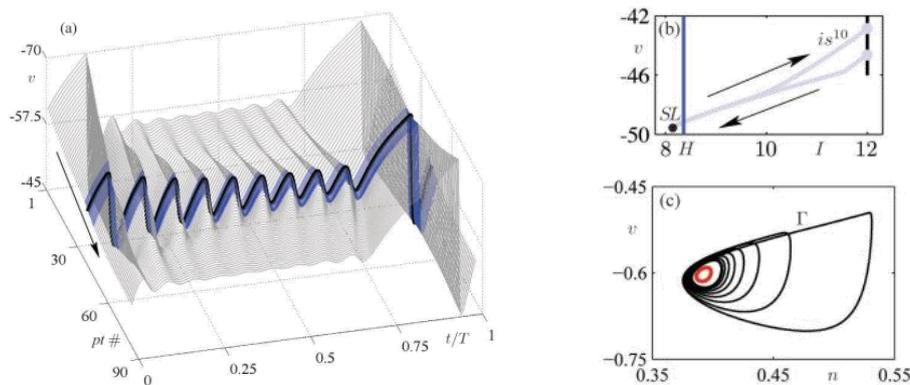


图 25: 由十个振荡组成的周期轨线族的延拓。延拓的起始点和结束点在  $I = 12$  处，折点为  $I = 8.087$ 。(a) 显示了沿这部分等值线计算的 90 个周期轨线的  $v$  时间序列的三维“瀑布图”；黑色周期轨线位于折点处。蓝色轨线对应于折点和 Hopf 分岔对应的  $I$ -值之间的等值线部分，即  $I_H \approx 8.359$ 。(b) 显示沿  $(I, V)$ -平面分支的最大  $V$  值，箭头指示延拓的方向。(c) 显示折处的周期轨线以及投影到  $(n, V)$ -平面上的共存小周期轨线。

图 25 显示了沿着图 24(a) 中等值线的下部的周期轨线的特征, 它们非常接近从 Hopf 分岔分岔出来的鞍形周期轨线的分支。更具体地说, 图 25(a) 显示了沿着等值线的下部的 90 个周期轨线的时间序列的“瀑布图”, 当  $I \leq 12$  时沿着该等值线一共发现 10 个振荡。分岔的这个部分如图 25(b) 所示。这个等值线的折点在  $I = I_{SL} \approx 8.087$ , 相关的周期轨线用粗体绘制在图 25(a) 中。当  $I_{SL} \leq I \leq I_H$  分岔部分的周期轨线用亮蓝色显示。沿着等值线这一部分的周期轨线与在等值线高峰附近发现的 MMOs 截然不同, 也就是说, 它们由 SAOs 和跳回鸭解组成, 总共有 10 个。图 25(c) 显示了折处的周期轨线在  $(n, V)$ -平面上的投影, 还显示了产生于 Hopf 分岔的分支上的共存的小周期轨线。该图表明折处的周期轨线正在接近小周期轨线的同宿循环。

## 6. 在 Olsen 的 PO 反应的四维模型中的 MMOs

许多应用并不会导致模型被清晰地分为慢和快的时间尺度。通常可以做出某种程度的假设, 但是大多数变量在相空间的某些区域是慢的, 而在其他区域是快的。下面的案例研究说明了慢快系统中的几何概念如何在本文中使用的。我们研究了 Olsen 及其合作者 [37, 173] 提出的 peroxidase-oxidase(PO) 生化反应的四维模型; 参见 [44], 其中使用了相同的例子。Olsen 模型描述了两个底物 ( $O_2$  和 NADH) 和两个自由基, 分别记为  $A$ 、 $B$ 、 $X$  和  $Y$ ; 该模型满足微分方程 (6.1)

$$(6.1) \quad \begin{cases} A' = -k_3ABY + k_7 - k_{-7}A \\ B' = \alpha(-k_3ABY - k_1BX + k_8) \\ X' = k_1BX - 2k_2X^2 + 3k_3ABY - k_4X + k_6 \\ Y' = -k_3ABY + 2k_2X^2 - k_5Y \end{cases}$$

注意,  $\alpha$  是一个人为引入的时间尺度参数, 我们引入这个参数是更加方便地研究这个案例研究的目的; 在 [37, 173] 中  $\alpha = 1$ 。其他参数是反应速率, 我们给它们一系列的值, 如表 2 所示, 这样, 满足这些参数值的周期轨线符合 Olsen 模型 (6.1)。我们研究的是稳定的 MMO 周期轨线, 记为  $\Gamma$ ; 它的变量  $A$  的时间序列如图 26(b) 所示。我们观察到  $\Gamma$  具有  $1^s$  模式, 我们估计  $s$  约为 15。下面, 我们证明了这个例子的 SAOs 发生在通过动力学 Hopf 分岔的过程中, 并且我们分析这个轨迹的全局回归机制。

表 2 在四维 Olsen 模型 (6.1) 中使用到的参数值

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_{-7}$	$k_8$	$\alpha$
0.28	250	0.035	20	5.35	0	0.8	0.1	0.825	1

### 6.1. 快速子系统的分岔

在 Olsen 模型 (6.1) 中, 不同时间尺度之间没有明确的划分, 但是众所周知,  $B$  在比其他变量更慢的时间尺度上演化 [154]。因此, 考虑通过设置  $\alpha = 0$  而获得的快速子系统是有意义的, 即  $B = 0$ , 并且  $B$  作为 (6.1) 中的参数。如图 26(a) 中分岔图展示了在  $(A, B)$ -平面上的投影, 因为  $k_6 = 0$ , 所以投影是不变的; 参见表 2。当  $B = k_4 / k_1 \approx 71$  时, 平衡点有两个分岔在跨临界分岔  $T$  处相交, 实线表示稳定的平衡点, 虚线表示不稳定的平衡点。

图 26(a) 中被标记为黑色的平衡点具有非负的  $X$  和  $Y$ , 所以它们是 (物理) 相关的; 另一方面, 对于被标记为灰色的平衡点,  $X$  或  $Y$  是负的。第一个分岔是  $A = 8$  处的黑色水平线; 它位于  $(A, B)$ -平面 (其中满足  $X = Y = 0$ ), 因为  $k_6 = 0$ , 所以该分岔是不变的。沿该分岔的平衡点当  $B < k_4 / k_1$  时是稳定的。第二个分岔与水平分岔相交于  $(A, B)$ -平面点  $T$  处, 只有具有非负的  $X$  和  $Y$  的第二分岔的黑色部分是物理相关的, 它由位于点  $T$  附近且带有一个不稳定和两个稳定实特征值的鞍点组成。沿着这个物理相关分岔的两个进一步的分岔改变了平衡点的稳定性; 在  $B = B_{SN} \approx 35.144$  处有一个鞍结分岔  $SN$ , 在  $B = B_H \approx 57.949$  处有一个亚临界

Hopf 分岔  $H$ 。从鞍形周期轨线（绿色）产生的分岔被标记为  $\Gamma$ ，对于它仅显示  $A$  的最小值和最大值。超平面  $\Sigma^\perp = \{(A, B, X, Y) \mid B = k_4 / k_1\}$  标记着垂直于  $(A, B)$ -平面的线性收缩为零的地方；注意  $T \in \Sigma^\perp$ 。在这个分岔图上展示了系统 (6.1) (当  $\alpha = 1$  时) 的 MMO 周期轨线  $\Gamma$ ，现在我们可以看到是轨线  $\Gamma$  如何由一段 SAOs 组成的，它是通过动力学 Hopf 分岔产生的，并且是一个全局回归：从轨线  $\Gamma$  的最小值开始，由于快子系统平衡族的存在，轨道螺旋在涡旋结构中进出涡旋，该快速子系统具有一对穿过虚轴的复共轭特征值。快子系统中 Hopf 分岔的存在解释了观察到的全系统吸引子的 SAOs 的慢衰减和振幅的增加的原因。再回到吸引分岔的邻域被  $A$  的增加而影响，这触发了  $B$  的缓慢增加，因为轨线紧跟着  $(A, B)$  平面上朝向  $A = 8$  的稳定平衡曲线。当  $B > k_4 / k_1$  时，即轨线越过超平面  $\Sigma^\perp$ ，则  $(A, B)$ -平面变得不稳定，轨线开始偏离。最后， $A$  中的急剧衰减似乎是将轨线带到回动力学 Hopf 分岔入口的快速段；与沿图 26 (b) 中轨线  $\Gamma$  的  $A$  变量时间序列相比较。SAOs 的振幅迅速减小表明轨线  $\Gamma$  处于旋转和延迟 Hopf 分岔之间的中间状态，但是我们将标记为旋转；参见 3.4 节的讨论。

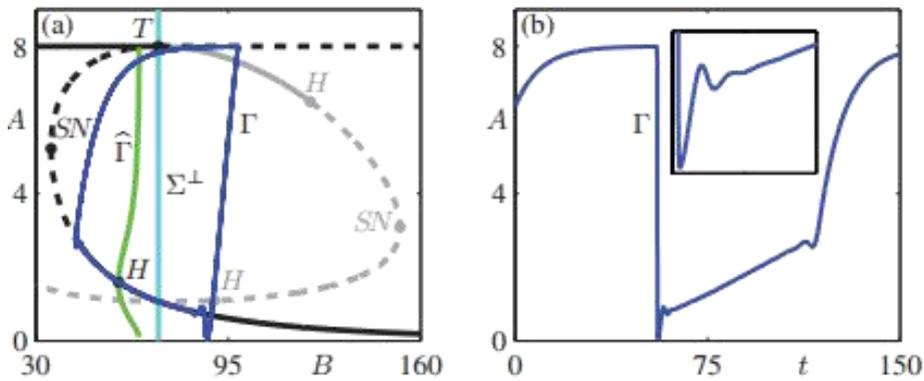


图 26: Olsen 模型 (6.1) 中的稳定的 MMO 周期轨线  $\Gamma$ ，参数如表 2 所示。(a) 显示  $\Gamma$  (蓝色) 投射到  $\Gamma$  平面上，叠加在  $\alpha = 0$  的 (6.1) 的分叉图上；实心 (虚线) 黑色和灰色曲线是稳定 (不稳定) 平衡点，其中灰色表  $X$  或  $Y$  为负的点， $SN$ ， $H$ ， $T$  分别是鞍结点、Hopf 和跨临界分岔。周期轨线族  $\hat{\Gamma}$  从  $H$  发出的轨线由在  $A$  (绿色曲线) 中的最大值和最小值表示；线  $\Sigma^\perp$  (青色) 表示  $(A, B)$ -平面从吸引变为排斥的位置。(b) 显示沿  $\Gamma$  的变量  $A$  的时间序列。插图显示了 SAOs 经历缓慢衰退的区域的爆炸。

