

在最小的模型中的抛物簇发放，倍周期和切片

Mathieu Desroches^{1, 2}, Jean-Pierre Francoise³

Martin Krupa⁴

¹ 神经数学小组, 索菲亚, 法国

² 法国尼斯蔚蓝海岸大学

³ 法国巴黎索邦大学的雅克-路易狮子实验室

⁴ 尼斯大学索菲亚安蒂波利斯分校, 法国尼斯实验室

*通讯作者: mathieu.desroches@inria.fr

摘要

为抛物线簇放电, 其相关联的缓流是积, 最小系统的提出并从慢快系统的分支理论的观点出发, 研究了其相位的肖像和数值模拟的定性分析两者。我们专注于穗增加的现象进行分析。减少对周期性强的的一维系统后, 我们揭开与第一通过 J.E. 的在他的著名文章的定期强制范德波系统讨论的骤降和切片的链接。

关键词和短语: 抛物线簇放电, 加周期, 骤降和切片

1. 引言 簇放电是神经活动的一个基本的节奏, 不论是内在的或外在的 (当施加外部刺激的施加); 在生物数据无处不在, 特别是从脑, 可以用不同的框架内的数学方程, 特别是常微分方程 (常微分方程) 具有多个时间尺度建模。簇放电活动的慢后快的模型已被开发, 无论是生物物理学和现象学, 自 20 世纪 70 年代进行分析。Rinzel 的在 80 年代中期的开创性工作[39, 40]已经导致使用数学标准, 特别分岔理论簇放电图案的第一分类。后来, 该第一分类用 Izhikevich 完成[26]要概括使用辅助所谓的快速子系统的分岔发起和终止一个爆破系统的突发的想法。在[6,19]获得进一步簇放电分类作品。第三类 Rinzel 的被表示为抛物线破裂并且它对应于一个 SNIC-SNIC 在由 Izhikevich, SNIC 引入的分类静置上不变圆鞍节点 (分叉) 爆裂。这是因为底层的簇放电爆破系统具有二维快速子系统显示两参数家族 SNIC 分岔的, 其组织从静止到突发和在全系统恢复的过渡。本文件的主要结果是引入新的抛物破裂器, 其相关联的慢子系统是积, 并因此在其中尖峰增加更容易地分析的。一种新的光栅上, 组织突发大小在这个类爆破系统的这种尖峰增加结构。我们的系统具有沿各两条折叠线的圆筒状临界歧管, 其中一个可以找到所谓折叠鞍奇点和相关联的解决方案, 鸭存在的条件; 记得, 鸭翼被解决方案力求贴近排斥慢动作的歧管很长一段时间间隔[2, 17, 30]。取决于慢周期强迫, 我们得到尖峰加入鸭爆炸[12, 47]组织从慢振荡过渡到通过使邻近的一个或两个折叠的鞍座爆裂。在每一个情况下, 脚本是相同的: 所述第一尖峰经由折叠鞍和其相关联的鸭翼附近的慢通路加入的, 而随后的那些经由近跳通点[11] (一对折点的通道加入线, 其中所述缓慢流动点远离折叠在两个方向上) 和折叠鞍鸭溶液的排斥段。这提供了一个进一步的, 为了提高现有机型更好的理解抛物线破灭的显著特征。

抛物线型簇放电的生物数据的观察, 第一重要的参考是对海兔, 这是一个软体动物[35-38]的 R15 神经元著名的植物模型。该模型是在他们的 1952 年的开创性论文[25]由诺贝尔奖获得者艾伦霍奇金和赫胥黎引入的电导框架内构建。这五维模型不是单独扰动, 因为它不具有明确的小参数, 但是它清楚地显示慢快动力学, 在抛物破裂极限环的形式, 并且一个可识别 3 个快速变量和 2 个慢变量。主状态变量是膜电位 V 和它是快速; 两个慢变量, x 和 Ca , 都涉及到钙。由该模型产生典型的抛物线爆破周期 Γ 在图 1 中图 1a 示出了相位空间投影到 (x, Ca, V) 第空间, 其中, 所述绿色表面是通过求解 V 中的得到了快速零值线 (隐含的) 平衡方程为在一定范围内的缓慢变量值的快速变量 x 和 Ca 中这种快速零值线被称为系统的临界流形 S_0 。慢动力学发生非常临近

S_0 的下吸引片材和作为轨迹到达 S_0 执行折叠曲线 F 发生快速动力学的过渡。在抛物线破裂的特定情况下, 从静止(慢)相到突发和背面均对应于 F , 其是快速子系统的 SNIC 分岔点的曲线附近的通道的过渡; 这证明, 所述脉冲串开始和终止与非常低的频率。这是当进一步与 SNIC 曲线 F 到慢变量的平面一起突出轨道更好观察到这在图 1b 中, 其中一个可以清楚地观察这样的抛物线破裂循环的两个阶段进行, 分离被 F , 慢相至 F 的右侧和快相或突发到左边。图 1c 示出了用于爆破周期 Γ 膜电位时间曲线。这凸显了抛物线破灭的典型特征。即, 首先的事实, 这爆破方案可以被看作是一个缓慢振荡这是可能的顶部尖峰(脉冲串)的复发性基团由于两个慢速变量, 这里 x 和 Ca 的存在; 第二, 事实上, 每个脉冲串期间, 峰峰间隔大的开头和在脉冲串的末端, 因此给人一种抛物线形曲线如果相对于时间绘制。每个突发尖峰的数目非常非线性地依赖于模型的关键参数(例如钠最大电导)和, 从在一些参数政权慢峰周期, 作为一个参数被改变的解决方案能够获得越来越多的尖峰。这些尖峰添加过渡最近分析了几何奇异扰动理论的框架中[13], 并将其结果表明, 它们被折叠鞍型的鸭翼组织; 也见[14]。

