

在概念气候模型中的混合模式振荡

Andrew Roberts a* , Esther Widiasih b , Martin Wechselberger c , Christopher K.R.T. Jones d

a 康奈尔大学, 数学 310 室, 伊萨卡 14853, 美国夏威夷

b 西欧胡岛大学, 数学和科学, 91-1001 富华公路, 考普雷 96707, USA

c 悉尼大学, 数学与统计 F07, 悉尼新南威尔士州 2006 年的大学学院的学校

d 北卡罗莱纳州, 数学, 菲利普斯馆系, CB # 3250, 教堂山, NC 27599-3250, USA

摘要 许多工作在松弛振荡和其他简单的振荡器的概念气候模型已经完成。然而, 在气候数据的振荡模式往往更比可以通过这种机制来描述复杂。本文探讨通过混合模式振荡的透镜在气候数据复杂振荡行为。作为一个案例研究, 国家关于全球平均温度, 大气中的碳和海洋碳方程的概念气候模型进行了分析。该无量纲模型是一个快/慢体系与一种快速可变 (相当于冰体积) 和两个慢速变量 (对应于两个碳店)。几何奇异扰动理论用于演示折叠节点奇点的存在。的参数政权, 其中 (单数) 的轨迹穿过折叠节点是在 $\varepsilon = 0$ 。在这种参数制度, 该模型具有类型的稳定周期轨道一段 1° 极限情况下返回到奇异漏斗发现 $s > 0$ 。据我们所知, 这是证明有能力生产的 MMO 模式的能力第一概念气候模式。

引言 已经有针对气候系统的各个历史时期解释振荡的研究显著量。索兹曼和 Maasch 具有一系列上过渡, 从振荡的变化与 40 kyr 的显性周期振荡用 100 kyr [1-3] 的显性周期论文。根据索兹曼和 Maasch, 在数据中的 40 个 kyr 振荡从在天文迫使 (准) 周期性变化的线性响应的结果。他们提出, 于 100 个 kyr 周期过渡到 Hopf 分支产生的发生是由于吸引周期轨道。 PAILLARD 和 Parrenin 还寻求解释中更新世过渡和晚更新世的冰间周期, 具有不连续和分段线性模型[4]。他们的工作, 和霍格[5]的工作, 在天文用途的改变迫使由于地球轨道产生振荡变化。十字架[6]和 Ditlevsen [7]在概念上的气候模型审查振荡。特别是, 十字架[6]讨论了在冰河期模型张弛振荡器。然而, 据我们所知, 该讨论仅限于单振幅或单模。

纵观图 1 中, 各 100 kyr 周期包含的急剧增加通向的间期 (由红色尖峰表示)。这种松弛行为清楚地表明多时间尺度的根本问题的存在。也有在冰状态时, 结构化的振荡中的重复每 100kyr 周期。大张弛振荡和小振幅振荡的存在表明这些可以是混合模式振荡 (MMOs), 随后的 1 个小振幅振荡 (SAOS) L_1 个大振幅振荡 (老挝) 图案, 则 L_2 个大的尖峰, s_2 个小周期, 等等。序列 $L_1^s L_2^s L_3^s \dots$ 是被称为 MMOs[8]。我们建议 100 kyr 冰期间冰期循环以及最大的 SAOS 即不进入间冰期州最大的周期可以解释为 MMOs。通过这表明 SAOS 从内在动力产生, 我们建议给他们的属性在天文迫使变动标准解释的替代方案。我们注意到, 不过, 既不解释必定会排除其他的, 有可能这两个内在和强迫振动结合起来。

本文测试的科学假说, 气候数据的振荡行为可以解释为 MMO 游戏, 和我们采取的数据图 1 为个案研究。德罗什等。调查可以产生在网游系统具有多个时间尺度[8]。从图 1 中所示的数据集, 我们知道底层模型具有多个时间尺度结构的机制。如果我们想找到 MMO 游戏, 模型必须至少有三个状态变量。

假设我们能找到一个全球性的时间尺度分裂, 有三种不同的方式有一个 3D 模型与多时间尺度: (一) 1 快, 慢 2; (b) 第 2 快, 慢 1; 和 (c) 1 快, 1 个中间, 1 慢 (即, 三个时间尺度模型)。每个选项都可以创建通过不同的机制 MMO 游戏。 1 个快, 慢 2 模型变量可通过折叠节点或折

叠鞍节点与全球回报机制，创造 MMOs 反复发送奇点附近的轨迹。用 1 个慢和快 2 变量的模型可以通过一个延迟的 Hopf 机制创建 MMOs 也需要在三个时间比例模型由于折叠鞍结型 II. MMOs 都让人联想到 MMOs 其中所述均衡中的一个折叠奇点，虽然 SAOS 的幅度更为明显在这种情况下。

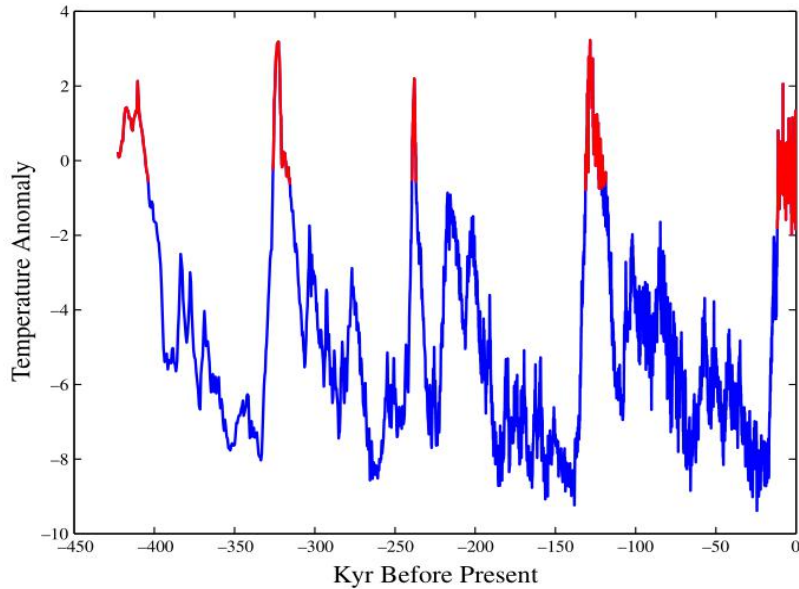


图 1. 温度异常从东方冰芯氩记录[9]获得。(对于这个图例颜色的引用解释，读者可以参考这篇文章的网页版。)