## 6.2. Olsen 模型的慢流形

在图 26 中的轨线  $\Gamma$  的 SAOs 通过一个机制突然终止，该机制可以通过计算慢流形来可视化。在快子系统中的这些流形的形状和他们的相互作用的几何形，使得我们能够阐明 Olsen 模型 (6.1) 中的 MMOs 的组织方式。考虑在图 26 中当  $B < k_4 / k_1$  时鞍平衡点的曲线介于点  $SN$  和点  $T$  之间。每一个平衡点都有一个正的和两个负的特征值，且相关的行为的二维稳定流形族限制 (三维的) 排斥慢流形，该排斥慢流形使得 SAOs 终止。由于这种终止仍然发生在非常接近不变的  $(A, B)$  平面处，因此我们可以假设  $X$  是这个区域中的快速变量。因此，我们可以通过准稳态假设 (QSSA) [74] 来减小维数，其中我们假设  $X$  已经达到其稳态值：

$$(6.2) \quad X = \frac{k_1 B - k_4 + \sqrt{(k_1 B - k_4)^2 + 8k_2(3k_3 A B Y + k_6)}}{4k_4}$$

利用 QSSA，我们将  $\alpha = 0$  的快速子系统 (6.1) 近似为  $(A, Y)$  平面上的二维向量场的  $B$  依赖族，并且排斥慢流形现在被近似为一维稳定流形的  $S_B^r$  族。注意，QSSA (6.2) 式保持了快速子系统的平衡，并且它们的稳定性仅在移除了一个基本收缩方向 (当  $B < k_4 / k_1$  时) 的情况下变化。如果  $B$  介于  $B_{SN}$  与  $B_H$  之间，在点  $SN$  另一边的分岔上的平衡点在平面系统中是排斥的且吸引  $B_H$ 。我们用 AUTO 软件 [52] 通过定义合适的两点边值问题 (BVP) 来计算  $S_B^r$ ；参见 8.2 节。图 27 显示了  $S_B^r$  如何围绕  $B_{SN} \leq B \leq B_H$  的下平衡分岔和围绕  $B \geq B_H$  的不稳定周期轨线族向上 (向后时间) 卷积，直到  $B \approx 66.480 < k_4 / k_1$  的同宿分岔，以强调  $B$  依赖性，我们在子图 (b) 中显示了固定值  $B = 60$  的平面动力学。

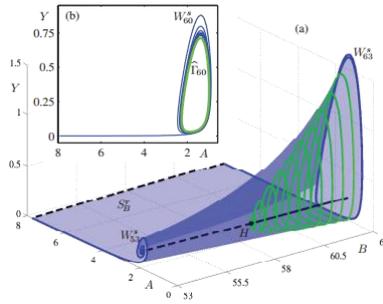


图 27: Olsen 模型 (6.1) ( $\alpha=0$ ) 快速子系统的排斥慢流形  $S_B^r$  (蓝色) 图, 其中  $X$  通过 QSSA (6.2) 消除。流形  $S_B^r$  作为鞍平衡点 (黑线虚线的  $53 \leq B \leq 63$  的一维稳定流形  $W_B^s$  族 (仅单侧)) 被计算。图中还显示了 Hopf 分岔点 (点) 附近的平衡分支 (虚线/实心黑色曲线), 以及在 Hopf 分岔处产生的几个不稳定周期轨线 (绿色曲线); 周期轨线与快速子系统图 26 中的几乎相同。图 (b) 显示了  $W_{60}^u$  和  $(A, Y)$ -平面上  $B=60$  对应的不稳定周期轨线  $\hat{\Gamma}_{60}$ 。注意, 选择两个图中的视点使得  $A$  向左增加; 在随后的三维图中也是这种情况。

排斥慢流形  $S_B^r$  只是一个近似值, 它不是整个系统 (6.1) 的一个不变对象。然而, 它提供了 MMO 轨线如何被实际排斥慢流形捕获的指示, 当排斥慢流形  $S_B^r$  通过旋转时, 它指示轨线向鞍平衡曲线流动的方式。通过将排斥慢流形的近似值与吸引慢流形的近似值  $S_B^a$  结合在一起, 引导轨线返回到旋转入口, 我们可以可视化组织 SAO 的机制。

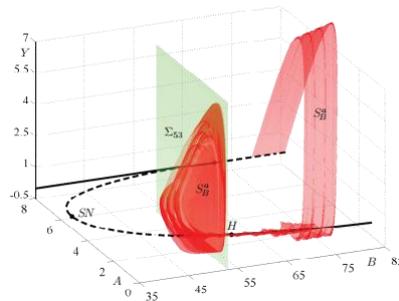


图 28: 整个 Olsen 模型 (6.1) ( $\alpha=1$ ) 的吸引慢流形  $S_B^a$  (红色), 从  $A=8$  和  $B > k_4/k_1$  的平衡点附近计算到  $\Sigma_{53} = \{B = 53\}$ 。黑色实线/虚线是快速子系统 ( $\alpha=0$ ) 的物理相关平衡点。

为了找到  $S_B^a$ , 我们考虑当  $A=8$  且  $B > k_4/k_1$  (经过 T) 时的鞍平衡曲线  $L$ ; 参见图 26 (a)。在  $(A, X, Y)$ -空间这些平衡点具有一个一维不稳定流形, 就是说, 在没有 QSSA (6.2) 式的完整的快子系统中。非稳定流形的  $B$  依赖族  $W^u(L)$  是一个二维曲面, 它在螺旋运动之前向位于不变的  $(A, B)$ -平面上方的吸引平衡分岔作大偏移。我们在此情况下当  $B$  变化时, 把吸引慢流形  $S_B^a$  定义为等价于  $W^u(L)$ 。特别地, 根据这个定义,  $S_B^a$  进入  $H$  的邻域并与只存在  $B < k_4/k_1$  的排斥慢流形  $S_B^r$  相交。我们用 AUTO 软件 [52] 使用 BVP 来计算二维流形  $S_B^a$ , 如第 8 节所示; 具体地说, 我们需要计算的轨线段的一个端点沿着非常接近平衡曲线  $L$  的线  $L_a$ , 并且以线性近似于  $W^u(L)$ ; 有关如何执行此计算的更多细节, 请参阅 [44]。图 28 说明了  $S_B^a$  如何通过大偏移从  $L_a$  附近产生全局回归机制, 然后引导轨线通过旋转。

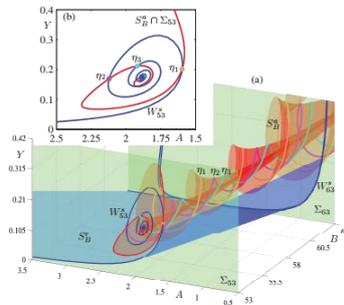
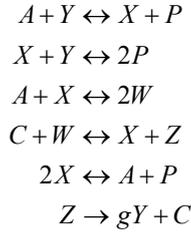


图 29: Olsen 模型 (6.1) 吸引和排斥慢流形的近似图。(a) 显示了  $S_B^a$  (蓝色) 和  $S_B^r$  (红色) 的表面投影到  $(A, B, Y)$ -截面  $\Sigma_{53}$  和  $\Sigma_{63}$  (绿色平面) 之间的空间中。图中还显示了橙色中的  $\eta_1$ 、洋红色的  $\eta_2$  和青色的  $\eta_3$  三条轨线, 它们位于  $S_B^a$  和  $S_B^r$  的交叉点上。(b) 显示了  $S_B^a$  和  $S_B^r$  与  $\Sigma_{53}$  的交叉点; 标有  $\Sigma_{53}$  的  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  和  $\eta_3$  的交叉点。

图 29 说明了  $S_B^a$  和  $S_B^r$  的相交是如何决定旋转机制中的行为。在子图 (a) 中的两个旋转面是在  $(B, A, Y)$ -空间中显示的。回想一下,  $S_B^a$  是  $(B, A, X, Y)$ -空间中的一个二维曲面, 并且显示了它的投影。另一方面, 由于附加的强吸引方向, 需要通过假设  $QSSA$  (6.2) 式来计算流形  $S_B^r$ 。因此,  $S_B^a$  和  $S_B^r$  与平面  $\Sigma_{53} = \{B = 53\}$  的交点是孤立点, 如图 29(b) 所示; 注意,  $S_B^r \cap \Sigma_{53} = W_{53}^s$ , 而  $S_B^a \cap \Sigma_{53}$  的计算更复杂。这两条曲线的交点定义了类似于折结点附近的鸭轨线的轨线, 因为它们在旋转区域内螺旋, 产生越来越多的圈数。在图 29(b) 中前三个交点被标明, 它们相应的轨线  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  和  $\eta_3$ , 如图 29(a) 所示。这些轨线  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  和  $\eta_3$  包含在  $S_B^a$  中, 但是它们与  $\Sigma_{53}$  的交点仅位于  $S_B^r$  上。事实上,  $S_B^r$  不是系统 (6.1) 的实际不变流形, 而只是作为排斥慢流形的近似。然而,  $S_B^a$  和  $S_B^r$  定性地说明了缓慢通过旋转区域所产生的 SAOs 的性质。特别地,  $S_B^a$  和  $S_B^r$  与  $\Sigma_{53}$  的相交曲线提供了振荡扇区在相空间中的近似位置。