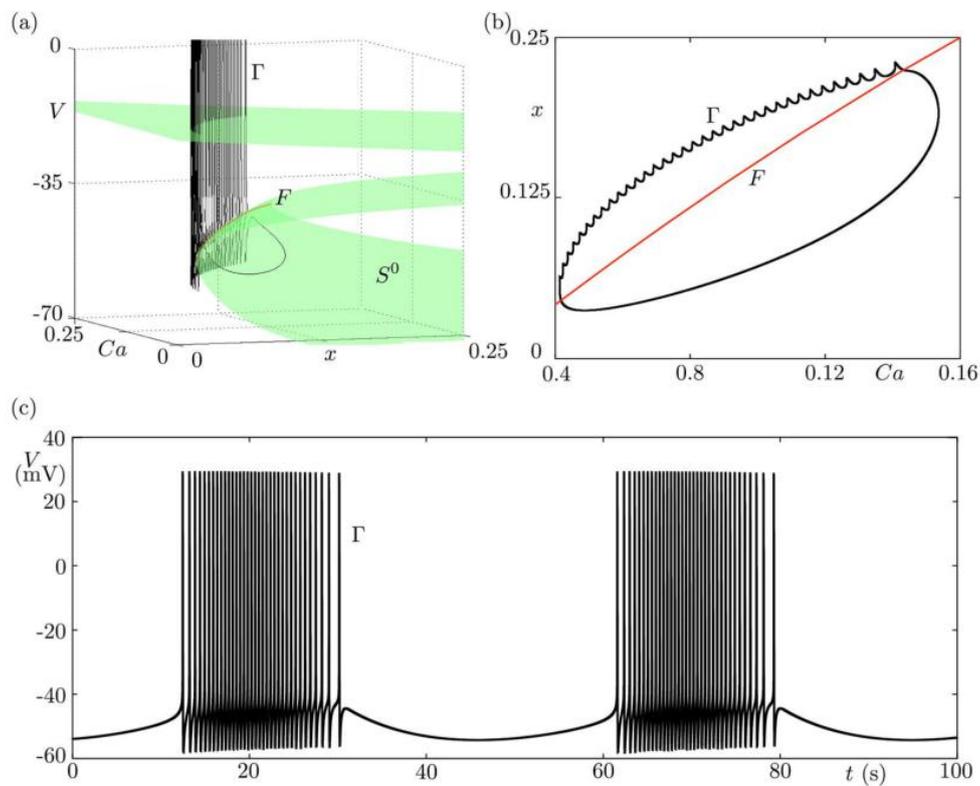


图 1. 抛物线簇放电植物型号为海兔的 R15 神经元。

有生物物理模型抛物线破裂的许多其他例子; 例如见[1, 10, 29, 44]。我们要提到最近对 GnRH 神经元的电活动的贡献。在[34], Moenter 等。建模的事实, 促性腺激素释放激素分泌的神经元可以显示出活性, 其中所述突发被叠加到代表链接到分泌活动节奏慢波的抛物线破裂图案; 对于其它类型的在 GnRH 的神经元模型分泌活性的, 见[9]。抛物线爆发源的最小相位模型首先通过 Ermentrout 和 Kopell 引入了所谓 Theta 模型[18], 有时也被称为环礁模型[28]; 也见[45]。尖峰将经由鸭翼在环礁模型跳上个[13]相关。更一般地, 在上两圆环定义慢快平面系统鸭翼进行了研究通过的 Guckenheimer 和 Ilyashenko 在[24], 然后通过 Schurov 和合作者在[41-43]然而, 但无抛物线破裂或尖峰增加作出的任何链路。

在本文中，我们提出了抛物线爆裂新最小模型（第2节），其显示一可积相关的慢子系统；注意，SNIC的通用开变形恰恰需要两个参数。我们通过把其上的区别，其中尖峰除了基于折叠鞍鸭翼的第一过渡尖峰加入情景的重点，分析这个最小的系统，而后续者通过跳跃式的点（仍接近折叠鞍）加入。我们还描述了折叠同宿分叉是发生在慢子系统的地方，这是已经在[13]确定为穗抛物线爆发源添加的关键因素。然后，我们表现出逐渐减少的初始模型，以一维常微分方程与强制范德波系统定期强制允许比较。这导致我们（在第3款），以无头鸭翼和波谷之间的等价性，一方面，和前翼的头部和切片，在另一方面。这些特殊的解决方案是由在他的强制范德波开创性的一个系列文章介绍，它主要是提供采用鸭式解决方案的第一个历史遭遇。我们详细描述在底层（时间依赖性）快的系统的零值线可以表示，并有助于对慢-快效果托换鸭动力学揭示时间序列骤降和切片的几何形状。

2. 最小的模型

现在我们考虑一个最小SNIC振荡器，即

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\theta} &= a - \sin\theta\end{aligned}$$

或写入直角坐标系

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x^2-y^2) - y\left(a - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) + x\left(a - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

然后，我们定期在经过了慢谐振子迫使这个最小SNIC振荡器

$$\begin{aligned}a' &= \varepsilon(\mu - \mu_c), \\ \dot{\mu} &= \varepsilon(a_c - a)\end{aligned}$$

其中， μ_c, a_c 是决定所有周期轨道解决方案，系统(2.3)的中心的两个真实参数。

收集系统(2.1)和(2.3)和重新尺度化时间给出了以下两个慢速/两快在慢速时间表达系统

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{r} &= r(1-r^2), \\ \varepsilon\dot{\theta} &= a - \sin\theta, \\ a' &= \mu - \mu_c, \\ \dot{\mu} &= a_c - a\end{aligned}$$

系统(2.4)是一个抛物线簇放电模型。其笛卡儿临界流形为：

$$S^0 = \{(x, y, a, \mu) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 = 1, a = y\}$$

在极坐标，临界流形的形式为

$$S^0 = \{r=1, a=\sin\theta\}$$

两个折叠线由条件 $\cos\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$.

