

由于奇异分支导致混合模式振荡的森林害虫模型

Morten Brøns

应用数学和丹麦技术大学计算机学院, 灵比, 丹麦

Mathieu Desroches and Martin Krupa

巴黎-罗屈昂库尔研究中心, 切斯奈, 法国

在森林病虫害模型, 小树是从老树区分。有害生物饲料对古树。害虫生长在一个快速的规模, 在中间规模的小树, 并在缓慢的规模古树。奇异 Hopf 分支和一个“弱返回”机构, 其特征在于在其中一个变量的变化小的组合, 确定所述混合模式振荡的特征。倍周期和鞍结分岔导致对应于奇异霍普夫分岔分岔周期解的封闭的族。

关键词: 鸭解; 森林病虫害模型; 混合模式振荡; 奇异霍普夫分岔; 快慢系统

1. 引言

云杉蚜虫云杉卷叶蛾疫情已定期在美国东部自 19 世纪初 (舒尔茨, 2009) 记录。烟青虫损坏香脂冷杉和云杉和暴发有森林工业经济的严重后果 (库塞拉和奥尔, 1980 年)。路德维希等 (1978 年), 涉及人口动态, 包括树木和蚜虫之间的互动。他们发现弛豫振荡: 在人群中慢慢移动, 逼近准平衡状态, 暂时中断对应于蚜虫爆发快速动态的时期。该青虫人口增长对更快的规模比树木的事实意味着, 该模型有一个固有的慢-快结构, 其中这种动态的预期。弛豫振荡在其它森林害虫模型也观察到 (贝里曼等人 1987; 里纳尔迪, 1989; 里纳尔迪穆拉托, 1992; 安东诺夫斯基等人, 1990; 格拉尼亚尼等人 1998; 伯尔等 2006 年)。

我们再来考虑这三个变量的森林病虫害里纳尔迪和穆拉托里 (1992 年) 的模型, 对 Brøns 和 Kaasen (2010 年), 谁发现的存在发展在该模型中混合模式振荡。树木的人口在年轻人和古树的结构捕捉的事实, 虫害主要捕食古树。在无量纲变量的方程

$$\begin{cases} x'(t) = a_1 y(t) - a_2 x(t) - a_3 \frac{x(t)z(t)}{a_4 + x(t)}, \\ \delta y'(t) = a_5 x(t) - (a_6(x(t) - a_7)^2 + a_8 + \delta a_1) y(t), \\ \varepsilon z'(t) = (-a_9 - a_{10} z(t) - \frac{a_{11}}{a_{12} + z(t)} + a_{13} \frac{x(t)}{a_4 + x(t)}) z(t) \end{cases}$$

其中, $x(t)$ 是古树的人口规模, $y(t)$ 是幼树的人口规模和 $z(t)$ 为 t 时刻的害虫种群规模。对古树的时间刻度为 1 时, δ 是幼树的时间尺度, ε 是害虫 (里纳尔迪和穆拉托里, 1992 年) 的时间尺度。

(1) 式具有由不变平面 $\{z=0\}$ 和不变线 $\{x=y=0\}$ 定特殊的结构。的空间的相关部分是不变的半空间 $\{z>0\}$, 对应于该条件, 即害虫种群大小始终是正的。(1) 类似于对称系统中不变的空间, 尤其是不变的超平面, 往往起着重要的作用。

里纳尔迪和穆拉托里 (1992 年) 考虑的情况下 $\varepsilon \ll \delta \ll 1$ 。基于奇异摄动理论, 用参数不平等保证弛豫振荡的存在。Brøns 和 Kaasen (2010) 认为公式。(1) 在极限 $\delta \rightarrow 0$ 的固定小即 Fenichel 理论 (1979) 允许减少到二维系统上的吸引不变流形接近至 $y'=0$ 。减小系统具有鸭式爆炸 (Benot 等人, 1981)。当参数是通过 Hopf 分支变化, 会出现一个极限周期。它生长到松弛在窄参数区间。生物, 一个 Hopf 分支的组合和鸭式爆炸对应于从其中森林被感染的平衡状态的过渡 (即, 害虫种群 $z \neq 0$) 朝向与青虫暴发周期性状态。