## 7. BZ 反应中 MMOs 的 showalternoye-bar-eli 模型

Showalter-noye-bar-eli 模型 [207] 是针对 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应提出的众多动力学模型之一。它是一个由满足质量作用定律的反应系统导出的七维向量场, 该系统如下



由它得到 (7.1) 式:

$$(7.1) \quad \begin{cases} A' = k_0(A_0 - A) - k_1AY + k_{-1}PX - k_{-3}AX + k_{-3}W^2 + k_5X^2 - k_{-5}AP, \\ C' = k_0(C_0 - C) - k_4CW + k_{-4}XZ + k_6Z, \\ P' = -k_0P + k_1AY + 2k_2XY - 2k_{-2}P^2 + k_5X^2 - k_{-5}AP - k_{-1}PX, \\ W' = -k_0W + 2k_3AX - 2k_{-3}W^2 - k_4CW + k_{-4}XZ, \\ X' = -k_0X + k_1AY - k_{-1}PX - k_2XY + k_{-2}P^2 - k_3AX + k_{-3}W^2 \\ \quad + k_4CW - k_{-4}XZ - 2k_5X^2 + 2k_{-5}AP, \\ Y' = k_0(Y_0 - Y) - k_1AY + k_{-1}PX - k_2XY + k_{-2}P^2 + gk_6Z, \\ Z' = -k_0Z + 4k_4CW - k_{-4}XZ - k_6Z, \end{cases}$$

其中我们使用相同的字母来定义化学物质及其浓度。注意到  $C' + Z' = k_0(C_0 - C - Z)$ , 因此, 超平面  $C + Z = C_0$  是不变且吸引的。我们通过设置  $C = C_0 - Z$  把系统 (7.1) 简化到该超平面上的六维向量场中并消除  $C$  方程。这个模型是“现实的”, 因为它的每个变量都与一个特定的化学物种有关。反应速率基于实验测量。正如典型的化学反应, 中间物种的浓度相差许多数量级。然而, 一些低浓度的中间物种在动力学上仍然很重要。变量  $Y$  表示溴化物浓度, 在实验中经常测量它的浓度以监测系统的状态。模型中的变量  $A$  表示溴酸盐浓度。这种化学物质的浓度比其他物种大得多, 但化学上相关的量作为它的变量, 其量级可与其他浓度的变量相比较。有关化学的更多细节, 请参见 Showalter、Noyes 和 Bar-Eli 论文 [207]。在以往对这个模型的研究中, Barkley [16] 不能清楚地定义它所展示的 MMO 的动力学解释。

我们针对 Showalter、Noyes 和 Bar-Eli 观测 MMO 的单个参数集来研究这个系统, 具体而言如下系统 (7.2)

$$\begin{aligned}
 (7.2) \quad & k_1 = 0.084 \quad (Ms)^{-1}, \quad k_{-1} = 1 \times 10^4 \quad (Ms)^{-1}, \\
 & k_2 = 4 \times 10^8 \quad (Ms)^{-1}, \quad k_{-2} = 5 \times 10^{-5} \quad (Ms)^{-1}, \\
 & k_3 = 2 \times 10^3 \quad (Ms)^{-1}, \quad k_{-3} = 2 \times 10^7 \quad (Ms)^{-1}, \\
 & k_4 = 1.3 \times 10^5 \quad (Ms)^{-1}, \quad k_{-4} = 2.4 \times 10^7 \quad (Ms)^{-1}, \\
 & k_5 = 4.0 \times 10^7 \quad (Ms)^{-1}, \quad k_{-5} = 4.0 \times 10^{-11} \quad (Ms)^{-1}, \\
 & k_6 = 0.65 \quad (Ms)^{-1}, \quad k_0 = 7.97 \times 10^{-3} \quad s^{-1}, \\
 & A_0 = 0.14 \quad M, \quad C_0 = 1.25 \times 10^{-4} \quad M \\
 & Y_0 = 1.51 \times 10^{-6} \quad M, \quad g = 0.462
 \end{aligned}$$

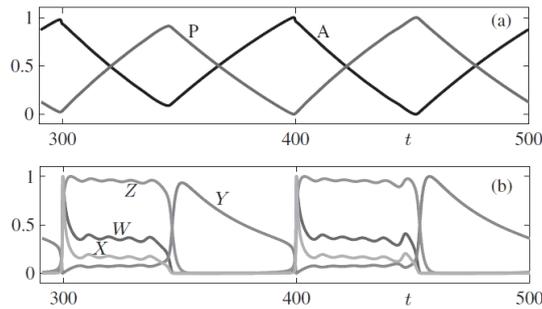


图 30: 系统 (7.1) 的 MMO 周期轨线的时间序列, 参数在 (7.2) 中被确定。将每个变量的时间序列缩放到区间 [0, 1], 并绘制一个周期内的轨线。(a) 显示慢变量  $A$  (黑色) 和  $P$  (灰色), (b) 显示快变量  $W$  (黑色)、 $X$  (灰色)、 $Y$  (黑色) 和  $Z$  (灰色)。

注意, 系统 (7.1) 和 (7.2) 中的参数具有单位量纲; 在整个过程中, 浓度以摩尔 ( $M$ ) 和时间以秒 ( $s$ ) 测量。

表 3 图 30 中每个坐标的最小和最大变化范围

$A$	$P$	$W$	$X$	$Y$	$Z$
$1.39856 \times 10^{-1}$	$1.83 \times 10^{-4}$	$1.45 \times 10^{-9}$	$4.2 \times 10^{-11}$	$2.39 \times 10^{-8}$	$3.89 \times 10^{-8}$
$1.39907 \times 10^{-1}$	$2.80 \times 10^{-4}$	$1.38 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-7}$	$2.28 \times 10^{-6}$	$6.41 \times 10^{-6}$

图 30 展示了系统 (7.1) 中的 MMO 周期轨线的时间序列, 其参数由系统 (7.2) 给出, 以  $T \approx 209s$  为周期绘制而出。在此时间序列中, 每个变量通过伸缩变换进行缩放, 使得它在区间 [0, 1] 上变化。为了回到系统 (7.2) 的动力学, 表 3 中列出了重新缩放之前每个变量的最小值和最大值。图 30 显示了 MMO 的特征。当  $Y$  的相对浓度较小,  $Z$  的相对浓度较大时, 振荡较小。注意表 3 中这些浓度变化超过两个数量级。周期轨线构成两个回路, 并具有特征  $1^4 1^5$ 。

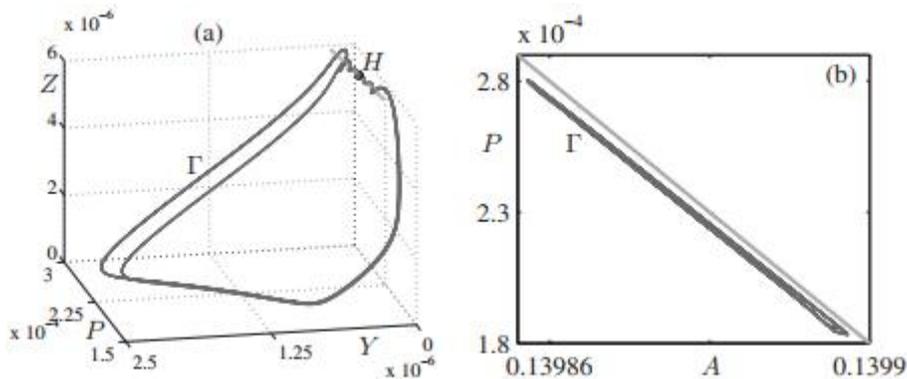


图 31: (a) 显示被投影到由坐标  $(P, Y, Z)$  张成的空间上的轨线。沿着临界流形的曲线被绘制成灰色线, 并且在快速子系统中 Hopf 分岔的位置标记为黑点。在 (b) 中, MMO 被投影到  $(A, P)$ -平面上。灰色线由  $2A + P = 2A_0$  所定义,  $A$  和  $P$  的范围为  $[0.13985, 0.13991]$  和  $[0.00018, 0.0003]$ 。

在系统(7.1)中没有明确的慢-快结构。从图30中通过两次观测,我们推断 $(A, P)$ 相对于 $(W, X, Y, Z)$ 以特殊的方式中缓慢变化。首先,变量 $(A, P)$ 在变量 $(W, X, Y, Z)$ 经历小振荡的时间内显示出单调的减少和增加。第二, $(A, P)$ 在小振荡开始或结束时不像 $(W, X, Y, Z)$ 那样经历快速变化。因此,为了研究这种MMO中SAOs的产生机制,我们从MMO动力学的角度将系统定义为具有慢变量 $(A, P)$ 和快变量 $(W, X, Y, Z)$ 的慢-快系统。图31(a)是将MMO周期轨线投影到 $(P, Y, Z)$ -空间上的投影图。请注意SAOs区域,它有两条轨线经过。子图(b)显示 $\Gamma$ 投影到慢变量的 $(A, P)$ 平面上。从这个投影中我们观察 $\Gamma$ 位于超平面 $2A + P = 2A_0$ (灰色线)附近,这意味着 $A$ 和 $P$ 沿着MMO周期轨线的变化是同一阶的数量级的。