2.1 慢流和去奇异化

用 $\varepsilon=0$ 限制系统的(2.4)产生了所谓的慢子系统，也被称为减小的系统(RS)，其捕获原始系统的慢动力学的近似，约束演变对临界流形 S_0 。在目前情况下，我们得到

$$\begin{aligned}0 &= r(1-r^2), \\0 &= a - \sin \theta, \\a' &= \mu - \mu_c, \\\dot{\mu} &= a_c - a\end{aligned}$$

系统 (2.7) 是一个差分代数方程 (DAE)。人们可以获得关于快速变量的动态信息 r 和 θ 在该单数的限制, 由系统 (2.7) 相对于所述两个代数方程分化为时间。对于第一个, 这带来了

$$-2r\dot{r} = 0,$$

给定的正对临界流形 S^0 。约束等式 (2.8) 意味着 $\dot{r} = 0$, 这与该 S^0 由 $\{r=1\}$ 给出的事实是一致的第二代数方程 (2.7), 一旦分化相对于时间, 给

$$a' - \cos \theta \dot{\theta} = 0,$$

这是我们添加通过在 $\varepsilon=0$ 极限 (2.7) 不受影响两个慢方程。按照惯例, 因为临界歧管是二维的, 我们预计所得限制系统到相平面我们选择是 (θ, μ) 面。我们得到如下降低了系统

$$\begin{aligned}\cos \theta \dot{\theta} &= \mu - \mu_c, \\\dot{\mu} &= a_c - \sin \theta\end{aligned}$$

因为我们有一个 $a = \sin \theta$ 。系统 (2.10) 是沿 S^0 , 也就是折叠线奇异的, 在点其中 $\cos \theta = 0$ 。克服此问题的经典工具是“扩展”的缩小系统, 以折叠线通过用因子 $\cos \theta$ 重新缩放时间。我们得到所谓的去奇异化降低系统 (DRS)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \mu - \mu_c, \\\dot{\mu} &= \cos \theta (a_c - \sin \theta)\end{aligned}$$

位于所述折叠线 (这正是出现通过变换 RS 到 DRS 的时间重新缩放) DRS 系统的均衡是所谓的伪均衡或原始系统的折叠奇点。因此, 我们可以得出这样的结论系统 (2.4) 在已折叠的奇点

$$(\theta, \mu) = (\pi/2 \bmod \pi, \mu_c)$$

在 $(\pm\pi/2, \mu_c)$ 中的雅可比矩阵由下式给出

$$J^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 \mp a_c & 0 \end{pmatrix}$$

其决定因素是

$$\det(J^\pm) = -1 \pm a_c$$

因此, 对于 $|a_c| < 1$, 这两个折叠奇点的马鞍形。特征值:

$$\lambda^\pm = \pm \sqrt{1 \pm a_c}$$

和特征方向由线性关系来定义

$$\mu = \lambda \theta$$

在折叠鞍场景中, 由于 θ 相关时间重新缩放如上定义, 并且其允许解决沿减小的系统, 所述稳定和 DRS 对应的鞍平衡的不稳定流形对的特殊轨迹的折叠线的奇点交叉折叠鞍在有限时间内的 RS 沿着临界歧管的吸引和排斥片既因此流动。在从吸引侧到排斥一个在正向时间折叠鞍一个轨迹穿过, 并且其对应于 DRS 的车座的稳定流形。因此它有鸭翼的行为, 它被称为真正的鸭式折叠鞍的。其他特殊轨迹, 而不是跨越从排斥侧到一边吸引向前时间折叠鞍, 因此它有这么来讲话的反鸭翼的行为。它对应于 DRS 的鞍平衡的不稳定歧管, 它被称为折叠的车座的人造鸭单数。有 $a_c = 0$, 其中尖峰加入溶液访问相空间中两个折叠鞍座的退化情况下; 它们只访问它们中的一个 (取决于 C 的符号) 只要一个 $a_c \neq 0$ 。这最好通过分析 DRS 的积结构理解; 见下文和图 2 和图

3。

如在展示[13], 上抛物线破裂器的临界歧管中的折叠鞍的存在组织从亚阈值(振荡)制度的尖峰, 然后破裂制度的过渡, 以与折叠鞍组织尖峰相关联的鸭过渡。这种类型的动态也出现在三个时间尺度系统如最近在[14]所示。在此尖峰添加场景一个重要目的, 公布了[13], 并通过定性参数和数值分岔分析合理的, 是示出如在图 2 和 3 的蓝色和红色曲线的所谓折叠同宿分岔; 也见[14]。这个对象是指在 DRS 一个同宿分叉, 然后, 由于时间重新缩放, 在 RS 对应于限制曲线开始在折叠鞍并返回回到它具有有限的通过时间, 从而连接所述人造鸭翼和折叠鞍的真实奇异鸭翼。这个对象终止在 DRS 小极限环的家庭。当前 DRS 的特殊性是, 它是可积, 因此可以发现明确地折叠同宿连接, 如下面所解释。

2.2 折叠同宿连接

DRS (2.11) 是积与由下式给出哈密顿

$$H(\theta, \mu) = -0.5\mu^2 + \mu_c\mu + a_c \sin \theta + 0.25 \cos 2\theta$$

因此, 系统 (2.11) 对应于水平集函数 H , 也就是, 在集 $\{H=h\}$ 为常数 h 的解决方案。相对于 μ 求解相应的代数方程给出如下表征

$$\mu = \mu_c \pm \sqrt{\mu_c^2 - \tilde{h}}$$

其中 $\tilde{h} = 2(h - a_c \sin \theta - 0.25 \cos 2\theta)$ 。然后, 同宿连接是水平的集即 H 经历

$$h_{\text{hom}}^{\pm} = 0.5\mu_c^2 \pm a_c - 0.25$$

因此, 我们获得用于折叠同宿的连接方程, 即

$$\{(\theta, \mu); -0.5\mu^2 + \mu_c(\mu - 0.5\mu_c) + a_c(\sin \theta \mp 1) + 0.25(\cos 2\theta + 1) = 0\}$$

当 $a_c = 0$ 时, 有在 DRS 没有同宿连接 (2.11), 但两个折叠鞍座之间的两个双异的连接; 确实, 等式 (2.17) 中的 $(\pm \frac{\pi}{2}, \mu_c)$ 中, 当 $a_c = 0$ 显然满足; 参见图 2。对于 $a_c \neq 0$, 每个折叠鞍具有双同宿连接, 但只有它们中的一个与鸭溶液相互作用; 见图 3。

2.3 鸭解导致的倍周期转变

倍周期处理在我们的最小的系统 (2.4) 是由鸭溶液靠近每个折鞍点奇异 fS^{\pm} 或两者介导的, 这取决于一个 $a_c = 0$ 是否为零或非零。当 $a_c = 0$, 则解决方案是对称相对于一和尖峰通过转变增加了两个由两个其间溶液接近每个折叠鞍。图 2 呈现该加法处理为 $a_c = 0$ 。所有中央面板显示系统 (2.4), 用于不同的初始条件的解决方案, 与折叠的同宿连接和折叠在一起鞍座 fS^{\pm} 。此外, 右图显示的临界流形 S^0 和折叠线路 F^{\pm} 。最后, 所有左图沿着右侧的 $x(t)$ 的评估显示, 这些解决方案的 x 时间分布在一起微分方程对于 x , 即, 在 x -零值线或临界歧管沿评价 $x(t)$ 的方程的侧; 我们会回来的关键歧管的这种表示, 它的使用, 以确定鸭翼段时间序列中, 在第 3 节所有的解决方案包含鸭翼段: (A1-B1) 无头的谣言; (A2-B2) 2 个鸭翼与头尖峰; (A3-B3) 2 个尖峰和两个无头鸭翼, (A4-B4) 2 个尖峰和两个鸭翼与头尖峰。