鸭式布局的分析只适用于 δ 足够小。为 δ 的增加，二维不变流形发生故障时，允许三维混合模式振荡（德罗什等人，2012），即，具有小的和大的振荡和长时间（图1c）极限周期。

混合模式振荡发生在与折叠奇点系统（Brøns 等人，2006）。我们将证明，折叠节点式的存在。（1），并且不用于确定在 Brøns 和 Kaasen（2010）考虑的参数的混合模式的振荡。相反，（的 Guckenheimer，2008; 的 Guckenheimer 和 Meerkamp，2012）奇异 Hopf 分支的组合和“弱返回”机构，部分由于 d 的面积小（第 2 节）是混合模式的关键因素动力学。我们分析的 Hopf 和等式倍周期分岔。（1）和折叠奇点的存在，以及我们表明，混合模式振荡是由于单数 Hopf 分支。这比从折叠的节点方案所预期的更为复杂。

我们保持相同的参数值集合在 Brøns 和 Kaasen（2010）：所有量纲 AK 的是等于 1 除了 $a_2 = 0.2, a_3 = 7, a_{11} = 2, a_{13} = 5, a_5 = \delta$ ，这将被改变, 我们固定 $\varepsilon = 0.001$ 。

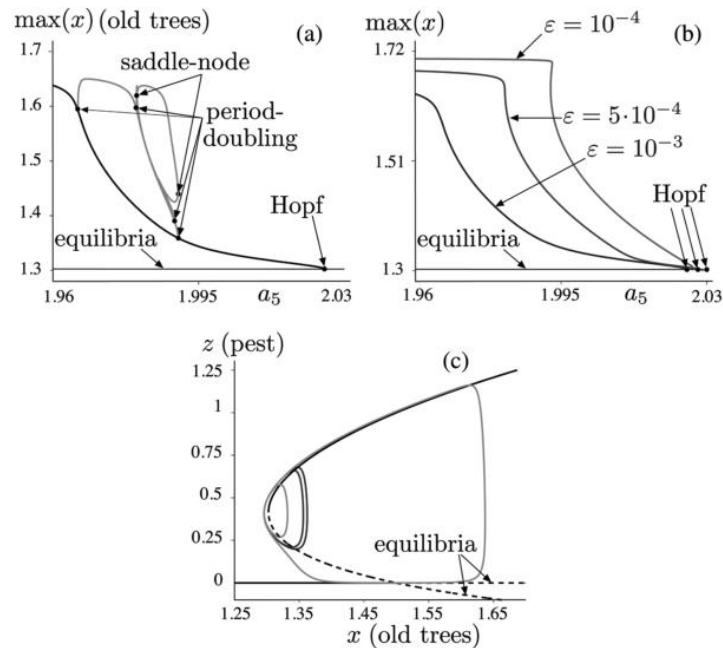


图 1 分岔图。（1）在参数 $\delta=0.3$ 。图（a）：平衡的曲线示于黑色;最大沿着极限环的分支以及沿时段加倍分支和沿着混合模式振荡灰色显示的伊索拉 X;黑点表示在计算过程中所遇到的 Hopf, 倍周期以及鞍结分岔。图（b）示出了限制周期的相同分支随 ε 的三个不同的降低值来计算： $10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}$ 。这显示了分支的爆发力方面当 ε 变得接近奇异极限。面板（c）表示显示在一个小振幅周期加倍极限周期为 $a_5 \approx 1.990$ 和 l^1 混合模式振荡对于 $a_5 \approx 1.976$ ，沿周期倍增分支（a）中，在投影到第 (x, z) 空间。临界歧管的投影被表示与自身的吸附（固体）和排斥（虚线）分支。