图31(a)表明MMO周期轨线的SAOs是由于一个旋转引起的。为了确定这一点,我们使用MatCont[46]程序用连续方法计算SAOs附近的临界流形。图32(a)显示了慢变量 $(A, P)$ -平面中快子系统的Hopf分岔曲线以及曲线 $2A + P = 2A_0$ 。图32(a)中绘制的Hopf曲线的一小部分,它几乎是水平的,因此两条曲线横向交叉。MatCont还计算了沿着Hopf分岔的这个部分的Hopf分岔的第一个李雅普诺夫系数,表明它们都是次临界的。为了进一步证明与Hopf分岔相关的旋转确实是产生SAOs的基础,我们将 $\Gamma$ 投影到由快变量空间中Hopf分岔的二维中心流形所张成的三维空间中且把投影方向定义 $2A + P = 2A_0$ 的方向。中心流形的投影被绘制成灰色曲线,边界层方程的Hopf点是黑点。 $\Gamma$ 中与SAOs相对应的两个部分围绕着中心流形,并且具有接近Hopf点的最小振幅。这清楚地证明了在系统(7.1)中发现的MMO的特征SAOs是由动力学Hopf分岔的旋转机制生成的,类似于第6节中Olson模型观察到的SAOs。此示例说明了如何将本文描述的方法有效地应用于维度高于3或4的系统。

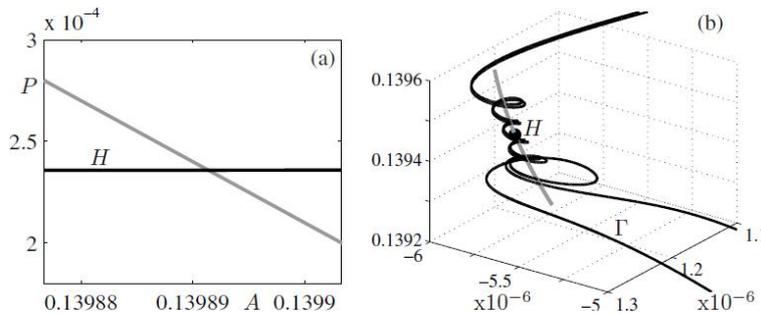


图32: (a) 显示了Hopf分岔(黑线)的曲线和 $(A, P)$ -平面中由 $2A + P = 2A_0$ 定义的线(灰色)。图(b)显示了SAO投影到由Hopf分岔中心流形所张成的三维空间上的图,以及 $(A, P)$ -平面中直线 $2A + P = 2A_0$ 的方向。MMO周期轨线 $\Gamma$ 两次经过该区域,每次都围绕Hopf分岔(灰色)的中心流形盘旋;边界层系统本身的Hopf分岔点是黑点。

## 8. 慢-快系统的数值方法

本节讨论用于计算许多图中所示的二维慢流形以及平衡点的稳定和不稳定流形的数值方法。

慢流形计算是使用数值积分和边界值方法来计算沿着慢流形的轨线段,轨道段只是向量场轨线的有限部分;因此,它有两个端点和一个相关的积分时间。在计算慢流形的上下文中,每个这样的轨线段被选择在临界流形上远离其折的一个端点,其中我们希望临界流形是慢流形的良好近似。实际上,Fenichel定理暗示临界流形和慢流形之间的距离是 $O(\varepsilon)$ ,并且轨线以指数速率在适当的时间方向上从临界流形流动到吸引或排斥慢流形;参见定理2.1。因此,除了一端存在从临界流形到慢流形的快速过渡的短 $O(\varepsilon)$ 段之外,预计计算的轨线段将尽可能接近慢流形。对于平衡点的稳定流形和不稳定流形,选择轨线段分别位于与稳定或不稳定特征值相关的线性特征空间中。与这种近似相关的计算误差在远离终点时也迅速变弱;参见[43, 131]分析了这些近似误差。

计算作为轨线段族的不变流形的一种简单有效的方法是使用初始值解算器作为具有初始条件的基本算法,初始条件选择在不变流形中横向流的点网格上;我们称之为“扫描”法。尽管该方法简单,但在某些情况下不能产生令人满意的结果。特别地,轨线相互之间的强收敛或发散使得初始网格的选择有问题,并且可能产生期望的流形的非常不均匀的“覆盖”;参见[61, 62]。在多时间尺度系统中,没有吸引力的

Fenichel 流形的快速指数不稳定性使得初值解算器无法通过正向积分来跟踪这些流形。这些问题促使使用结合了连续性边界值方法作为计算不变流形的备选策略[132, 133]。在本文中，我们使用了两种策略。本节详细介绍用于计算具有一个快变量和两个慢变量的系统的吸引和排斥慢流形的方法，以及当参数变化时鸭轨线的延续。

## 8.1. 扫描不变流形

具有单一快变量的系统的 Fenichel 流形或是吸引的或是排斥的。因此，在临界流形上具有初始条件的前向轨线将快速的覆盖吸引的 Fenichel 流形并且在临界流形上具有初始条件的后向的轨线将快速的覆盖排斥的 Fenichel 流形。因此，其中一种计算三维流的两维吸引和排斥 Fenichel 流形的方法是在适当的时间方向上将初值求解法应用到初始条件的网格上，该网格沿着临界流形的横向慢流的曲线。我们在图 11 中使用这种扫描方法计算  $S'_c$ ；还参考了[163]早期使用这种方法计算二维不变流形的例子，Wechselberger, Guckenheimer 和 Haiduc（还把这种方法应用到）折结点的示例。

当合并到延拓框架中时，如果临界流形不是封闭形式的，并且不能预先选择初始条件的网格，也可以使用扫描方法。延拓方法[51]提供了成熟的算法，这些算法在求解欠定方程组时像牛顿方法那样用选择新起点的策略来扩展方程求解方法。更准确地说，假设  $F: R^{m+n} \rightarrow R^m$  是由  $m+n$  个变量的  $m$  个方程确定的光滑函数。隐函数定理指出  $F$  的零点在偏导数矩阵 DF 具有满秩  $m$  的点附近形成一个光滑的  $n$  维流形  $M$ ，并且给出了  $M$  的切空间的一个公式。大多数延拓方法是针对处理  $n=1$  时的情况，其解集是一条曲线；对于  $n>1$  的情况，请参见[104]。一般来说，这些方法是基于预测-校正的过程：给定  $M$  上的一个点，切线（或更高阶）信息被用来为求解器选择一个新的种子，以找到  $M$  上的一个新点。上面描述的扫描方法基于特定坐标或方向的相等增量来选择连续步长，但是也可以使用更复杂的步长调整。我们还使用扫描方法来计算图 11 中的全局不稳定流形  $W^u(p)$ 。在  $W^u(p)$  的切空间中，初始条件的网格沿射线分布，网络的端点位于线性化系统与该射线轨线的连续交点。扫描法在这里应用的很好，因为所选择的轨线段提供了  $W^u(p)$  的足够的“覆盖”。

## 8.2. 有边界值解算器的轨道段的延拓

AUTO 软件[52]的核心算法是 BVP 解算器和隐式方程解的数值延拓。AUTO 软件的 BVP 解算器使用配置方案，其中解段由在用户指定的网格的网格间隔上定义的分段多项式（用户指定的程度，通常在 3 到 5 之间）表示。在配置点求解 ODE 给出了一个由牛顿法求解的多项式系数的大方程组。AUTO 软件使用所谓的伪弧长延拓来跟踪或延续所选参数中此类方程的解，其中步长是自动调整的，具体细节参考[51]；BVP 解算器和数值延拓的结合允许我们找到并继续形成相关的（部分）不变流形的轨线段的单参数族。前面部分描述的扫描方法也可以在 AUTO 软件[52]中实现，从而通过配置来解决初始值问题。本节中描述的方法对轨线段的两个端点施加边界条件，这使得该方法在更广泛的上下文中更通用和适用；参见[132]。本文描述如何建立两点 BVPs 来计算慢流形和相关的鸭轨线。

我们考虑缩放形式 (8.1) 式的两点 BVPs,

$$(8.1) \quad \begin{cases} \dot{u} = Tg(u, \lambda) \\ u(0) \in L \\ u(1) \in \Sigma \end{cases}$$

其中  $g: R^n \times R^p \rightarrow R^n$  是足够光滑的， $T \in R$ ， $\lambda \in R^p$  是参数， $L$  和  $\Sigma$  是  $R^n$  的子流形。参数  $T$  重新缩放时间变量，使得轨线段始终对应于时间间隔  $[0,1]$  中的轨线。因此，两个端点的边界条件总是适用于  $u(0)$  和  $u(1)$ ，并且  $T$  是相关联的(未缩放的)总积分时间。为了得到一个具有孤立解的适定问题，边界条件的数目应该等于方程的数目( $n$ ，因为  $\dot{u} \in R^n$ )加上自由参数的数目(对于参数  $\lambda$  和总积分时间  $T$ ，最多  $p+1$ )。我们对 (8.1) 式的单参数解族感兴趣，这意味着我们允许一个更少的边界条件（或者一个额外的自由参数）。注意，总积分时间  $T$  通常是未知的，并且可以被视为额外的自由参数。

我们首先考虑二维吸引和排斥慢流形  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  的计算。为了简化解释，我们假设我们有一个具有两个慢变量和一个折结点的三维慢系统。在此背景下，参数  $\lambda$  保持不变，并且通过施加总共三个边界条件，我们得到了轨线段的一个参数族（具有未知的总积分时间  $T$ ）。这意味着，(8.1)式中的  $L$  和  $\Sigma$  的维数总计为  $n=3$ 。我们的方法是选择  $L$  作为临界流形上的曲线（例如，一条直线），这需要两个边界条件，而  $\Sigma$  作为面（例如，平面），这需要一个边界条件，使得相关的轨线段的单参数族覆盖慢流形的所需部分。例如，为了进入折结点区域，我们设  $L$  是横截于慢流的临界流形吸引分岔的曲线， $\Sigma$  是在折结点处正交于折曲线  $F$  的面。同样的方法也适用于  $S_\varepsilon^r$ ，其中我们在临界流形的排斥分岔上选择  $L$ ，注意，对于当  $T < 0$  时的这样一组轨线段。我们注意到，这些选择也可以与扫描方法或者检测由函数的水平集定义的“停止条件”的初值解算器一起使用。慢流形可以通过选择横截面  $\Sigma$  来扩展，横截面在位于折结点之外的点上与  $F$  正交。图 6、20 和 29 给出了这种可视化的示例；还可以参见[42、43、45]。