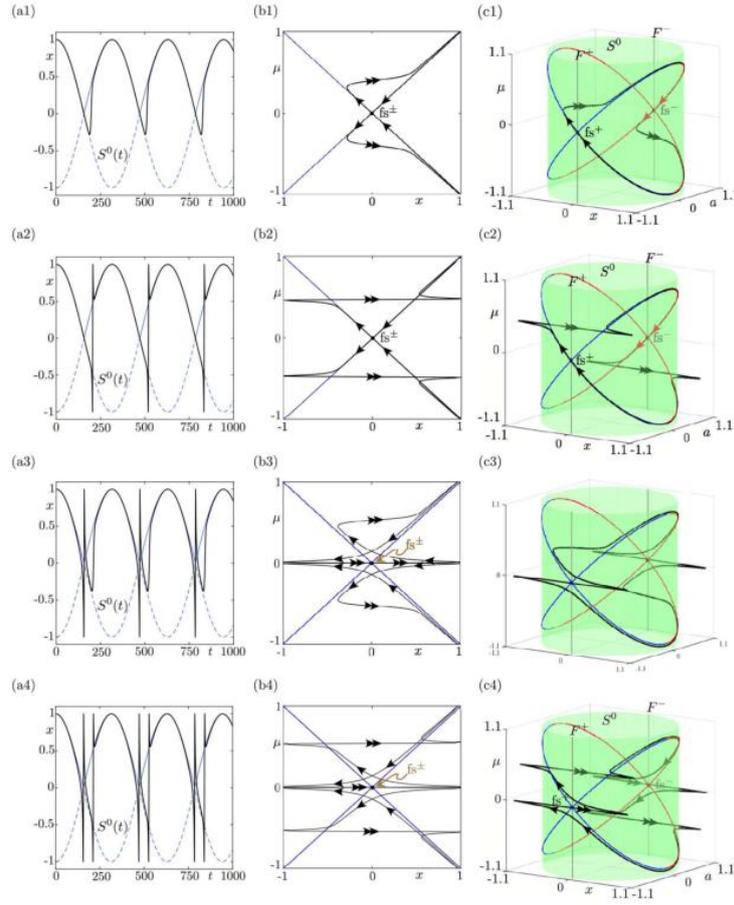


图 2. 倍周期在系统 (2.4), 用于 $a_c = \mu_c = 0$ 面板 (A1) 在所有溶液的 x 具有与时间相关的临界歧管 (A4) 表示的时间曲线一起 $S^0(t)$ (见第 3 的定义)。板 (B1-B4) 显示解决方案的平面投影; 面板 (C1) 溶液与临界流形 S^0 和其折叠线路 F^\pm 在一起的 (C4) 表示的相空间表示。在所有面板, 蓝色和红色曲线是作为特定水平集哈密顿 (2.14) 而获得两个折叠异连接。所有的解决方案包含鸭翼段: (A1-C) 无头的谣言; (A2-C) 2 个鸭翼与头尖峰; (A3-C3) 2 个尖峰和两个无头鸭翼, (A4-C4) 2 个尖峰和两个鸭翼与头尖峰。

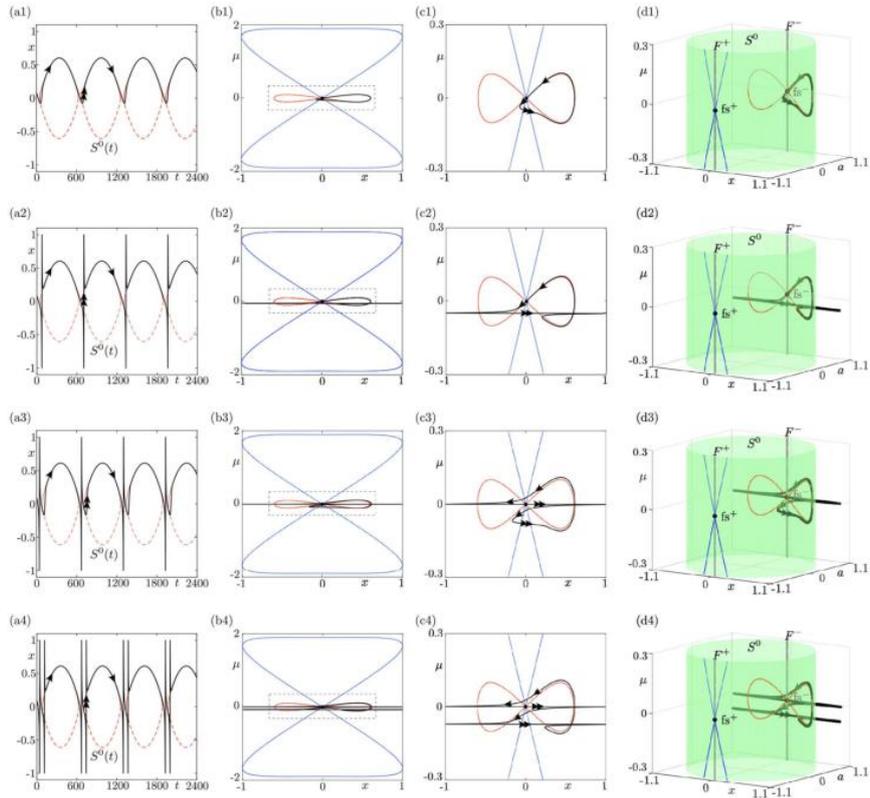


图 3. 加周期在系统 (2.4) 为 $\mu_c = 0, a_c = 0.9$ 。面板 (A1-A4) 显示时间与时间相关的临界流形一起所有溶液的 x 形状 $S^0(t)$ (见教 3 的定义); 面板 (C1-C4) 显示缩放 (B1-B4); 面板 (D1-D4)