为了验证我们的假设，我们必须取得微妙的平衡。该模型需要复杂的，足以表现出期望的行为，但如果太复杂，我们将无法证明它确实如此。我们知道，从图 1 中的数据是温度显示松弛行为，很快两个元稳定状态之间振荡。假设冰量强烈的温度相关性，我们以同样的方式查看冰川周期，即两个亚稳定状态之间振荡。在冰体积的双稳态机制的可能性已几十年来一直讨论的，特别是通过 Weertman [10], MacAyeal [11], Oerlemans [12], 卡洛夫和 Ganopolski [13], 十字架[14], 和安倍-大内等[15]。大气中的碳也应该在描述冰-间周期内的任何模型中发挥作用，通过索兹曼和 Maasch [3]以及 PAILLARD 和 Parrenin [4]。我们认为，结合大陆冰盖物理的，概念模型，大气的建议碳，和海洋碳。由于这种方法从未在基于气候模型中，我们的愿望是，分析是足够清晰复制。这是我们选择这样一个简单的 3D 模型的一个重要原因。事实上，我们省略时间依赖性迫使诸如米兰科维奇周期，让这些影响到今后的工作。即便如此，最小的模型能够提供洞察网游背后的关键机制。我们包括海洋碳作为第三个变量，因为该模型能够产生 MMOs。然而，我们无法找到其他的最小型号的 MMOs，例如深海温度。

我们的分析将在很大程度上依赖于模型和想法提出由 MacAyeal [11]其中的物理单位以及一些参数，是模棱两可的。他的方法来解释与突变模型冰川周期的物理意义是类似我们 MMO 接近，没有 25 年的数学发展的好处。而不是使用独立地变化的参数作为产生慢动力学，我们夫妇 MacAyeal 的模型（简化的）碳动态的手段。主要任务是，以获得“全球”时标冰盖演变和由 ε_1 和 ε_2 表示的碳方程的演变之间的分离。一般情况下，一个时标分离可以通过三维分析来揭示。该方法应涉及小参数 ε_i 到三维模型的物理参数。在实际应用中，如神经，通常可以得到的 ε 我的“渺小”一个手柄，因为有被接受的值或范围的许多物理参数。不幸的是，在古气候模型参数不作为限制。我们依靠物理学家，地质学家和大气科学家的直觉来确定时间尺度的合理分离。

虽然它可能会感到不安没有更具体的说法，对于不确定性的参数值，甚至控制方程允许更多

的自由。考虑到这一点，我们需要比别人在古气候文献，如赵敏和 Maasch [1-3]不同的方法。在绝大多数的气候科学论文中，作者用模拟明智选择的参数模型。我们的方法是不同的，我们假设一无所知除了他们是物理意义的任何参数。然后，通过分析，我们发现在何种条件下模型的行为定性的数据等。这个想法是不是确定具体的参数值，而是找各种可能的参数。有两个优点这种方法。首先，参数范围可以用来约束（或者进一步限制）以前的参数估计，这可能会告诉我们一些以前对气候系统的未知。它可以用来通知参数选择为大型模拟。其次，参数范围是有用的，以消除选项。也就是说，如果产生了正确的定性行为的唯一参数范围是完全不合理的，该模型需要改变。

本文的要点如下：在第2节，我们建立了模型，并提供来自古气候文献的相关背景。然后，我们的无量纲化模型和一些参数的讨论假设。特别是，我们确定我们的无量纲模型为多时间尺度的问题。我们分析这种模式在第3节，着重于发现网游的条件。最后，我们在第4节的讨论。

2. 模型

2.1 物理模型

我们先从形式

$$\begin{aligned}\gamma \frac{dX_e}{dt} &= A_0(B_0 - A) - B_1 X_e^3 + B_2 X_e, \\ \frac{dA}{dt} &= B_3 [P(X_e - X_e^*)^2 - B_4 - A] - (L + B_5 A - B_6 H), \\ \frac{dH}{dt} &= L + B_5 A - B_6 H.\end{aligned}$$

表 1 参数，变量和它们的单位的总结。

Variable/Parameter	Unit	Parameter	Unit
t	yr	X_e^*	km^3
X_e	km^3	γ	yr
A	PgC	L	PgC yr^{-1}
H	PgC	A_0	$\text{km}^3 \text{PgC}^{-1}$
B_0	PgC	B_1	km^{-6}
B_2	1 (dimensionless)	B_3	yr^{-1}
B_4	PgC	B_5	yr^{-1}
B_6	yr^{-1}	P	PgC km^{-6}

X_e 是从一些平均值偏移大陆冰体积 (km^3)。A 是 PGC 在大气中，H 是 PGC 在海洋的混合层。常大气中的碳作为碳浓度在大气中以百万分之几的讨论。但是在讨论陆气通量时，我们将做的，是有意义的讨论质量方面的碳，PGC 的，因此选择[16]式。(1) 处于 MacAyeal 的突变模型[11]所用的方程的变体。参数 γ 是决定冰片如何迅速放松到平衡时标参数。在 MacAyeal 的制剂， γ 实际上是依赖于 X_e 和吨的变量，但是它被认为是小的和积极的。我们已经放弃了依赖，使 γ 真正的参数。大气中的碳和太阳辐射的影响由术语 $A_0(B_0 - A)$ 包封。参数 B_1 和 B_2 不给出[11]明确的，定量解释。当 B_2 为正时，冰盖动力学可以是在双稳态机制由于立方性质等式 (1)。这双稳起着展示了网游的能力具有重要作用。我们的双稳态的讨论从 MacAyeal 的略有不同。对于我们的目的，在双稳态冰量需要时间尺度的分离-对应于冰盖动力学的相对释放速率和碳集合 - 即 WILBE 在一个无量纲的模型的显式 (见表 1)。

等式 (2) 可以被分解为两个术语：陆地-大气通量

$$B_3[P(X_e - X_e^*)^2 - B_4 - A],$$

和海洋大气磁通

$$L + B_5A - B_6H.$$

请注意，海洋大气通量在等式 (3)。也就是说，不管碳从除气（或通过吸收）海洋必须转移到（或来自）大气中。海洋大气通量是一个非常复杂的过程。首先，海洋具有各种尺寸的许多碳库（例如，混合层和深海[16]）。在海洋环流的变化改变被泵入混合层对什么是存储在深海的碳量。在 PAILLARD 和 Parrenin 的工作，在驱动冰间周期碳动态密钥非线性发生在海洋大气成分[4]。另外，碳的海气交换是温度依赖性的，因为 CO_2 的溶解度依赖于温度[17]。确认这是一个粗略的简化，我们假设大气和海洋之间的碳交换如下一个简单的线性方程如在[18]中描述。近似缓慢非线性机理与线性项已被证明在具有多个时间尺度系统照亮。从神经科学的一个特定例子是霍奇金赫胥黎方程[19,20]的耦合 FitzHugh-N 近似。考虑到神经科学的理论 MMO 的历史发展中的作用，这种近似看起来很自然。