2. (1) 式的特征

(1) 定义了与两个慢速变量 (x, y) ，以及一个快变量 z 慢快系统。这个系统的临界流形 S 被定义为快速空表面，如：

$$S = \left\{ \left(-a_9 - a_{10}z(t) - \frac{a_{11}}{a_{12} + z(t)} + a_{13} \frac{x(t)}{a_4 + x(t)} \right) z = 0, z \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

S 是一个折叠表面 C 和平面 $\Pi = \{z = 0\}$ 的联合, 以 C 由下式定义

$$C = \{x = \varphi(z) = \frac{a_4(a_9 + a_{10}z(t) + \frac{a_{11}}{a_{12} + z(t)})}{a_{13} - a_9 - a_{10}z - \frac{a_{11}}{a_{12} + z(t)}}, z \in R^+\}.$$

表面 C 为 S 形的, 具有“折叠”曲线:

$$F_{\pm} = \{(x, y, z) \in C \mid z = \pm(\frac{a_{11}}{a_{10}})^{1/2} - a_{12}\}$$

平面 II 和集合 $\{z > 0\}$ 和 $\{z < 0\}$ 是用于流不变。通过 Bröns 和 Kaasen (2010) 所观察到的混合模式振荡包含在半空间 $\{z > 0\}$ 。混合模式的解决方案具有第 F_+ 附近小的振荡, 跳转到 II , 演变接近它的稳定部分, 越过被 $II \cap C$ 中定义的不稳定性线, 和进化接近 II 的不稳定部分沿着 II 对应的通道到简单的延迟现象; II 的不变性意味着时间近 II 的不稳定部分的溶液花费的量由吸引和膨胀平衡沿 II 类似的作用, 以在 Pokrovskii 等人的不变线的确定。(2008 年)。

动力学是不同的, 如果 II 的不变性被打破为 $\varepsilon > 0$, 作为延迟现象会发生仅邻近离散参数值由于附近的鸭式轨迹 (鲁帕和 Szmolyan, 2001) 的通道。类似的效果, 预计在对称系统, 可以改变慢后快的动态。

在公式 (1), 该溶液主要移动在 x 方向上, 以便它返回到 F_+ 具有大约相同的 y 值。作为 $\delta=0.3$ 仍然是相当小的, 该溶液是靠近于 y 空表面上, 这是通过设定公式的右手侧获得的表面。(1) 设置为 0 的 y 空表面方程定义 y 为 x 的函数, 独立的 z 。因此, 从任何章节 $\{x=\text{const}\}$ 回本身通过一个全球性的回归结果 y 的值非常接近最初的一个过渡。我们把这个属性“弱的回报。”