与所述临界流形 S^0 在一起, 并且将溶液的节目相空间表示其折叠线路 F^\pm 。在所有面板, 蓝色和红色的曲线被折叠为特定水平集哈密顿 (2.14) 而获得同宿的连接。所有的解决方案包含鸭翼段: (A1-D1) 无头鸭; (A2-d2) 的头部穗鸭; (A3-D3) 一个钉和一个无头鸭式, (A4-D4) 2 个尖峰包括与头部穗一个鸭翼。

当 $a_c \neq 0$ 时, 此对称被破坏, 并根据交流的符号, 越来越多的尖峰附近的两个折叠的鞍座之一加入溶液: fs^+ 用于 $a_c < 0$ (相应。 $a_c > 0$)。图 3 示出添加过渡接近 fs^- 对于 $a_c = 0.9$ 。两个中心板显示第 (x, μ) 面, 对应于前者的那些视图缩放后者的, 而右边的图显示了 (x, a, μ) 空间, 具有相同的动态对象作为图 2. 尖峰加入机制类似于对称情况下 $a_c = 0$, 即使它仅发生接近两个折叠鞍座之一。

2.4 比较生物物理抛物线破裂器的典型例子:

植物模型我们的最少的系统共享多个与植物模型, 它是显示抛物线破裂生物物理神经元模型 (即基于霍奇金赫胥黎形式主义) 的主示例相似之处。事实上, 在 [13] 中示出的是植物模型, 看作是一个缓慢的快速动力系统 (即使没有明确的小参数) 具有一个折叠鞍奇点和尖峰经由涉及鸭翼转变加入 (真和与此折叠鞍相关假) 的解决方案。系统 (2.4) 具有两个折叠鞍座和第一添加尖峰, 其对应于从慢至溶液周期解被一个或两个 (取决于 a_c 的值) 中的过渡穿过靠近折叠鞍座 fs^\pm 和后续其相关的真实谣言。然而, 不论是否是 $a_c = 0$ 时, 从所述第二尖峰添加过渡以后, 尖峰在

系统中经由溶液加入一个可以术语跳上鸭翼[11]，他们不非常接近传递给折叠鞍座了。事实上，如在图 2A3-B3 和 A4-B4 显而易见的是，初始添加过渡后，进一步尖峰从另一侧的折叠鞍座的加入（在此，上文），因此，不按它的真实鸭翼上的排斥侧。取而代之的是，轨迹涉及在具有完整的快速段并连接到排斥缓慢歧管后这些尖峰增加横折叠线 F^\pm 。这个序列吸引快速段/排斥慢的区分是什么定义了一个跳跃式鸭翼。在图 2A3-B3 和 A4-B4，尖峰的第二（和随后的）一对以这种方式加入。此外，在非对称的情况下，对应于 $a_c = 0$ 时，发生类似的事件。在图 3A3-C3 和 a4-C4，一个清楚地观察到添加在折叠鞍 f_s^- 侧的第二尖峰，但不是如此接近它，作为跳上鸭爆炸的结果。因此，我们的最小模型显示尖峰添加的场景，可以被看作是从 Ermentrout 和 Kopell 的 θ 模型跳跃上鸭方案中的折叠鞍鸭从植物模型添加场景之间的混合见[13]的信息。

3. 与 J.E.的连接

我们最小的系统方程的骤降和切片链接可以写成一个周期性的强迫，即一维 ODE

$$\theta' = a(\epsilon t) - \sin \theta$$

其中 a 是圆函数;对于图 4 中所示的数值例中，我们将采取 $a(t) = K \sin t$ 。这来自限于周期性政权 $r = 1$ 系统 (2.1) 中，用缓慢振荡函数的，我们写为时间依赖的，而不是强制的添加谐波振荡器如等式 (2.3)。 $u = \tan \frac{\theta}{2}$ ，一个能方程 (3.1) 为（重排一些后）改写

$$u' = \frac{1}{2}(1+u^2)a(\epsilon t) - u.$$

虽然方程 (3.2) 是更适用于分析比方程 (3.1)，它是相对的，当涉及到数值处理;我们看下面的解释。这些等价公式都采取了非线性方程的形式与慢周期强迫，其上大量的知识已经积累的话题过去几十年，就是因为一系列关于强制范德发表了超过从 40 年代中期十年，直到 50 年代末波尔方程开创性的论文由卡特赖特和的 Littlewood。第三部分和这一系列的 IV 是由单独的 Littlewood 公布，并在那里他介绍骤降和切片[32, 33]的概念。这些概念的目的是描述强制范德波后面的吸引运动到的一个倍数（现在被称为）临界歧管和的溶液然后晃过一个短段折叠线无论是溶液返回到后哪个它来自的地方（这是“下降”），或者它被推开朝向另一吸引区域，其他的折叠线附近的吸引区域（这是在“片”）。后来，Grasman 进一步张弛振荡[22]近期进入分析这些解决方案[20, 21]以及相关的骤降和切片谣言。以单数形式的限制强制 van der Pol 系统的 $\epsilon = 0$ 鸭翼，在链路与折叠鞍奇点，通过 Szmolyan 和 Wechselberger 研究了[46]，和通过的 Guckenheimer 和在一系列纸张合作者[7,23]。

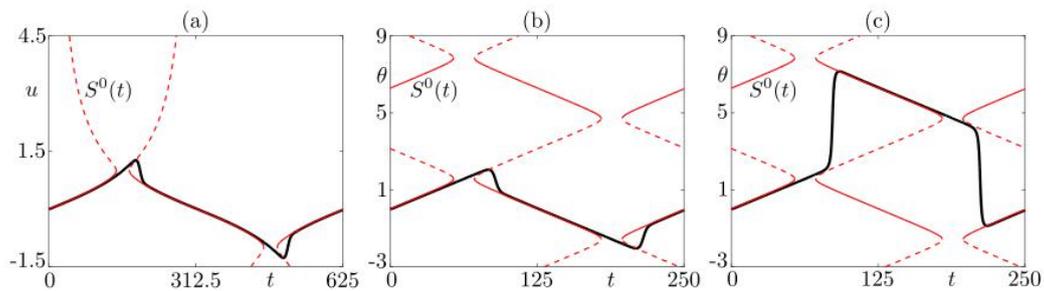


图 4. 时间序列提供了最小的抛物线炸药 (3.1) 具有周期性强制 $a(\epsilon t)$ 对于所选择的圆形函数 $(T) = K \sin t$ 的鸭式循环;因此迫使周期为 $a(t) = K \sin t$; 还示出了时间相关的临界流形的分支 $S^0(t)$ 的。面板显示以下信息: (1) 无头鸭为 u 中的模型 (系统 (3.2)) 与参数值 $K = 1.01001$ 和 $\epsilon = 0.01$; (b) 中的无头鸭翼在 θ 模型 (系统 (3.1)) 与参数值 $K = 1.0253$ 和 $\epsilon = 0.025$; (c) 中与鸭头在