地面，或土地气氛，通量取决于岩石圈和生物圈（除其他事项外）[21]。亚当斯和福雷[22]；十字架，贝茨 [23]，费斯切尔[24]，和莱顿福特 [21]所有在最后冰最大讨论减少陆地碳库。我们的模型适应由莱顿福特 [21]所使用的制剂，假设存在一个临界冰盖体积 X_e^* （对应于临界温度），其中碳是缩编最有效的。尽管共识，即在最后冰最大减小的陆地碳池，这样的定量仍有争议[24]。量化辩论是我们之所以犹豫不决分配特定值的参数之一。究其原因，地面 PGC 没有控制方程是系统的总碳含量应保守。虽然可以在其中细分[16]，我们正在考虑三个碳库：大气，陆地，海洋和。由于是一个保守的数量，只需要两个控制方程。

2.2 数学（无量纲）模型

在努力简化计算，我们设定

$$X = -X_e$$

所以 X 生长随着温度的升高，从而允许用于与图更容易的比较。注意类似地，我们引入

$$X^* = -X_e^*$$

在变量 X, A, H ，所述系统 (1) - (3) 成为

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dX}{dt} &= -\gamma \frac{dX_e}{dt} = A_0(A - B_0) - B_1X^3 + B_2X, \\ \frac{dA}{dt} &= B_3[P(X - X^*)^2 - B_4 - A] - (L + B_5A - B_6H), \\ \frac{dH}{dt} &= L + B_5A - B_6H. \end{aligned}$$

其次，基于图作出的观察结果 1，模型 (4-6) 应该演变在多个时间尺度。时间尺度的这种分离可以仅在一个无量纲的模型来识别。

因此，我们定义的无量纲量

$$x = \frac{X}{X_c}, y = \frac{A}{A_c}, z = \frac{H}{H_c}, s = \frac{t}{t_c},$$

其中，

$$X_c = \sqrt{\frac{B_2}{3B_1}}, A_c = \frac{B_2}{3A_0} X_c, t_c = \frac{3}{B_2} \gamma,$$

然后方程 (4-6) 变得

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - x^3 + 3x - k \\ \dot{y} &= p(x - a)^2 - b - my - (\lambda + y) + z \\ \dot{z} &= r(\lambda + y - z) \end{aligned}$$

新的无量纲参数与方程的物理参数。公式 (4-6):

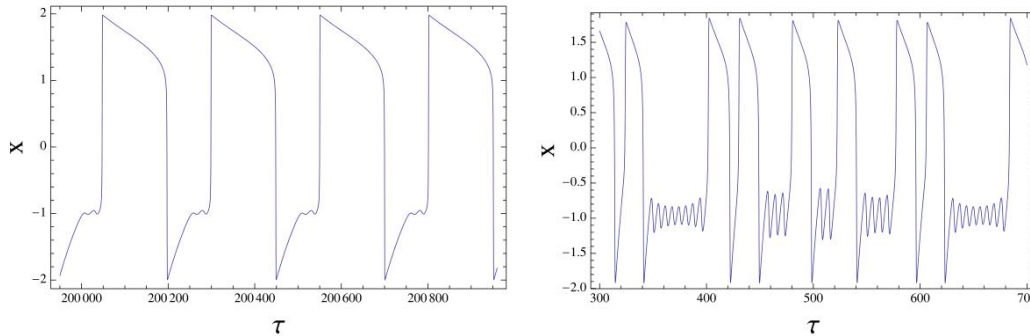


图 2 模型中生成的 MMOs。 (a) 中稳定 MMO 轨道与参数 $\varepsilon = 0.01$ (b) 稳定 MMO 轨道与参数 $\varepsilon = 0.1$ 。

任何时间尺度分离是通过 $\varepsilon_1 = \varepsilon$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon r$ 来确定。正如前面提到的, 在古气候问题的参数值是一些争论的主题。在根据基于图 1 我们的观察, 我们假设在时间尺度除碳更快该温度演变, 意味着 $0 < \varepsilon \ll 1$ 。如果 $r = O(1)$, 我们有 1 速和 2 慢变量, 并且如果 $r \ll 1$, 我们在这三个时间尺度的情况下。取决于哪个参数保持键不具有 $0 < \varepsilon \ll 1$, 其他参数可以是小的为好。同样, 我们的做法是尽量少承担有关的参数, 所以我们会记住这一点, 因为我们进行分析。

备注 1. 该模型的无量纲形式是科佩尔模式, 即已知的是表现出网游[25,26]的电化学模型的变体。在化学和神经科学许多其他模型也证明网游 (例如, 霍奇金改性-赫胥黎方程[27])。实际上, 在其他地区的许多机制, 如在化学反应或在神经模型门控离子通道的质量平衡行为类似于某些气候机制, 如质量守恒或穿过海洋大气表面二氧化碳的交换。

几何原理, 用于分析与多个时间尺度动力系统 被称为 Fenichel 理论或几何奇异扰动理论(GSPT) [28,29] 用于研究奇异扰动的问题, 例如系统(7)提供了有力的工具(9)。GSPT 和吹胀技术[30-32] 提供关于全局行为严格的结果, 如驰豫振荡[33]。图 2 示出另一种类型的复杂行为振荡器称为混合模式振荡 (MMOs)。神经生理学实验已知产生类似的模式[34-38]。最近, 这些复杂的振荡一直使用的鸭翼理论[39]通过利用基本模型[40-44,32,45,46]的多时间尺度性质说明连同适当的全球回报机制。这是现在一个被广泛接受的解释网游; 参见, 例如, [47,48]。

3. 分析系统

在本节中, 我们将分析系统 (7) - (9)。我们假定系统是单独与奇异扰动参数 ε 。我们假设 $r = O(\varepsilon^n)$ 的扰动 $n = 0, n = 1$ (尽管分数幂可能是可接受的以及)。因此, 我们使用的是 2 慢/快 1 的方法, 其允许的情况下, 其中 $r = O(\varepsilon)$ 。其中 r 是小 在适当的时候我们将在此案发表评论。

下面的数量都将在我们的计算中经常出现, 所以我们定义

$$\begin{aligned}
 h(x) &= x^3 - 3x + k \\
 f(x) &= p(x-a)^2 - b \\
 F(x, y) &= y - h(x)
 \end{aligned}$$

3.1 层的问题

为了开始分析，我们重新调整时间变量 s 由 ε^{-1} 获得系统

$$\begin{aligned}
 x' &= y - h(x) = y - x^3 + 3x - k \\
 y' &= \varepsilon[f(x) - my - (\lambda + y) + z] \\
 z' &= \varepsilon r(\lambda + y - z)
 \end{aligned}$$

$\tau = \varepsilon^{-1}$ 是快速时间尺度（而 s 是缓慢的时间尺度）。只要 $\varepsilon > 0$ ，则新的系统 (10-12) 等效于 (7-9) 在这个意义上轨迹的路径是不变-它们仅仅以不同的速度跟踪。然而，在单数的限制（即，作为 $\varepsilon \rightarrow 0$ ）的系统是不同的。