与所有延拓部分一样，找到初值解是一个重要的问题。当延拓 BVP 的解时，显式解可能可以从其中被构造初值解中获得；参见[43]中的例子。然而，一般来说，没有显式解是已知的，并且必须以不同的方式找到初值解。我们使用同伦方法产生一个初始轨线段；主要思想是通过两个辅助 BVPs 来延续中间轨线段，第一个 BVP 从折曲线  $F$  上的点到该段获得轨道段，第二个 BVP 将  $F$  上的端点沿着临界流形移动到离  $F$  适当的距离；详见[42]。

现在我们用 Koper 模型 (4.1) 来阐明这种方法，它也在第 4 节中用于案例研究。我们设参数  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.1, 1, 7, -10)$ ，注意到在[123]中  $\lambda > 0$ ，这与第 4 节中考虑的  $\lambda = -7$  的对称情况相关。如第 4 节所描述的那样，在这个模型中有一个折结点，它在一些被观测到的 MMOs 中导致 SAOs 产生；在原始坐标中，它的坐标如下：

$$(8.2) \quad P_{\text{in}} = \left( -1, \frac{2 + \lambda}{k}, \frac{2\lambda + 4 + k}{k} \right) = (-1, -0.9, -0.8).$$

我们计算  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  作为由系统(8.1)给出的 BVPs 的解，其中  $g$  由系统(4.1)的右侧所定义。作为边界条件，我们对  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  使用相同的截面  $\Sigma$ ，分别用线  $L = L^a$  和  $L = L^r$  表示，定义如下：

$$(8.3) \quad \Sigma_{\text{in}} := \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = -0.8\}$$

$$(8.4) \quad L^a := S \cap \{x = -1.5\}$$

$$(8.5) \quad L^r := S \cap \{x = -0.2\}$$

图 33 展示了计算结果。我们分两个同伦步骤在  $S_{\varepsilon_1}^a$  上找到第一个轨线段，如图 33(a)所示。从平凡解  $u = \{P_{\text{in}} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ，出发，利用总积分时间  $T = 0$ ，我们延拓从 (4.1) 中求解出的并满足  $u(1) \in \Sigma_{\text{in}}$  和  $u(0) \in F$  的轨线段族。我们停止计算，在 AUTO 软件中由自定义的函数检测，而且

$$u(0) \in \tilde{\Sigma}^a := \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = -0.76\}$$

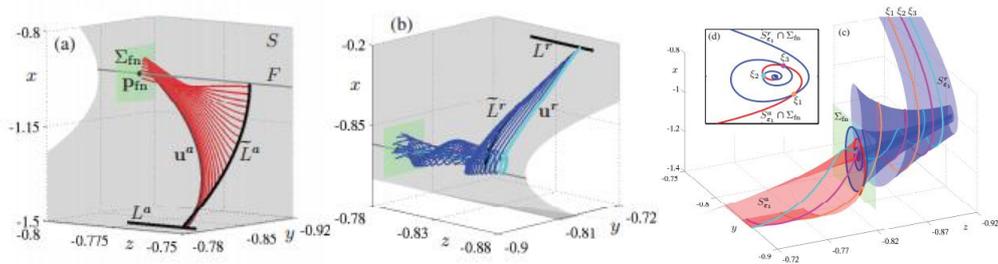


图 33: 参数为  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.1, 1, 7, -10)$  的 Koper 模型 (4.1) 的慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  的计算。(a) 显示了红轨线段的同伦族，该同伦族将截面  $\Sigma_{\text{in}}$  与临界流形  $S$  (灰色) 连接。该族中的第一条 (最上面) 曲线是由一个单独的同伦计算得到的，该同伦发现轨线段在距  $P_{\text{in}}$  的适当距离处沿  $F$  结束。第二个同伦步扫过了红色曲线族，在最后一个 (最低，暗红色) 轨线段结束，该轨线段的终点位于曲线  $L^a$  处。(b) 显示了将  $\Sigma_{\text{in}}$  与临界流形的排斥分支连接的轨线段 (蓝色) 的类似同伦族。最后一个 (最右边，青色) 轨线段从  $L^r$  开始。(c) 显示了  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  以及三个次鸭解  $\xi_1$ ， $\xi_2$  和  $\xi_3$ 。(d) 显示了  $\Sigma_{\text{in}}$  中用于探测鸭轨线的  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  的交点曲线。

图 33(a)中的  $F$  上具有它自身端点的轨线段是这个轨线段族的最后一个计算结果。同伦的第二步使  $u(0) \in S$  远离  $F$  且 (近似) 平行于  $\Sigma$ , 即我们接着延拓从 (4.1) 中求解出的且满足  $u(1) \in \Sigma_{\text{in}}$  和  $u(0) \in \tilde{L}^a = S \cap \tilde{\Sigma}^a$  的轨线段族。当到达  $L^a$  时, 延拓停止, 这在 AUTO 软件中由自定义的函数再次检测到。该族中的轨线段如图 33(a)(红色曲线)所示; 只有最后一个轨线段  $u^a$  (最低部的, 暗红色的)位于  $S_{\varepsilon_1}^a$  上, 以便于很好地近似; 这个轨线段是开始流形计算的那个。为了在  $S_{\varepsilon_1}^r$  上获得第一轨线段, 我们进行了类似的计算, 其中使用中间段  $\tilde{\Sigma}^r := \{z = -0.87\}$ ; 这在图 33(b)中已示出, 其中轨线段  $u^r$  (青色)作为  $S_{\varepsilon_1}^r$  上的初始解。

一旦发现第一轨道段  $u^a$  和  $u^r$ , 我们开始对吸引慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  进行 (8.1) 和 (83), (8.4) 的延拓, 对排斥慢流形  $S_{\varepsilon_1}^r$  进行 (83) 和 (8.5) 的延拓。结果如图 33(c) 所示,  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_1}^r$  与  $\Sigma_{\text{in}}$  的交曲线如图 33(d) 所示。在子图 (d) 中的  $S_{\varepsilon_1}^a \cap \Sigma_{\text{in}}$  和  $S_{\varepsilon_1}^r \cap \Sigma_{\text{in}}$  的横向交点对应于次要鸭轨线; 子图 (c) 中的三维视图显示了其中三个, 标记为  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  和  $\xi_3$ 。

### 8.3. 找出并追踪鸭轨线

折结点附近的最大鸭解是二维吸引和排斥慢流形  $S_{\varepsilon}^a$  和  $S_{\varepsilon}^r$  的横向交叉曲线。我们这里简要地讨论如何检测鸭形轨线, 并随后在系统参数中延拓它们; 参见 [42, 43, 45]。为了表示出最大鸭解, 我们必须使用折结点处或在其附近的折曲线的公共截面来计算  $S_{\varepsilon}^a$  和  $S_{\varepsilon}^r$ 。公共截面使得我们获得鸭轨线的表达式, 即为与轨线段  $u^a \subset S_{\varepsilon}^a$  (具有相关的总积分时间  $T^a$ ) 与轨线段  $u^r \subset S_{\varepsilon}^r$  (具有相关的总积分时间  $T^r$ ) 都相关的部分  $u^c$ , 其中  $u^a$  和  $u^r$  满足  $u^a \cap \Sigma = u^r \cap \Sigma$ 。用这种方法定位的相互关联的轨线  $u^c$  可以在系统参数中延拓, 且而无需在每一步重新计算慢流形。回想一下, AUTO 软件总是将 BVP 缩放到时间间隔 [0,1] 内, 所以我们适当地重新缩放  $u^c$  上的时间, 并在系统 (8.1) 中令  $T = T^a + T^r$ 。然后我们可以在满足边界条件 (8.6)、(8.7) 的情况下开始延拓 (在系统参数中), 边界条件决定了  $u^c$  为孤立解。事实上, 只要  $u^a \cap \Sigma \approx u^r \cap \Sigma$  这种延拓通常就会开始,  $\Sigma$  中的任何小间隙在首次牛顿步长迭代后被迫靠近。(8.6) 和 (8.7) 这两个边界条件迫使轨线段  $u^c$  保持非常接近临界流形  $S$  的吸引分支的状态, 直到接近折曲线  $F$ , 然后接近于  $S$  的排斥分支直至  $L^r$ 。图 34 显示了 Koper 模型 (4.1) 的鸭式延拓, 其中我们记  $\varepsilon_1$  为第二个自由参数 (连同  $T$ ), 并且保持  $(\varepsilon_2, \lambda, k) = (1.7, -10)$  固定。图 34(a) 显示了在面  $\Sigma = \Sigma_{\text{in}}$  部分中具有 (几乎) 相等端点的两个轨线段  $u^a$  和  $u^r$ ; 它们已经被检测为最大次要鸭轨线  $\xi_4$  的良好近似, 然后由连接轨线  $u^c$  表示。为了增加或减少  $\varepsilon_1$ , 我们延拓  $\xi_4$ , 以及其他六个最大次要鸭解, 参见图 33。图 34(b) 显示了这七个分岔, 标记为  $\xi_1 - \xi_7$ ; 在图中垂直轴表示总积分时间  $T$ , 它清楚地区分了分岔。当  $\xi_1 - \xi_7$  沿着  $\varepsilon_1$  增加的方向延拓时, 每个分岔都检测到了  $\varepsilon_1$  中的折; 我们已经在第 5 节中弄清楚了这一点, 在其他系统中 [45] 也观察到了。图 34(c) 是一个 “瀑布图”, 显示了当  $\varepsilon_1$  变化时, 最大次要鸭轨线  $\xi_4$  如何沿分岔发展; 具体地说, 用适当的偏移宽度  $\delta_i$  绘制了沿分岔  $\xi_4$  连续计算的轨线段的快速变量  $x$  的时间分布图。对应于  $\xi_4$  的折的轨线段用粗黑突出显示。观察折左侧的轨线段产生了四个 SAOs, 而经过折的只产生了三个 SAOs 跟着一个快速段。因此, 经过折的鸭轨线不再是最大鸭轨线; 参见第 5 节。