θ 的模型参数值 $K = 1.0254$ 和 $\varepsilon = 0.025$ 。

与小树木的理念密切相关，我们最小的模型是它的形式 (3.2)，它可以被总结如下。考虑（最低限度）形式的一维 ODE

$$x' = f(x, a(\varepsilon t)),$$

其中， a 是一个周期函数， $\varepsilon > 0$ 小参数。然后系统 (3.3) 可以被看作是一个缓慢的快速系统，其中 x 是快速和 a 是慢变量 $s = \varepsilon t$ 的周期函数。在的制剂 (3.3)，其临界歧管是时间依赖性和周期性的，它是由隐式方程 $f(x(t), a(\varepsilon t)) = 0$ 。的情况相似，其中一个长相在这些对象相空间中，可以鉴定被简单地通过求解附加隐含方程 $f_x(x(t), a(\varepsilon t)) = 0$ 引诱或驱除，依赖于时间的临界歧管的部分。当然，人们可以改写与慢时间周期强制 (3.3) 非自主的一维系统为形式的自治二维慢快系统

$$\begin{aligned} x' &= f(x, a(s)), \\ s' &= \varepsilon \end{aligned}$$

其中现在慢速时间周期迫使是依赖于术语第二状态变量 $s = \varepsilon t$ 其演化方程是然后简单地缓慢漂移。在慢快系统 (3.4) 的相位平面上，即 (s, x) 面，该解决方案的系统，其临界歧管一起的一个

典型的曲线轨迹 $S^0 = \{f(x, a(s)) = 0\}$ 。然后人们可以观察到近非正常双曲点 S^0 的慢快速转变，特

别是折点，相对于所述快速变量 x ；再次，该功能被以 s 周期性的，所以是 S^0 。这是，例如，什么在图 1a 中，其中相位空间投影是三维的，并且完成临界歧管秒 0 是沿曲线 F 折叠的表面附近发生慢快速转变，沉默或静止期和活性或突发之间即转移逐步破裂轨道。然而，直到由因子 $1/\varepsilon$ ，可以得到通过绘制原始非自治系统 (3.3) 中的溶液的 X 时间分布非常相同的表示和叠加在其上的时间依赖性临界流形重新缩放（吨）隐式地定义为 $f(x(t), a(\varepsilon t)) = 0$ 。然后，非正常双曲点仍然一般显示为相对于 x 或跨临界点任一折点；见图 4。此外，红色曲线吸引（RESP 排斥）这个时间依赖性临界歧管满足 $f_x(x(t), a(\varepsilon t)) = 0$ ；它们由固体（分别表示。虚线）在图 4 线以这种方式，可以很容易地识别鸭翼段以时间序列，因为它们位于邻近排斥依赖于时间的临界歧管的部分。此外，从形式的一维系统开始 (3.3) 除一个缓慢的周期强迫，这是识别鸭解决方案的唯一途径，这是完全相似的，在这种情况下，什么是高维慢后快的系统来完成。

按照该方法，系统的依赖于时间的临界歧管 (3.2) 被示出在无头鸭轨迹的顶部图 4a；作为轨迹遵循第 $S^0(t)$ 的一个分支吸引到其折叠点中的一个，然后前进到按 $S^0(t)$ 的排斥分支两个鸭翼段

很容易识别。这些是无头鸭翼段，因为它们是随后在快速变量 u 的方向上的跳跃向下通向 $S^0(t)$ 的与作为鸭段之前的 u 类似值的分支。在的 Littlewood 的语言，这相当于畅游。图 4b 和 c 示出了用于该系统的 θ -版本，由等式 (3.1) 中定义的对象：绘制的解决方案是在 (b) 中无头鸭翼和头部在一个鸭式 (c) 中。事实上，在前者的情况下，将溶液通向 S^0 的与作为鸭段之前 θ 的类似值的分支鸭翼段后跳下，而在后一种情况下，溶液通向 S^0 的一个分支跳起 (t) 随 θ 的值，其以约 π 除 S^0 的分支的值的量更高，随后其鸭翼段之前的溶液。在的 Littlewood 的话来说，在 (b) 中显示一个倾角（无头鸭翼段）中所示的溶液中，同时在 (c) 中显示的切片（鸭翼段头）中所示的一个。需要注意的是，在 u 坐标，该系统不能与头，因为这些对应于 θ 呈现鸭翼到一个跳转向上大约 π ，为 u 发散到+该装置 ∞ 。事实上，在 u 变量，依赖于时间的临界歧管具有只有一个稳定链段，这意味着只有倾角（无头鸭翼）是可能的；参见图 4a。这与在 θ -变量，其中与时间有关的临界歧管具有多个稳定段会发生什么情况，因此允许两个骤降（无头鸭翼）和切片（具有头鸭翼）的对比。

现在，让我们在阶段，使用依赖于时间的临界流形 S^0 和系统 (3.4) 的更经典的慢快分析总结在时域系统 (3.3) 的慢快速分析之间的比较使用通常的临界流形 S^0 。经典的方法对应于执行

什么是通常被称为慢快解剖[39]和 S^0 对应于分岔图用于与系统(3.4),这是有效的相同的方程相关联的快速子系统的均衡(3.3)但具有分叉参数 s ,而不是缓慢时变项 εt 。因此,获得以 s 这个快速子系统的平衡分岔图(由方程的直接操纵或通过数值分岔分析的方式),然后绘制它叠加在完全系统(3.4)的周期性溶液的顶部正好相当于执行慢快清扫。相反,在时间上定期溶液的顶部绘图系统(3.3)的依赖于时间的临界歧管被有效地绘制的快速子系统(3.4)的分岔图的重新缩放的版本,重新缩放因子为 $1/\varepsilon$ 。因此,这两种方法是非常相似的,并且提供类似类型的信息。后者仅仅是适于的形式(3.3),其有时被称为绝热系统的系统[4];关于这个话题,我们是指读者在随时间变化的关键歧管在时域叠加到这种系统周期解伯格伦德的工作[3,5],但没有到的小树木的骤降和切片和没有直接链接引用有谣言制造。而不直接参考的小树木的工作,马克迪纳研究了鸭翼的类似的表示在一维动力系统与慢周期迫使[15, 16]。最后,这个想法也存在于卡洛特[8]的博士工作。