当 $\varepsilon = 0$ 时，系统 (10-12) 成为

$$\begin{aligned}
 x' &= F(x, y) \\
 y' &= 0 \\
 z' &= 0
 \end{aligned}$$

这就是所谓的层的问题。请注意，在 y 和 z 方向的动力是微不足道的。临界流形，

$$M_0 = \{F(x, y) = 0 = \{y = h(x)\},$$

M_0 是“S”形具有两个吸引分支 $M_A = \{\pm x > 1\}$ ，和分支排斥 $M_R = \{-1 < x < 1\}$ 。

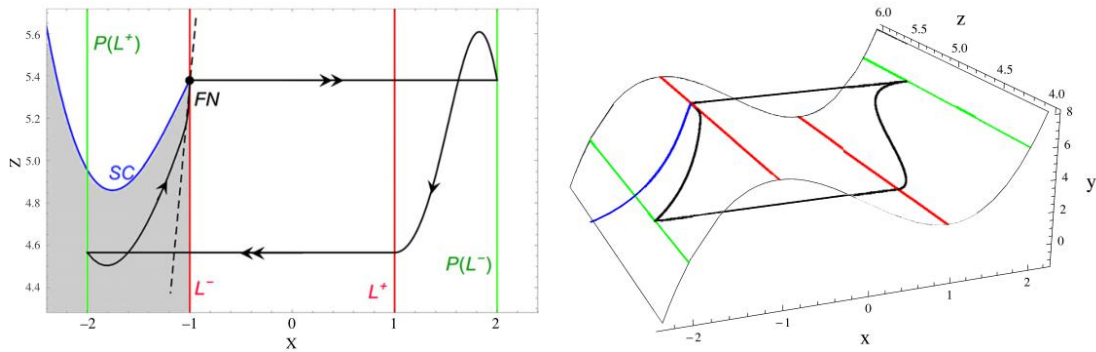


图 3 奇异周期轨道的实例 (a) 单数的轨道的投影到临界流形与该折叠线的投影。该漏斗是强鸭式 γ_s （表示为 SC）下方的阴影区域。虚线表示沿着漏斗办法 FN 内其轨迹弱特征值方向。

折曲线为 $L^\pm = \{x = \pm 1\}$ 。在折叠 L^\pm ，临界流形是基本 GSPT 理论通常双曲临界流形发生故障。正如通常的情况一样，在科学和数学上有趣的行为出现在标准理论不适用。在我们的例子中，折叠以便更复杂的动力学，如放宽振荡或 MMOs。

3.2 降维系统的层问题

它描述了快速动力学离开关键歧管，通过考虑等式的 $\varepsilon = 0$ 的限制而获得 (10-12)。(9) 如 $\varepsilon \rightarrow 0$ 临界流形，或慢动力学的动力学，是通过查看系统 (7) 获得。在单数的限制，系统变得

$$\begin{aligned}
 0 &= y - h(x) \\
 y' &= f(x) - my - (\lambda + y) + z \\
 z' &= r(\lambda + y - z)
 \end{aligned}$$

3.3 鸭式导致的 MMOs

折叠节点（以及折叠鞍节点）可以产生的 MMO 与合适的全局复位机构[42]。的节点（在 2D 系统）具有相同的符号，弱特征值 μ_w 和强大的特征值 μ_s 的两个实本征值，使得 $|\mu_w| < |\mu_s|$ 。每个特征值对应于接近折叠节点切线对应的特征向量的轨迹。这些特殊轨迹的几何形状在返回了关键作用机制。本文表示（对应于 μ_s ）由 γ_s 强稳定的轨迹，同样定义弱稳定的弹道 γ_w 。

由于 γ_s 是慢动力学的轨迹，溶液防止交叉它其他慢轨迹的唯一性。因此， γ_s 分区米分成轨迹的两个区域。具体地， γ_s 中隔离在达到从那些达到节点之前越过折轨迹折叠在所述节点处。除了 γ_s ，接近一个稳定的点的轨迹沿弱稳定的弹道叠起来。所以，我们看到，在含有 γ_w 上的区域轨迹将达到节点处的褶皱。关于 γ_s 的相对侧的轨迹将折叠首先到达。强稳定轨迹 γ_s 和折叠 L 之间的区域图 3 (a) 和 5 由图中的阴影区域来表示)，它包含弱稳定轨迹 γ_w 。特被称为奇异液漏斗中，我们经常指 γ_s 作为漏斗的边界。由于 γ_s 也被称为强鸭翼，它被标记在图“SC”。图 3 (a) 和 5 在该区域中的所有轨迹将达到在折叠节点折叠，而在 γ_s 的另一侧上的所有轨迹跨越折叠而没有到达节点[39]。

我们通过构建一个单一的周期轨道 Γ ，由层问题，并在其中的每台稳定分支 M_A^\pm 的段异轨道建立一个全球性的回报机制。该层问题的异轨道采取轨迹从折叠 L^\pm 到相对稳定的分支其投影 $P(L^\pm)$ 。奇异周期轨道 Γ 的一个例子示于图 3。假设有对 L 折叠节点（不失一般性），我们可以通过以下从节点到稳定分支 M_A^+ 快速纤维构造 Γ 。从那里，轨迹遵循如由 (17) 中描述的，直到它到达所述折叠 L^+ 上 M_A^+ 缓慢流动。如果在一个跳跃点到达 L^+ ，我们遵循的快肌纤维背到 M^- 一个。我们希望在 M 上的着陆点一个是在漏斗，因为从折叠节点的任何单一轨道是返回到漏斗必然是奇异周期轨道。

定理 1 假设以下假设在一个快速/慢速系统有，

(A1) $0 < \varepsilon \ll 1$ 是具有 $\varepsilon^{1/2} \ll 1$

(A2) 临界流形是“S”形的，即， $M_0 = M_A^- \cup L^- \cup M_R \cup L^+ \cup M_A^+$ ，

(A3) 有上（稳定）折叠节点 N （不失一般性） L^- ，

(A4) 有一个奇异周期轨道 Γ 使得 $\Gamma \cap M_A^-$ 在于单数漏斗至 N 的内部和 (A5) Γ 跨越 L^\pm 横向。

则存在 MMO 的一个稳定的周期轨道类型 1^s ，这里，

$$s = \left[\frac{(1+\mu)}{2\mu} \right]$$

在[49]中, Krupa 和 Wechselberger 显示，折叠的节点理论仍然适用于其中 $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$ 参数制度，如

果全局复位机构仍然是完整的（即， $\Gamma \cap M_A^-$ 在于内部奇异漏斗）。注意，在这个参数的政权，在

MMO 签名可能更复杂。图 11 示出了几个由(7)中生成的更有趣的 MMO 图案 (9) 当 $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$ 。

本节的剩余部分将集中在寻找对方程的参数条件。(7) - (9)，以使系统满足 (A1 - A5)。由于 μ 以单数形式的限制计算，我们可以随时选择 ε 足够小，以满足条件 (A1)。还有，我们已经讨论的临界流形的“S”形状，表明条件 (A2) 被满足。下一个任务将是发现的条件，使方程 (7-9) 具有一个折叠的节点奇点。