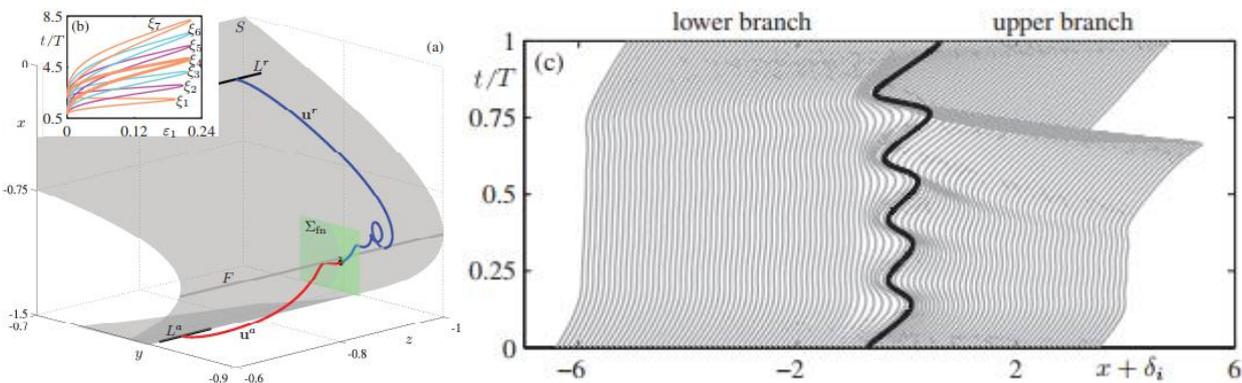


图 34: 延拓参数为  $(\varepsilon_2, \lambda, k) = (1.7, -10)$  的 Koper 模型 (4.1) 的次鸭解, 从  $\varepsilon_1 = 0.1$  开始。(a) 显示由两个轨线段  $u^a$  和  $u^r$  的连接  $u^c$  表示的鸭轨线  $\xi_4$ , 这两个轨线段  $u^a$  和  $u^r$  在  $\Sigma_{\text{in}}$  中连接。(b) 显示了  $\varepsilon_1$  中鸭轨线  $\xi_1 - \xi_7$  的延拓, 绘制了总积分时间  $T - \varepsilon_1$  图。(c) 显示了沿着分支  $\xi_4$  计算的轨线段的快速变量  $x$  (受偏移  $\delta_i$  影响) 的时间分布的二维 “瀑布图”。(c) 中的粗黑曲线是 (b) 中 (粗面) 分支的折点处的鸭轨线  $\xi_4$ 。

## 9. 总结

我们已经描述了在慢速系统中产生 MMOs 的几种机制，即在折结点附近的慢不变流形的扭转，在奇异 Hopf 分岔附近的鞍焦平衡点的二维不稳定流形之后的振荡，以及动力学 Hopf 分岔的旋转机制。几何奇异摄动理论 (GSPT) 提供了方法来识别与每个机制相关的几何结构，且量化 MMO 特征以及描述相关的分岔。折结点情况的分析比其他几种情况的分析更完整。最近关于奇异 Hopf 分岔[87]和从奇异 Hopf 到折结点的过渡[144]的研究提供了关于第二种情况的大量细节，但是关于与 MMOs 相关的奇异 Hopf 分岔的展开还有许多问题有待发现和解决。历史上，动力学 Hopf 分岔被首先发现后，对边界层方程的迟滞 Hopf 分岔的情况进行了详细的分析[169]。这些机制共同构成了在多时间尺度系统中对 MMOs 进行分类的部分框架，该框架还可以进一步扩展。也许我们所描述的理论的最令人惊讶的方面是即使这两个时间尺度都不单独显示振荡，振荡也可以从快时间尺度和慢时间尺度之间的相互作用中出现。

我们通过四个研究案例来说明相关的理论概念，并且通过这四个案例来进行数值方法的模拟计算实验。Koper 模型中的 MMOs 和 Hodgkin-Huxley 方程的三维简化形式在中间时间尺度上由于折结点和奇异 Hopf 分岔而产生 SAOs。在折结点机制中，以下三个参数对确定小振荡的几何形状起着关键作用：时间缩放比率，去奇异化简化系统中折结点的特征值比  $\mu$ ，以及全局回归轨线与某些不变流形的距离  $\delta$ 。在这些例子中，不变流形的交叉是产生 MMOs 的全局回归的先决条件，并且这些流形之间的切线构成了在产生 MMOs 的参数区域的边界上发现的一种新型分岔。在化学反应的 Olsen 和 Showalter-Noyes-Bar-Eli 模型中，我们发现了边界层方程的快速振荡。由于动力学 Hopf 分岔的旋转机制，两个模型都显示出 MMOs。这两个研究案例还说明了如何把该理论应用于高维情况，以及如何扩展数值工具以研究和判别在高维系统中生成 MMOs 的机制。

本文的目的之一是促进动力学模型与数据的拟合。对于 MMOs 来说，这个目标任务没有像其他许多非线性动力学现象那么成功。一方面，MMOs 是一个复杂的现象，另一方面，模型的数值研究过程中产生了令人困惑和有时自相矛盾的结果。迄今为止发展起来的理论最适用于处理下面的这种情况，即 SAOs 的振幅太小，甚至在数值模拟中也无法观察到，但是模型研究经常显示出具有 SAOs 的 MMOs 是容易看到的。因此，判别该理论所强调的几何对象的数值方法是将理论、模型和经验数据结合在一起，而这也是必需的。我们回顾一下在三维模型中特别重要的二维不变流形及其交的计算方面的最新进展。这个学科进一步发展的挑战之一是将这些方法扩展到更高维度是。

在下一节中，我们将简要回顾 MMO 的相关参考文献，其中包括许多实验研究的参考文献，然后简要讨论在 ODE 和其他领域中产生 MMOs 的其他机制。最后，我们讨论一些需要进一步研究的突出问题。

### 9.1. MMO 文献综述

表 4 MMOs 实验研究的参考文献

系统/反应	参考文献
Belousov-Zhabotinsky (BZ) reaction	
- Virginia	[85, 106, 107, 108, 204]
- Texas	[157, 158, 159, 196, 197]
- Bordeaux	[8, 9, 185, 195, 231]
- Other groups	[110, 156, 186, 187, 208]
Briggs-Rauscher (BR) reaction	[28, 75, 172, 234]
peroxidase-oxidase (PO) reaction	[78, 100, 101, 102, 103, 109, 174, 209]
HPTCu reaction	[15, 138, 177, 178, 230]

Bray–Liebhafsky (BL) reaction	[75, 150, 233]
copper and phosphoric acid	[6, 202]
indium/thiocyanate (IT) reaction	[126, 127]
BSFA-system	[129]
p-CuInSe <sub>2</sub> /H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> -system	[168, 184]
spin-wave experiment	[5]
rhythm neural network (PreBotC)	[40]
stellate cells	[47, 48, 63]
pituitary cells	[228, 232]
combustion oscillations	[84]
dusty plasmas	[161]
semiconductor lasers	[7, 83, 229]
CO oxidation	[59, 60, 137]

本节以三个表格的形式提供相关的参考文献的概述，其中 MMOs 的示例已经在实验或模型系统中进行了研究。我们不肯定此概述是完整的；相反，这些表目的是作为关于找到这个主题的大量文献的切入点。表 4 列出了 MMOs 的相关实验工作。这些实验大部分是针对化学反应进行的。

表 5 展示 MMOs 的现实数学模型参考文献

数学模型	维数	参考文献
Belousov–Zhabotinsky (BZ) reaction		
- Field–Koros–Noyes (FKN)	11	[72]
- FKN-extended (GTF-model)	26	[98]
- Showalter–Noyes–Bar-Eli	7	[16, 36, 155, 190, 207]
- (minimal) Oregonator	3	[73, 181, 205, 221, 223]
- Model K (“Kyoto”)	3	[219, 224]
- IUator (“Indiana University”)	4	[203, 224]
- Geiseler–öllner Oregonator	3	[79, 224]
- FKN-modified	7	[188]
- Zhabotinsky–orzuhkin	3	[245]
BR-reaction		
- De Kepper, Epstein; Furrow, Noyes	11	[39, 171, 172, 222, 234]
- Kim, Lee, Shin	8	[121, 122]
- Vukojević, Sorensen, Hynne	13	[234]
PO-reaction		
- Olsen / DOP models	4	[4, 37, 44, 151, 153, 154, 174, 210]
- BFSO model, Urbanalator	10	[29, 30, 102, 152, 175, 200]
- Yokota–Yamazaki (YY) model	8	[67, 201, 243]
- FAB model	7	[66, 201]
- Model A, Model C	9, 10	[2, 3]
- Model C-HSR	12	[109]
Plenge model (hydrogen oxidation)	4	[11]
IT-reaction	3	[124, 125, 126, 128]
BSFA-system	4	[129]

p-CuInSe <sub>2</sub> /H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> -system	2, 4	[168, 184]
self-replicating dimer	3	[180, 183]
autocatalytic SU3 unit	3	[220]
Hodgkin–Huxley (HH)	4	[54, 198, 199]
self-coupled HH	3	[55]
CO oxidation	3	[60, 137]
self-coupled FitzHugh–Nagumo (FHN)	3	[42, 237]
FHN, traveling frame	3	[91, 93]
combustion oscillations	3	[77, 84]
stellate cells		
- Acker, Kopell, White (AKW)	7	[1, 193, 239]
- reduction of AKW	3	[112, 194, 239]
pituitary cells	3, 4	[170, 211, 215, 232]
dopamine neurons	4	[140, 160]
autocatalator	3	[94, 162, 163, 182]
LP neuron	14	[89]
Erisir model	5	[64, 65]
semiconductor lasers	3	[7, 53, 134, 136, 179]