我们注意到这种方法在时域表征不同鸭的解决方案也适用于平面慢后快的系统以恒定的强迫。和以前一样,它需要能够解决(至少数值)对应于用于快速可变的临界歧管中的隐方程。该原型自主在平面鸭式系统是 der Pol 振子具有恒定迫使,面包车,其中其中第一确认和分析这样的[2]鸭翼。该系统的方程读

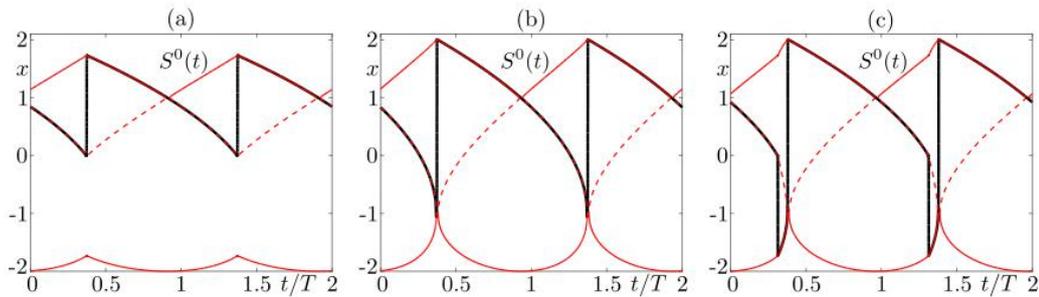


图 5. 时间序列范德波尔振荡器(3.5)的鸭周期与临界歧管的三个分支一起的(在 x -零值线为 x -的求解等式)之后获得沿着每一个周期评价,对于 $\varepsilon = 0.001$ 和 $a \approx 0.99987490608$ (在整个鸭式爆炸差异超出了第 11 位小数)。(A) 无头鸭式 (DIP); (b) 中的最大鸭式 (过渡浸/片); (c) 中与鸭头 (切片)。

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3/3 + x, \\ y' &= \varepsilon(a - x). \end{aligned}$$

由于临界歧管是三次多项式在快速变量 x -的曲线图,可以解决这个问题,使用卡尔达诺公式通过基团。以这种方式,一个可以绘制随时间变化的临界流形 $S^0(t)$ 的该自治系统。在图 5 中,我们表明此过程无头鸭式(a)中,最大鸭式(b)和与磁头(c)一种鸭式的结果。同样的现象在强制范德波发生,并且它确认的是,在最经典和历史感,无头鸭翼对应骤降,而头部对应于片鸭翼。在骤降和切片,鸭翼,即最大的鸭翼,对应于最长浸可能这两个子系列之间的边界之间的过渡。

4. 结论

本文介绍了抛物线破裂的最小模型可积缓慢流动,通过迫使谐波的 SNIC 振荡器的最小模型获得。我们分析这些新的抛物线炸药,特别是它的缓流和穗添加结构。我们进一步讨论与 J.E. 的小树木的经典作品的链接。我们认为,这种做法可以帮助进一步了解在生物物理模型抛物破裂的主要性能,通过最小的车型。在神经科学的一个重要问题是,信息编码经由神经元活动(从外部刺激来)。

有几种范式支撑这一问题，相关的假说关于如何在神经编码是由大脑来实现。率编码认为神经活动（即，燃烧速度）的速度是主要量编码信息；这是基本的神经网络。其他方法考虑到尖峰和他们的时机也同样（如果不是更多）重要的，这导致了脉冲神经网络的出现。然而，尖峰非常迅速的事件和存在是认为尖峰或突发的群体有较强的机会具有编码能力的第三种方法。在突发编码 [27, 31] 的情况下，重要的是能够控制突发的大小中给出神经元模型是重要的。因此，穗添加过渡成为神经活动和神经编码的潜在的关键调节因子。我们相信，最小的模型作为一个建议这里是因为他们提供进一步的设施，以分析和控制，同时易于计算，一旦嵌入在网络架构重要的，可能会带来新的洞察到这阵阵通过编码。这显然是超出了本文的范围，将是一个非常有趣的未来工作的主题。

参考文献

- [1] S.M. Baer, J. Rinzel and H. Carillo, Analysis of an autonomous phase model for neuronal parabolic bursting. *J. Math. Biol.* 33 (1995) 309 - 333.
- [2] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener and M. Diener, Chasse au canard. *Collect. Math.* 32 (1981) 37 - 119.
- [3] N. Berglund and H. Kunz, Chaotic hysteresis in an adiabatically oscillating double well. *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 1691 - 1694.
- [4] N. Berglund, Adiabatic dynamical systems and hysteresis. Ph.D. thesis, Department of Physics, 'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), no. 1800 (1998). Available at: https://infoscience.epfl.ch/record/32277/files/EPFL_TH1800.pdf
- [5] N. Berglund and H. Kunz, Memory effects and scaling laws in slowly driven systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* 32 (1999) 15 - 39.
- [6] R. Bertram, M.J. Butte, T. Kiemel and A. Sherman, Topological and phenomenological classification of bursting oscillations. *Bull. Math. Biol.* 57 (1995) 413 - 439.
- [7] K. Bold, C. Edwards, J. Guckenheimer, S. Guharay, K. Hoffman, J. Hubbard, R. Oliva and W. Weckesser, The forced van der Pol equation II: Canards in the reduced system. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2 (2003) 570 - 608.
- [8] J.-L. Callot, Bifurcations du portrait de phase pour des equations différentielles lineaires du second ordre ayant pour type equation Hermite. Ph.D thesis, Université de Strasbourg, France (1981).
- [9] F. Clément and J.-P. Francoise, Mathematical modeling of the GnRH pulse and surge generator. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 6(2007) 441 - 456.
- [10] C.A. Del Negro, C.F. Hsiao, S.H. Chandler and A. Garfinkel, Evidence for a novel bursting mechanism in rodent trigeminal neurons. *Biophys. J.* 75 (1998) 174 - 182.
- [11] P. De Maesschalck, F. Dumortier and R. Roussarie, Canard-cycle transition at a fast-fast passage through a jump point. *C. R. Math.* 352 (2014) 27 - 30.
- [12] M. Desroches, T.J. Kaper and M. Krupa, Mixed-mode bursting oscillations: dynamics created by a slow passage through spike-adding canard explosion in a square-wave burster. *Chaos* 23 (2013) 046106.
- [13] M. Desroches, M. Krupa and S. Rodrigues, Spike-adding in parabolic bursters: the role of folded-saddle canards. *Phys. D* 331(2016) 58 - 70.
- [14] M. Desroches and V. Kirk, Spike-adding in a canonical three-time-scale model: superslow explosion and folded-saddle canards. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 17 (2018) 1989 - 2017.
- [15] M. Diener, Nessie et les canards, Institut de Recherche Mathématique Avancée. Preprint IRMA-76-P-38 (1979).
- [16] M. Diener, Deux nouveaux "phénomènes-canard". *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* 290 (1980) 541 - 544.
- [17] F. Dumortier and R. Roussarie, Canard cycles and center manifolds, *Memoirs of the American Mathematical Society*, Rhode Island (1996) 577.