3.4 折叠节点条件

图 1 所述的数据显示发生了在低温下的小振幅振荡，所以我们寻求哪些参数 (16) 具有沿着所述下折升的稳定折叠的节点。

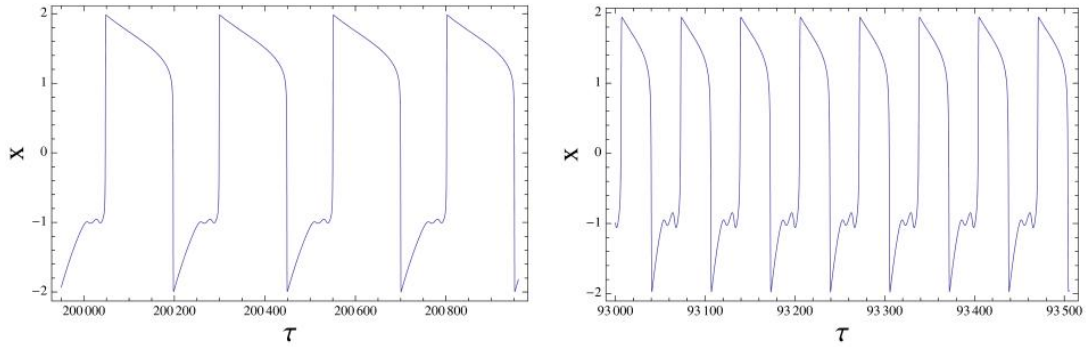


图 4 为 ε 的不同值的时间序列，当 $a = 0.8, p = 3, b = 2.1, k = 4, r = 1, m = 1, \lambda = 1$ 。

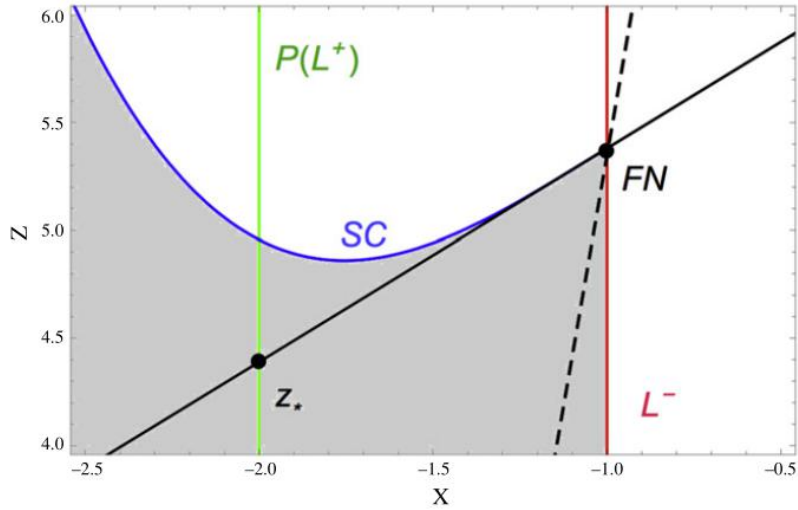


图 5 一种下界漏斗的边缘。折线 L^- 又是红色。 $P(L^+)$ ，绿色画，是一组中的快速轨道上留下 M_A^- 。黑色实线 Z_* 是强特征方向，而虚线是弱特征方向沿着该漏斗方法 FN 里面轨迹。（对于这个图例颜色的引用解释，读者可以参考这篇文章的网页版。）

3.5 漏斗

假设节点条件 (a) 的估计，从引理 2 都满足 (d) 中，折叠的奇点会产生强烈的稳定本征值（特征向量）和弱稳定本征值（特征向量）。让 $\mu_{s,w}$ 是特征值，其中 s 和 w 分别表示强弱，然后

$$\mu_s < \mu_w < 0$$

还设 $(x_{s,w}, z_{s,w})$ 表示相应的特征向量。一个简单的计算示出了特征向量的斜率

$$m_i = \frac{z_i}{x_i} = \frac{-6r\delta}{\mu_i} > 0$$

3.6 奇周期轨道

我们现在寻求的条件，使一个单一的轨道叫折叠节点，沿 $P(L^-)$ 在 M_A^+ 的土地，遵循降低的问题

对 L^+ 的轨迹，穿越 L^+ 横向，并返回到 M_A^- 下面 Z 上 $P(L^+)$ 。在 L^+ 和 M_A^+ 奇异性将发挥在确定保证了奇周期轨道存在的条件主要作用。

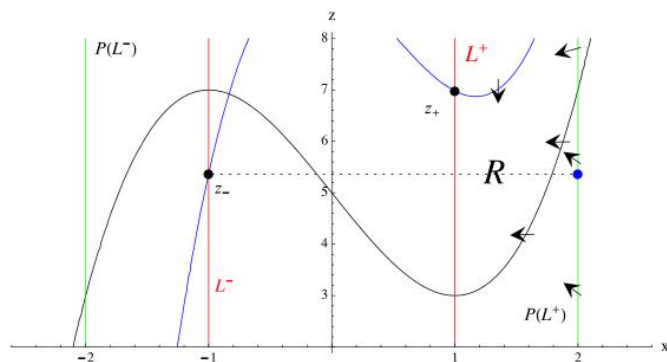


图 6 中的单数极限位置零值线的当 $a = 0.8, p = 3, b = 2.1, k = 4, r = 1, m = 1, \lambda = 1$ 时，蓝色曲线表示在 x 零值线，黑色曲线表示与 z 零值线。蓝点是从节点奇异轨道的着陆点。上 M_A^+ 的零值线之间的区域 R 是局部正不变。（对于这个图例颜色的引用解释，读者可以参考这篇文章的网页版。）

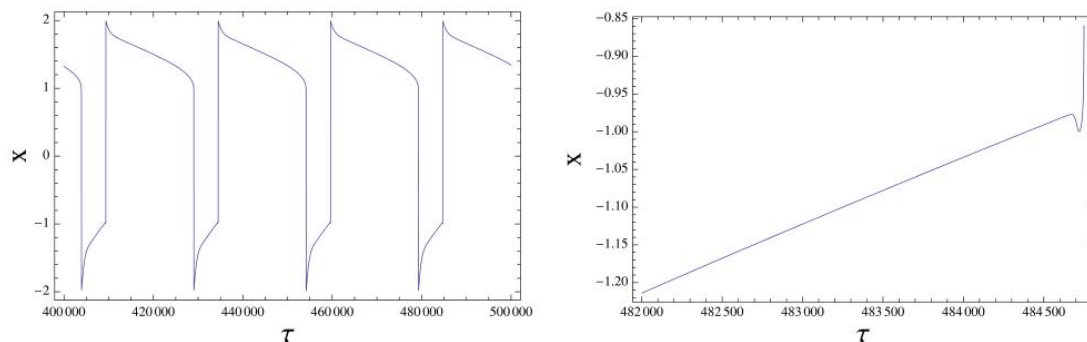


图 7 MMO 轨道为 $\varepsilon = 0.001, a = 0.91, p = 1.05, b = 0.31, k = 2.2, r = 0.3, m = 0.6, \lambda = 1$ 。利用这些参数 $\delta = 1$ 。