正如参考文献[8]中所建议的, 我们已经将大量关于 BZ 反应的文献细分为一个研究组。表 5 列出了针对以 MMOs 为特征的特定应用而导出或提出的数学模型的参考文献; 表 4 中的若干论文还包含理论模型, 因此在表 5 中再次列出。最后, 表 6 列出了几个抽象模型, 它们被设计为产生具有特定特征的 MMOs 的最简单系统之一; 表的前五行列出了本文所提出的折结点、折鞍结点和奇异 Hopf 分岔的框架。

表 4-6 中的化学反应特征很强。从质量作用定律出发, 已经作出大量努力来建立能够再现实验观测的模型。我们注意到, 试图捕获反应的全部化学的详细模型通常非常严格, 并且包含大量参数; 因此, 常常难以将模型拟合到实验数据。我们希望本文中所回顾的理论和数值方法能够使模型与数据更好地拟合。注意, 最近 MMO 对神经科学的兴趣也反映在这三个表中。

从质量作用定律出发, 已经作出大量努力来建立能够再现实验观测的模型。我们注意到, 试图捕获化学反应的全部详细模型通常非常困难, 并且模型中会包含大量参数; 因此, 常常难以用模型来拟合实验数据。我们希望本文中所回顾的理论和数值方法能够使模型更好地与数据相吻合。

表 6 展示 MMOs 的抽象模型参考文献

抽象模型	维数	参考文献
Boissonade and De Kepper; Koper	2, 3	[26, 38, 123]
Boissonade and De Kepper; Strizhak	2, 3	[26, 82, 120]
Kawczynski and Strizhak	3	[116, 117, 186, 187]
folded node toy model	3	[31]
3-scale: Krupa, Popovi'c, Kopell	3	[139, 140]
Hopf-hysteresis normal form	3	[16, 188]
two coupled oscillators	4	[212]
Rössler; Gaspard and Nicolis	3	[16, 76]
Barkley	4	[16]

## 9.2. ODEs 中的其他 MMO 机制

在历史上, MMO 也曾在具有单个时间尺度的系统的分岔背景下进行研究。更具体地说, 涉及一个或多个不变对象的同宿循环或异宿循环为 MMOs 提供了一种不需要显式慢-快结构的机制。最著名的例子是在  $R^3$  中的同宿轨线到鞍焦点的情况。Shilnikov[90, 148, 206]的一个定理证明(取决于鞍焦点的特征值的条件)在同宿轨线的管状邻域中存在一个或多个周期轨线; 参见[81]。靠近这个全局分岔的每个这样的周期轨线都涉及沿着同宿轨线的一个或多个大的偏移, 以及当轨线螺旋离开或回到鞍焦点时的小振荡。这种在 Shilnikov 分岔附近的振荡很容易在激光系统中发现: 激光功率的一个或多个大脉冲之后紧接着在鞍焦点附近有小的阻尼振荡; 参见[7,53,83,134,136, 179,229,241]。小振荡产生于特征频率处, 并且是由于光场和载流子存储器(半导体激光器情况下的电子-空穴对)之间的周期性能量交换导致产生的。类似地, 更复杂的异宿循环可能导致大的偏移, 然后是小的振荡。一个具体的例子是鞍平衡和鞍周期轨线之间的异宿循环, 例如, 在具有全局再注入的鞍结点 Hopf 分岔附近可以发现上述情况。在这个全局分岔附近, 人们可以发现大的吸引的周期轨线, 它们向平衡点附近靠近, 并且在鞍周期轨线周围具有任意数量的小环; 参见[130, 135]。

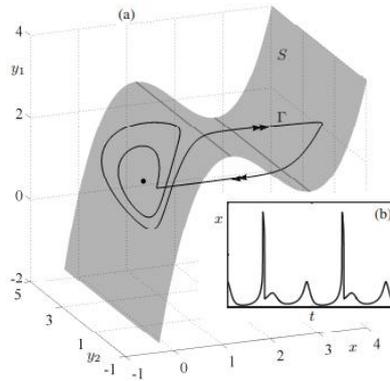


图 35: 在 Gaspard-Nicolis-Rossler 模型中的 MMO 周期轨线 [76]。(a) 显示了相对于 S-形临界流形的  $\Gamma$ ; 这说明 SAOs 完全产生在临界流形上。(b) 显示了  $\Gamma$  的  $x$ -坐标的时间序列。

虽然这种全局分岔是普遍的并且不需要系统的特殊性质, 但它们经常出现在慢速系统中, 并且证明它们的存在在参考文献[164, 213]中被大大简化了。Rossler 在[191,192]中介绍了一个值得注意的例子, 后来这个例子由 Gaspard 和尼科利斯在[76]中提出的一个模型里加以说明。图 35(a)显示了这个模型的几何结构, 它有一个具有两条折线的经典 S 形临界流形 S, 并且存在一个包含两个快段的稳定的 MMO 周期轨线。图 35(b)显示了  $\Gamma$  的一个坐标对应的时间序列, 并说明  $\Gamma$  具有特征 12。 $\Gamma$  的 LAOs 是由通常的张弛振荡机制形成的。

图 35(a)中的相图是靠近(简单的)Shilnikov 分岔的情况; SAOs 的发生是因为在一个快速转变之后,  $\Gamma$  处于鞍焦平衡点附近, 鞍焦平衡点是慢流的不稳定焦点。注意, 时间序列还表明 SAOs 发生在慢的时间尺度上。Barkley[16]观察到, 这种机制不能解释 MMOs 在 BZ 反应中产生的原因, 因为 SAOs 也有快速的成分。此外, 这种特殊的机制似乎并不像第 3 节中所介绍的慢-快机制那样经常出现在其他模型中。直观地讲, 这种情况是预料之内的, 因为全局回归机制必须是特殊的(即靠近 Shilnikov 分岔), 以提供返回到慢流焦点的小邻域内。然而, Rossler 机制在历史上作为最早提出的产生 MMOs 的几何机制之一而备受关注。这也是另一个很好说明了利用系统的慢特性来理解产生 MMOs 的几何方法的例子。

在具有单个时间尺度的系统中, 亚临界 Hopf 分岔也被观察到产生了 MMOs。这些 MMOs 的外观形状类似于与 Shilnikov 分岔相关的 MMOs 的外观形状。Guckenheimer 和 Willms[95]分析了这种现象, 我们在这里也简要地描述一下这种现象。考虑一个三维系统, 其中平衡点  $q$  通过亚临界 Hopf 分岔从下沉点到鞍焦点的转变。当  $q$  是鞍焦点时, 它具有  $O(1)$  量级的实特征值和一对实部较小且为正的复特征值。接近  $q$  的稳定流形的轨线将流到  $q$  附近, 然后随着振荡幅度的增大而缓慢地螺旋离开, 类似于在奇异 Hopf 分岔附近观察到的那些情况; 参见图 21。如果这些螺旋形轨线全局回归到  $q$  附近, MMOs 就会产生。 $q$  的不稳定流形的部

分的全局回归是鲁棒的，并且可能已经存在于 Hopf 分岔处，其中  $q$  的中心流形是弱不稳定的。在这种情况下，回归可能会接近  $q$ ，从而引起长期的小幅、缓慢增长的振荡。有关三维示例，请参见 Guckenheimer 和 Willms[95]以及 Guckenheimer 等。[89]给出了一个发生在神经模型中的高维示例。我们注意到，虽然这种用于产生 MMOs 的机制适用于单时间系统，但是 Hopf 分岔自然地在系统中引入了与不稳定复特征值的实部相关联的慢时间尺度。

我们在此次研究中讨论的 MMOs 具有在限制性系统的特定点附近的局部机制生成的 SAOs。然而，SAOs 和与之相关 MMOs 也可能在慢-快系统中以其他方式出现。这方面的一个例子是具有两个明确定义的独立振荡的 MMOs，当边界层方程具有两个周期轨线族（一个大轨线族，一个小轨线族）并且它们之间会发生快速跳跃。这种情形类似于神经系统中常见的突发现象。在突发过程中，振荡与静止两种状态交替出现时期（与沿着边界层方程的稳定平衡点的缓慢偏移相关），而不是存在不同振幅的振荡。自 Rinzel[189]开创性工作以来，突发一直被视为一种多时间尺度现象。在这种情况下，当模型的边界层方程同时具有平衡吸引子和极限环吸引子并且整个系统在这两个方向上的这些特征之间快速跳跃时，就会发生突发。Izhikevich[111]根据引发和终止突发振荡的边界层方程的分岔，对突发模式进行了分类。可以为 MMOs 构建一个类似的分类列表，但是这的表会更大。Golubitsky、Josic 和 Kaper[80]使用基于奇异性理论的不同类别的突发模式，这更符合本研究的宗旨。第六节简要介绍了对 MMOs 中大振荡和小振荡之间相互转换的全局机制的分析。

### 9.3. 除了 ODEs 之外的 MMOs

本综述只考虑在慢速 ODEs 中出现的 MMOs，但也发现在由随机微分方程(SDEs)、延迟微分方程(DDEs)和偏微分方程(PDEs)描述的动力系统中也有 MMOs 产生。在这些更复杂的系统对 MMOs 的分析比 ODEs 的分析要少得多。我们现在简要地描述几个最新的例子，在这些例子中慢-快结构是已经被确认的 MMOs 的一个重要方面。