- [18] G.B. Ermentrout and N.J. Kopell, Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation. *SIAM J. Appl. Math.* 46 (1986) 233 – 253.
- [19] M. Golubitsky, K. J and T.J. Kaper, An unfolding theory approach to bursting in fast-slow systems, in *Global Analysis of Dynamical Systems*, edited by H.W. Broer, B. Krauskopf and G. Vegter, CRC Press, Boca Rotan, US (2001) 282 – 313.
- [20] J. Grasman, H. Nijmeijer and E.J.M. Veling Singular perturbations and a mapping on an interval for the forced van der Pol relaxation oscillator. *Phys. D* 13 (1984) 195 – 210.
- [21] J. Grasman, *Asymptotic Methods for Relaxation Oscillations and Applications*. Springer, Berlin (1987).
- [22] J. Grasman, Relaxation oscillations, in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, edited by R.A. Meyers, Springer, New York, (2009) 7602 – 7616.
- [23] J. Guckenheimer, K. Hoffman and W. Weckesser, The forced van der Pol equation I: the slow flow and its bifurcations. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2 (2003) 1 – 35.
- [24] J. Guckenheimer and Y. Ilyashenko, The duck and the devil: canards on the staircase. *Moscow Math. J.* 1 (2001) 27 – 47.
- [25] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 117 (1952) 500 – 544.
- [26] E.M. Izhikevich, Neural Excitability, Spiking, and Bursting. *Int. J. Bifurc. Chaos* 10 (2000) 1171-1266.
- [27] E.M. Izhikevich, N.S. Desai, E.C. Walcott and F.C. Hoppensteadt, Bursts as a unit of neural information: selective communication via resonance. *Trends Neurosci.* 26 (2003) 161 – 167.
- [28] E.M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, MIT press. Cambridge (2007).
- [29] A. Kepecs and X.J. Wang, Analysis of complex bursting in cortical pyramidal neuron models. *Neurocomputing* 32 (2000)181 – 187.
- [30] M. Krupa and P. Szmolyan, Relaxation oscillation and canard explosion. *J. Differ. Equ.* 174 (2001) 312 – 368.
- [31] J.E. Lisman, Bursts as a unit of neural information: making unreliable synapses reliable. *Trends Neurosci.* 20 (1997) 38 – 43.
- [32] J.E. Littlewood, On non-linear differential equations of the second order: III. The equation for large k , and its generalizations. *Acta Math.* 97 (1957) 267 – 308.
- [33] J.E. Littlewood, On non-linear differential equations of the second order: IV. The general equation. *Acta Math.* 98 (1957) 1 – 110.
- [34] S. Moran, S.M. Moenter and A. Khadra, A unified model for two modes of bursting in GnRH neurons. *J. Comput. Neurosci.* 40 (2016) 297 – 315.
- [35] R.E. Plant and M. Kim, On the mechanism underlying bursting in the Aplysia abdominal ganglion R15 cell. *Math. Biosci.* 26 (1975) 357 – 375.14 M. DESROCHES ET AL.
- [36] R.E. Plant and M. Kim, Mathematical description of a bursting pacemaker neuron by a modification of the Hodgkin-Huxley equations. *Biophys. J.* 16 (1976) 227 – 244.
- [37] R.E. Plant, The effects of calcium $^{++}$ on bursting neurons: a modelling study. *Biophys. J.* 21 (1978) 217 – 237.
- [38] R.E. Plant, Bifurcation and resonance in a model for bursting nerve cells. *J. Math. Biol.* 11 (1981) 15 – 32.
- [39] J. Rinzel, A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems, in *Proc. of the International Congress of Mathematicians*. Berkeley, California (1986) 1578 – 1593.
- [40] J. Rinzel and Y.S. Lee, Dissection of a model of neuronal parabolic bursting. *J. Math. Biol.* 25 (1987) 653 – 675.
- [41] I.V. Schurov, Ducks on the torus: existence and uniqueness. *J. Dyn. Control Syst.* 16 (2010) 267 – 300.
- [42] I.V. Schurov, Canard cycles in generic fast-slow systems on the torus. *Trans. Moscow Math. Soc.* 71 (2010) 175 – 207.
- [43] I.V. Schurov and N. Solodovnikov, Duck factory on the two-torus: multiple canard cycles without geometric constraints. *J. Dyn. Control Syst.* 23 (2017) 481 – 498.
- [44] P. Smolen, D. Terman and J. Rinzel, Properties of a bursting model with two slow inhibitory variables. *SIAM J. Appl. Math.*

53 (1993) 861 - 892.

[45] C. Soto-Trevino, N. Kopell and D. Watson, Parabolic bursting revisited. *J. Math. Biol.* 35 (1996) 114 - 128.

[46] P. Szmolyan and M. Wechselberger, Canards in \mathbb{R}^3 . *J. Differ. Equ.* 177 (2001) 419 - 453.

[47] D. Terman Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes. *SIAM J. Appl. Math.* 51 (1991) 1418 - 1450.