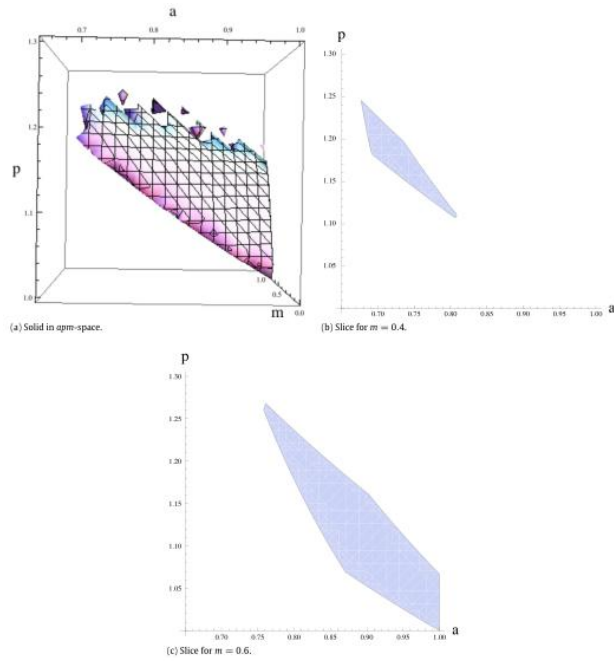


图 8 从定理 6 满足条件 (a) - (i) 为 $\delta=1.3$ 的 apm-空间参数。

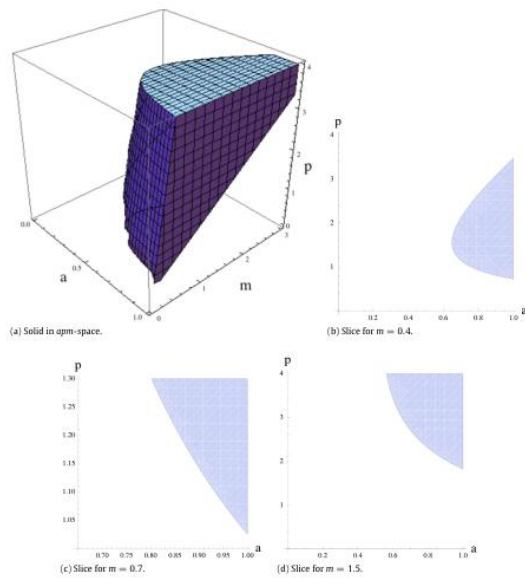


图 9 从定理 6 满足条件 (a) - (d) 为 $\delta=1$ 的 apm-空间参数

3.7 主要结果

定理 6 假设系统 (7-9) 满足条件 (a) - (i) 中。然后，对于 ε 足够小，该系统将具有 MMO 型的稳定的周期轨道 1^s 对于一些 $s > 0$ 。

3.8 延伸的参数区域

虽然条件 (a-i) 是足够的，它们不是用于该模型表现出 MMOs 所有的必要条件。事实上，他们是相当严格的。这是线性近似漏斗分析获得条件的直接后果。图 9 描绘了相空间仅满足不涉及到漏斗的线性近似的定理 6 的条件的一部分。但是，不是从图 9 中描绘的区域。所有的参数会产生

MMO 轨道。

根据定理 6, 描述参数制度以外 (一些 MMO 型的), 诸如一个图 4 中的稳定的周期轨道, 可以更复杂, 因为第 r 转机构的突出的单数周期轨道更靠近的结果边界漏斗的 (即, 更靠近强鸣 r_s)。在这一制度的行为也被 Bröns 等人在 [42]。对于生成图 4 中的轨道的参数, $\mu \approx 0.1010$, $s = 5$ 。然而, 对于轨道 MMO 签名是 1^2 。这是因为返回机构发来的奇异极限漏斗的边界附近的轨迹。