#### 9.3.1. 随机的 MMOs

Muratov 和 Vanden-Eijnden[166]研究了具有小(附加的)噪声的 Van der Pol 振荡器，它们使用  $\lambda$  作为分岔参数，并考虑  $0 < \varepsilon \ll 1$  情形。他们的分析表明噪声和奇异摄动参数  $\varepsilon$  之间的复杂相互作用，以及它如何依赖于  $\lambda$ 。例如，该分析可以表明，即使无噪声的确定性极限对于适当的  $\lambda$  只有一个稳定的不动点，SDE 也可以表现出张弛振荡，并且也可以出现由“小鸭轨线”和张弛 LAOs 组成的 MMOs。Borowski 和 Kuske[146]考虑 FitzHugh–Nagumo 类型的类似的随机慢-快方程，从而发现由于噪声导致的 MMOs；参见[147]。与此密切相关的是 Berglund 和 Gentz[24, 25]的工作，他们在 SDEs 的框架内研究具有噪声的慢-快神经模型中的尖峰时期。这些例子中的共同成分是具有可激发性：虽然小噪声只导致小的不规则振荡，但是足够大的噪声扰动可以使系统超出导致大偏移的阈值。当系统密切相关或规则时，存在一个噪声电平（噪声级），因此显示出定义良好但不规则的 MMOs。在几个激光系统中[56, 134]也观察到和研究了作为外部和/或内部噪声产生大脉冲的机制的激发性。

Yu Kuske 和 Li[244]研究了噪声诱导产生 MMOs 的另一种可能机制，他们考虑了耦合振荡器 SDEs 系统。如果确定性极限至少是双稳的，那么噪声可以提供一种机制，使样本路径在确定性稳定不变集的吸引域之间交替。可视化这个想法的最简单方法是考虑 ODE 的两个稳定极限环，一个具有较小振幅，另一个具有较大的振幅。如果吸引流域的位置合适，噪声可以引起每个周期的管状邻域之间的重复转换。因此，典型的样本路径将是不规则的 MMOs。

#### 9.3.2. 在 DDEs 中 MMOs

人们可能会问，当向慢-快系统添加延迟项时会发生什么。Sriram 和 Gopinathan[208]在实验中考考虑具有延迟的 BZ 反应。他们把结果与经典的具有延迟的三维 Oregonator 模型[73, 205]进行比较，并声称延迟诱导 MMOs 的产生[208]。这引发了一个问题，即 DDEs 是否具有慢-快现象，如鸭解，与 ODE 对应类似。原则上，这应该至少对于有限数量的固定延迟的情况是希望得到的，对于有限数量的固定延迟，DDE 不具有连续谱

[96]。的确，Campbell、Stone 和 Erneux[32]最近针对高速运转的二维 DDE 模型得到了确切的答案。在他们的系统中，小延迟引起了来自退化（衰减）Hopf 分岔的扰动，这导致产生了如 2.2 节中所讨论的鸭爆炸；为了解具有小延迟的慢-快 DDEs 的基本理论的细节可以参见[34]。

### 9.3.3. 在 PDEs 中的 MMOs

给定定义在  $R^n$  中的与时间相关的 PDE，可以在空间、时间或时空中寻找 MMOs。Nagumo 方程[167]模拟了激活剂  $v(x,t)$  和慢阻滞剂  $w(x,t)$  的演化，该模型是作为动作电位传播的理想化模型而广泛研究的一个例子。通过拟设  $v(x,t) = v(x,\sigma) = v(\tau)$  和  $w(x,t) = w(x,\sigma) = w(\tau)$  作为具有两个快变量和一个慢变量的三维 ODE 的同宿解[92]，这里  $\sigma$  是波速。已经表明，MMOs 作为这种简化 ODE 的解而存在[93]。更一般地，对通过 PDE 给出的演化方程的研究表明具有交替振幅[35]和慢-快结构[17]的振荡样式存在于许多常见模型中。因此，针对 PDEs 的这类 MMO 的研究将从多时间尺度方法中受益。

## 9.4. MMOs：将理论与数据结合在一起

最后，我们对多时间尺度 ODE 模型中 MMOs 的未决问题作了一些补充说明。我们把对 MMOs 研究的中心目标看成是对实验数据的综合分析：这个观点形成了我们对于进一步研究 MMOs 的优先次序的想法。以上综述的 MMOs 文献只有少量的实验数据，但这足以引起我们对是否已经发现了捕捉实验中观察到的 MMOs 本质的模型的关注。在这篇综述中，我们讨论了 SAOs 的振幅和产生 MMOs 的参数范围的大小，但是没有探讨我们对实验数据的发现的影响。我们建议将这些特征用于模型与数据的拟合。

MMOs 的研究起源于化学反应中振荡的研究，特别是在 20 世纪 70 年代和 80 年代，当时人们感兴趣的是确定这些系统中的非周期动力学是否是确定性混沌还是噪声的产生的结果。以 BZ 反应为研究对象，建立了复杂动力学系统的定量模型。尽管如此，这些为反应建立精确动力学模型的尝试只是部分成功。这些模型具有多个时间尺度，使得很难根据当时存在的理论来解释它们的动力学。从那时起，GSPT 的进展表明，对这些模型的重新研究可以在已被抛弃的问题上取得重大进展，而没能在一代人之前得到解决。新技术也可能使实验能够比 1980 年代更精确地测量这些反应的动力学。然后，现在，研究这些反应的动机之一是开发研究生物系统动力学的方法。

这次调查研究的重点是通过特殊点附近的通道产生 SAOs 的局部机制，这些特殊点通常可以在多时间尺度系统中找到。MMOs 是在返回机制之前产生的，返回机制允许轨线一次又一次地通过 SAOs 区域。我们这里只考虑返回机制，该机制在一次大的偏移之后立即将轨线带回 SAO 区域，这对应于一个单 LAO。然而，MMOs 可能在产生 SAOs 时期具有更一般的特征，该特征伴有多个 LAOs 的。迄今为止，对于  $L > 1$  的 MMOs 的产生机制研究甚少。对于一些具有两个慢变量和一个具有 S 形临界流形的快速变量的三维系统，从 SAOs 周围的区域返回到其自身的全局回归是非常规则的，并且可以通过大约一维线性映射来近似。这个场景预计不会产生许多  $L > 1$  的复杂特征。对于具有三个时间尺度[139, 140]的系统，也被分析出了类似的效果，其中被找到的唯一特征是  $2^1$ ， $2^2$  和  $L^1$ 。这些结果也得到了其他几个三维模型[123、126、182、198、199]和在 [6]中实验的数值证据的支持。

目前文献中很少对  $L > 1$  的更复杂的 MMO 特征进行详细分析。这种情况似乎最常发生在高维化学反应中，如 BZ 反应[159,157,158,106]、Briggs–Rauscher 反应[122]和 PO 反应[154,151]；参见第 7 节。我们讨论了一种获得把  $L > 1$  的 LAOs 作为 MMO 一部分的可能性：在 MMO 轨线重新进入 SAO 区域之前，快子系统中存在几个大的振荡。正如 3.3 节所述的那样，这要求至少在相空间的某些部分中存在二维快速动力学。我们注意到，在具有两个或更多个快速变量的系统中， $L > 1$  的 MMOs 的存在类似于在突发系统[111]中发现的振荡。在具有 MMOs 的慢速系统的边界层方程中，很少会去尝试分析跟随周期轨线族的 LAOs 的起始和终止相关的机制。对于突发，Terman 和 Lee 的论文[217]是一篇很具有代表性的研究。更一般地，对于在具有至少两个慢变量和两个快变量的系统中的 MMOs 来说，人们期望发现大量的不同的全局回归机制，这些机制可能在 SAOs 存在的各个时期导致产生多个 LAOs。

对具有两个以上慢变量的慢系统的研究才刚刚开始。Wechselberger 在论文[238]中将鸭解理论推广到这类系统中。以及 Harvey 等人在[99]中利用这些结果来研究细胞内钙动力学的模型。

在模型中的 MMOs 的大部分分析都是基于分岔序列的数值研究和用一维映射的迭代对这些序列进行解释。理论上，本文所举的回归映射的性质的例子可以分解为两个映射的组合，第一个描述流经产生 SAOs 的小区域，第二个描述从该区域出现的轨线的全局返回。这些映射相当复杂，值得进一步研究。在具有 SAOs 的区域，它们可能具有不连续性和间断，其中轨线趋向于小的吸引子，并且跟随鸭解的轨线的情况通常很难计算。在回归映射的一维近似中的分岔和混沌的更多分析可能有助于进一步表征实验数据中观察到的 MMOs 的潜在机制。完成此类分析的一个重要系统是 Koper 模型及其作为具有全局返回的奇异 Hopf 分岔的修正标准式的推广。

动态系统理论的一大亮点是它成功地判别了捕获于大类系统中被发现的行为的本质的简单模型。尽管如此，我们分析像化学反应动力学或棘突神经元的现实模型那样复杂的模型的能力受到数值方法的有效性的限制。我们在这里已经演示了如何将用于慢系统的高级数值方法用于研究多达四个维度的系统。然而，对高维、多时间尺度系统的动力学分析方法的进一步发展是十分必要的。在具有低维吸引子的情形中，用更好的方法使系统化模型简化对研究分析是有帮助的。在更一般的情况下，计算不变流形的数值方法和高维系统中轨线的快速分解也有助于 MMOs 的分析。特别地，这种数值技术对于研究新型返回机制以及因此产生具有更复杂 LAOs 和 SAOs 特征的 MMOs 将是至关重要的。

## 致 谢

通过对康奈尔大学 M.D.B.K.和 H.M.O.的研究访问，对悉尼大学的 J.G.B.K.和 H.M.O.的研究访问，以及对布里斯托尔应用非线性数学中心的 C.K.和 M.W.的研究访问，使我们的合作成为可能。在此，我们感谢这些机构的盛情款待和支持。