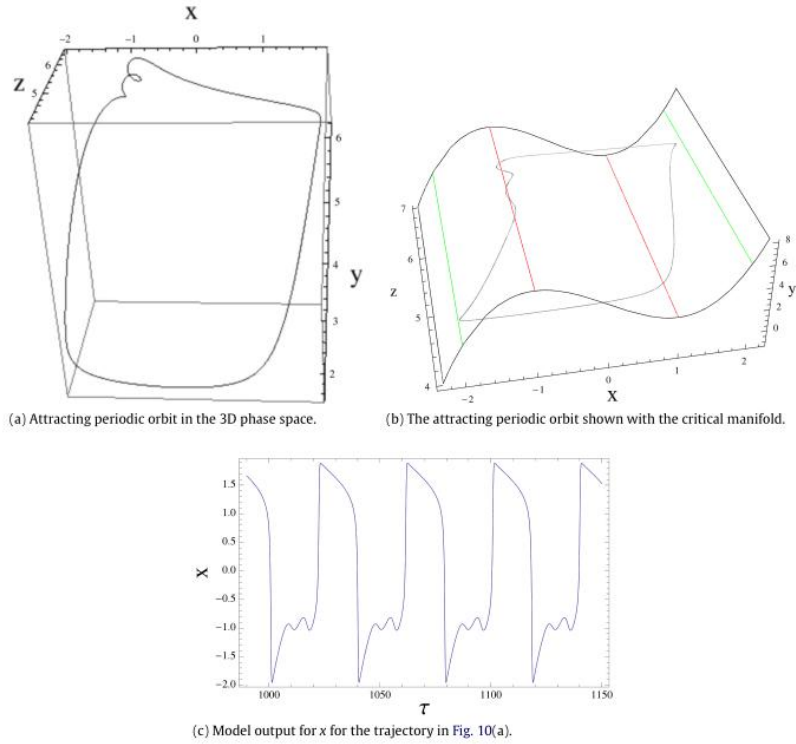


图 10 为 MMOs, $\varepsilon=0.1, a=0.8, p=3, b=2.1, k=4, r=1, m=1, \lambda=1$ 。

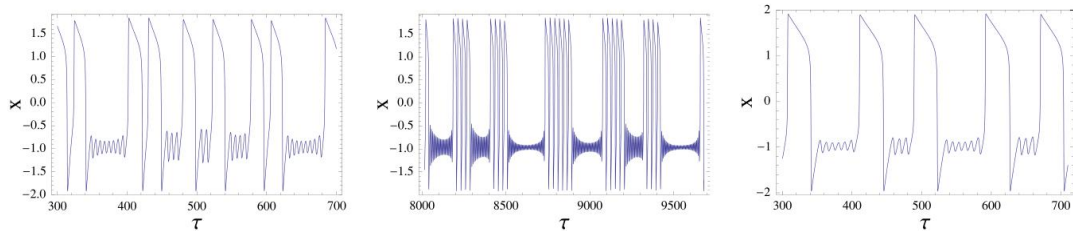


图 11 在三个时间尺度的情况下 MMOs 模式的例子。

4. 讨论

我们已经找到足够的条件,使得系统(7-9)具有与MMOs的1个稳定的周期轨道。据我们所知,这是已经被分析证明网游第一个基于气候模式。无量纲模型是具有添加的非线性的模型科佩尔的变体。与标准科佩尔模型,该模型具有一个“S”形临界歧管和一个带折叠节点和全球返回机构的参数制度。虽然在模型中的附加非线性并不因素考虑获得折叠节点,非线性效应在确定漏斗的形状,发挥显著的作用,因此返回机制。从数学的立场来看,它是显著的额外的非线性呢不破坏模型的功能,产生MMO模式。

我们都能够找到定理6解析,这是MMO的问题一个罕见的条件。虽然是好的,有分析证明,这种方法排除了参数空间中显著区域,其中MMOs可以找到。数值逼近强鸭翼,用于演示网游的标准做法,帮助提供产生的MMO参数政权的更完整的画面。该方法依赖于在同一时间改变一个参数,因此很难真正绘制完成区域。

图中的时间序列。在1和10(c)是,它们都含有大量的振荡后面是一系列小的幅度振荡的性质上相似。注意, $\varepsilon=0$ 。在图1中10是不是真正的小。在图2和4中,我们绘制具有较小 ε 类似轨迹(保持固定其他参数)。图3示出了用于所有这些例子中的单数轨道。我们专注于图中的MMOs,因为它类似图1的自 ε 较大时,我们能看见小振幅振荡清楚。

该模型可以给我们介绍一下气候系统的一些见解。

模型中所要求的物理含义,即 $-1 < \alpha < 1$ 是 CO_2 的牵伸由于地面的机制是最有效的温度(或冰体积)稳定冰和间状态之间的某个地方。通过对 δ 要求我们了解他们之间的关系。这涉及从大气除去 CO_2 的量当行星是最有效的,在这样做的(b)中,陆地大气碳通量的时间尺度到海洋大气交换(m)的比例,并且最小/大气中的碳(k)的最大值。最后,r告诉我们一些有关碳在大气中的碳在从吸收到除气海洋到交换机所需要的海洋的比例。如果r为大,我们将不再有一个折叠节点。可能的情况是, $r \ll 1$,这使我们接近折叠鞍节点限制,并允许更复杂的行为。随 $r \ll 1$ 一些模拟示于图11。

致谢

A.R.和C.J.是由数学和气候研究网络NSF支持授予DMS-0940363和DMS1239013。E.W.部分由美国国家科学基金会上授予DMS-0940363的MCRN以及赠款亚利桑那来自HHMI大学(52006942)由澳大利亚研究顾问的授权号FT120100309.M.W.was支撑。此外,我们希望在审查过程中,感谢塞巴斯蒂安·维乔雷克对他有益的见解在这个项目和米歇尔十字架为他的有益意见的开始阶段。

参考文献

- [1] Barry Saltzman, Kirk A. Maasch, Carbon cycle instability as a cause of the late Pleistocene ice age oscillations: Modeling the asymmetric response, *Glob. Biogeochem. Cycles* 2 (2) (1988) 177 - 185.
- [2] Barry Saltzman, Kirk A. Maasch, A first-order global model of late Cenozoic climatic change, *Earth Environ. Sci. Trans. R. Soc. Edinb.* 81 (1990) 315 - 325.
- [3] Barry Saltzman, Kirk A. Maasch, A first-order global model of late Cenozoic climatic change II. Further analysis based on a simplification of CO_2 dynamics,

- Clim. Dynam. 5 (4) (1991) 201 - 210. (English).
- [4] Didier Paillard, Frédéric Parrenin, The antarctic ice sheet and the triggering of deglaciations, *Earth Planet. Sci. Lett.* 227 (3 - 4) (2004) 263 - 271.
- [5] Andrew McC. Hogg, Glacial cycles and carbon dioxide: A conceptual model, *Geophys. Res. Lett.* 35 (1) (2008).
- [6] Michel Crucifix, Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory, *Phil. Trans. R. Soc. A 370* (1962) (2012) 1140 - 1165.
- [7] Peter D. Ditlevsen, Bifurcation structure and noise-assisted transitions in the pleistocene glacial cycles, *Paleoceanography* 24 (3) (2009).
- [8] M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. Kuehn, H. Osinga, M. Wechselberger, Mixed-mode oscillations with multiple time scales, *SIAM Rev.* 54 (2) (2012) 211 - 288.
- [9] J.R. Petit, J. Jouzel, D. Raynaud, N.I. Barkov, J.M. Barnola, I. Basile, M. Bender, J. Chappellaz, M. Davis, G. Delaygue, M. Delmotte, V.M. Kotlyakov, M. Legrand, V.Y. Lipenkov, C. Lorius, L. Pépin, C. Ritz, E. Saltzman, M. Stievenard, Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica, *Nature* 399 (1999) 429 - 436.
- [10] Johannes Weertman, Milankovitch solar radiation variations and ice age ice sheet sizes, *Nature* 261 (5555) (1976) 17 - 20.
- [11] Douglas Reed MacAyeal, A catastrophe model of the paleoclimate, *J. Glaciol.* 24 (90) (1979).
- [12] J. Oerlemans, Some basic experiments with a vertically-integrated ice sheet model, *Tellus* 33 (1) (1981) 1 - 11.
- [13] Reinhard Calov, Andrey Ganopolski, Multistability and hysteresis in the climate-cryosphere system under orbital forcing, *Geophys. Res. Lett.* 32 (21) (2005).
- [14] Michel Crucifix, How can a glacial inception be predicted? *Holocene* 21 (5) (2011) 831 - 842.
- [15] Ayako Abe-Ouchi, Fuyuki Saito, Kenji Kawamura, Maureen E. Raymo, Jun'ichi Okuno, Kunio Takahashi, Heinz Blatter, Insolation-driven 100,000-year glacial cycles and hysteresis of ice-sheet volume, *Nature* 500 (7461) (2013) 190 - 193.
- [16] Daniel M. Sigman, Edward A. Boyle, Glacial/interglacial variations in atmospheric carbon dioxide, *Nature* 407 (2000) 859 - 869.
- [17] Corinne Le Quéré, Nicolas Metzl, Natural processes regulating the ocean uptake of CO₂, *SCOPE-Sci. Committee Probl. Environ. Int. Council Sci. Unions* 62 (2004) 243 - 256.
- [18] U. Siegenthaler, J.L. Sarmiento, Atmospheric carbon dioxide and the ocean, *Nature* 365 (1993) 119 - 125.
- [19] Richard FitzHugh, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.* 1 (6) (1961) 445 - 466.
- [20] Jinichi Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE* 50 (10) (1962) 2061 - 2070.
- [21] Timothy M. Lenton, Christopher Huntingford, Global terrestrial carbon storage and uncertainties in its temperature sensitivity examined with a simple

- model, *Global Change Biol.* 9 (10) (2003) 1333 - 1352.
- [22] Jonathan M. Adams, H. Faure, A new estimate of changing carbon storage on land since the last glacial maximum, based on global land ecosystem reconstruction, *Glob. Planet. Change* 16 (1998) 3 - 24.
- [23] Michel Crucifix, Richard A. Betts, Christopher D. Hewitt, Pre-industrial-potential and last glacial maximum global vegetation simulated with a coupled climate-biosphere model: diagnosis of bioclimatic relationships, *Glob. Planet. Change* 45 (4) (2005) 295 - 312.
- [24] Peter Köhler, Hubertus Fischer, Guy Munhoven, Richard E. Zeebe, Quantitative interpretation of atmospheric carbon records over the last glacial termination, *Glob. Biogeochem. Cycles* 19 (4) (2005).
- [25] Marc Koper, Bifurcations of mixed-mode oscillations in a three-variable autonomous van der pol-duffing model with a cross-shaped phase diagram, *Physica D* 80 (1) (1995) 72 - 94.
- [26] Christian Kuehn, On decomposing mixed-mode oscillations and their return maps, *Chaos* 21 (3) (2011) 1 - 15.
- [27] Jonathan Rubin, Martin Wechselberger, The selection of mixed-mode oscillations in a hodgkin-huxley model with multiple timescales, *Chaos* 18 (1) (2008) 015105.
- [28] Neil Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Differential Equations* 31 (1979) 53 - 98.
- [29] Christopher K.R.T. Jones, Geometric singular perturbation theory, in: *Dynamical Systems*, Springer, 1995, pp. 44 - 118.
- [30] Freddy Dumortier, Robert H. Roussarie, *Canard Cycles and Center Manifolds*, Vol. 577, American Mathematical Soc., 1996.
- [31] M. Krupa, P. Szmolyan, Relaxation oscillation and canard explosion, *J. Differential Equations* 174 (2) (2001) 312 - 368.
- [32] Peter Szmolyan, Martin Wechselberger, Canards in R^3 , *J. Differential Equations* 177 (2) (2001) 419 - 453.
- [33] Peter Szmolyan, Martin Wechselberger, Relaxation oscillations in R^3 , *J. Differential Equations* 200 (1) (2004) 69 - 104.
- [34] Ron Amir, Martin Michaelis, Marshall Devor, Burst discharge in primary sensory neurons: triggered by subthreshold oscillations, maintained by depolarizing afterpotentials, *J. Neurosci.* 22 (3) (2002) 1187 - 1198.
- [35] Clayton T. Dickson, Jacopo Magistretti, Mark H. Shalinsky, Erik Fransén, Michael E. Hasselmo, Angel Alonso, Properties and role of ih in the pacing of subthreshold oscillations in entorhinal cortex layer ii neurons, *Methods* 1996 (1998) (1998).
- [36] Y. Gutfreund, I. Segev, et al., Subthreshold oscillations and resonant frequency in guinea-pig cortical neurons: physiology and modelling, *J. Physiol.* 483 (Pt 3) (1995) 621 - 640.
- [37] Sara Khosrovani, Ruben Simon Van Der Giessen, C.I. De Zeeuw, M.T.G. De Jeu, In vivo mouse inferior olive neurons exhibit heterogeneous subthreshold oscillations and spiking patterns, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 104 (40) (2007)

15911 - 15916.

- [38] Christopher A. Del Negro, Christopher G. Wilson, Robert J. Butera, Henrique Rigatto, Jeffrey C. Smith, Periodicity, mixed-mode oscillations, and quasiperiodicity in a rhythm-generating neural network, *Biophys. J.* 82 (1) (2002) 206 - 214.
- [39] Martin Wechselberger, Canards, *Scholarpedia* 2 (4) (2007) 1356.
- [40] Eric Benoit, Jean Louis Callot, Francine Diener, Marc Diener, et al., Chasse au canard (première partie), *Collect. Math.* 32 (1) (1981) 37 - 76.
- [41] Éric Benoît, Systemes lents-rapides dans \mathbb{R}^3 et leurs canards, *Astérisque* 109 (110) (1983) 159 - 191.
- [42] M. Bröns, Martin Krupa, Martin Wechselberger, Mixed mode oscillations due to the generalized canard phenomenon, *Fields Inst. Commun.* 49(2006)39 - 63.
- [43] John Guckenheimer, Singular Hopf bifurcation in systems with two slow variables, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 7 (4) (2008) 1355 - 1377.
- [44] Alexandra Milik, Peter Szmolyan, Helwig Löffelmann, Eduard Gröller, Geometry of mixed-mode oscillations in the 3D autocatalator, *Int. J. Bifurcation Chaos* 8 (03) (1998) 505 - 519.
- [45] M. Wechselberger, Existence and bifurcation of canards in \mathbb{R}^3 in the case of a folded node, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 4 (1) (2005) 101 - 139.
- [46] Martin Wechselberger, A propos de canards (a propos canards), *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (6) (2012) 3289 - 3309.
- [47] Morten Bröns, Tasso J. Kaper, Horacio G. Rotstein, Introduction to focus issue: mixed mode oscillations: experiment, computation, and analysis, *Chaos* 18 (1) (2008) 015101.
- [48] Peter De Maesschalck, Freddy Dumortier, Martin Wechselberger, Special issue on bifurcation delay, 2009.
- [49] Martin Krupa, Martin Wechselberger, Local analysis near a folded saddle - node singularity, *J. Differential Equations* 248 (12) (2010) 2841 - 2888.
- [50] Jonathan Rubin, Martin Wechselberger, Giant squid-hidden canard: the 3D geometry of the Hodgkin - Huxley model, *Biol. Cybernet.* 97 (1) (2007) 5 - 32.
- [51] Sebastian Wieczorek, Peter Ashwin, Catherine M. Luke, Peter M. Cox, Excitability in ramped systems: the compost-bomb instability, *Proc. R. Soc.* 467 (2129) (2011) 1243 - 1269.
- [52] John Mitry, Michelle McCarthy, Nancy Kopell, Martin Wechselberger, Excitable neurons, firing threshold manifolds and canards, *J. Math. Neurosci. (JMN)* 3 (1) (2013) 1 - 32.
- [53] Martin Wechselberger, John Mitry, John Rinzel, Canard theory and excitability, in: *Nonautonomous Dynamical Systems in the Life Sciences*, Springer, 2013, pp. 89 - 132.