3. 方程 (1) 的数值分岔

(1) 我们使用软件包自动 (Doedel 等人, 2007) 来执行等式的数值分岔分析。(1) 在参数 a_5 。图 1a 所示式的固定和周期吸引的一些家庭。(1) 为在区间 $[1.96, 2.03]$ 5 而变化。计算表明, 独特的非平凡 ($z_{eq} \neq 0$) 平衡在一个 Hopf 分岔 (H) 后会失去其稳定性。该值取决于 e , 并且是相当接近图 2 中的一对沿在 Hopf 分岔修改出生此分支的稳定性极限循环的分支倍周期分岔的选择 1.987。周期加倍循环的分支产生另外两个倍周期分岔, 这有可能参与在级联产生混沌动力学。沿着在图 1 中, 爆炸所示周期解-周期中的一个, 两个, 和四个的每个分支发生时, 通过该小周期 (小振幅期间- $2k$ 周期) 成长为大振幅松弛循环 (1^{2k-1} 的混合模式振动, 即具有一个大的振荡和 $2k-1$ 周期个小的振荡) 混合模式周期解。图 2 示出了一个混合模式振荡的两个不同相空间视图。混合模式振荡的某些家庭形成在参数空间闭合曲线, 也被称为 isolas (Golubitsky 和谢弗, 1985)。这样的伊索拉在图 1 中示出上此伊索拉混合模式振荡具有振荡的图案。的松弛循环和混合模式振荡的松弛循环由等式 (1) 的临界流形的第二分支成为可能。即面 $\{z \neq 0\}$, 这是吸引在 x 间隔, 其中 C 的折叠片材不稳定 (第 2 节)。这种双鸭效应鸭爆炸给周围的临界歧管的折叠点鸭翼段和稳定性给附近的非折叠非双曲点的临界的第二鸭翼段的延迟交换歧管被命名鸭翼双峰在上下文洛特卡-Volterra 方程的 (Pokrovskii 等人, 2008)。这种现象示于图 1c。的周期加倍周期和 1^1 混合模式振荡, 计算上为 a_5 的非常接近的值期间, 两个周期 (图 1a) 的分支, 显示在临界歧管的顶部。周期解分支的爆炸字符出现足够小, 即图 1b 呈现期间酮溶液的分支计算为 $\varepsilon = 0.001, 0.0005, \text{ 和 } 0.0001$ 。窄范围为 a_5 上的水平轴带来的证据表明, 分支变为 ε 减小到零接近垂直。

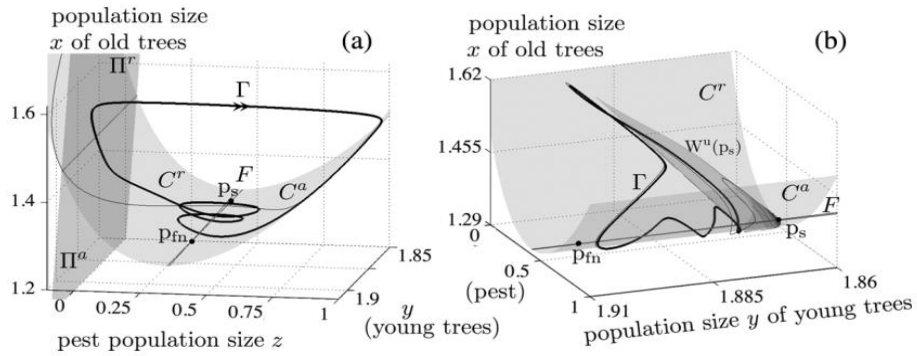


图 2.图 (a): 公式 (1) 的混合模式的振荡和临界流形由两个部件构成, 每一个具有吸引和排斥的子流形。黑点代表折叠节点 p_{fin} 和系统的鞍聚焦平衡 p_s 。所述奇异降低系统的 y 空渐变群和奇异降低系统的 z 空渐变群的非折叠部件也表示。图 (b) 示出了二维不稳定流 $W^u(p_s)$ 第 p_s 的, 其中返回期间驱动稳定混合模式振荡的行为的近似。

当在这两个参数继续图 1 的最右边倍周期分岔 a_5 和 δ , 我们发现的曲线与由模拟 Brøns 和 Kaasen (2010) 计算的混合模式振动的区域的边界是一致的 (图 4 Brøns 和 Kaasen, 2010)。图 3 比较了两者的计算。在混合模式振荡的 isolas (a_5, δ) 参数平面位于倍周期分岔的曲线内。这给出了附加的数字证据表明, 混合模式动力学被限制在窄频带 (Brøns 和 Kaasen, 2010)。混合模式动力学的这个模型中的存在有关, 倍周期分岔随后鸭爆炸为 ε 足够小。

4. 等式 (1) 的快慢动力学分析

混合模式振荡振荡折叠曲线 $F_+ = F$, 其中我们将集中分析 (图 2) 周围。我们定义

$$\alpha = \left(\frac{a_{11}}{a_{10}}\right)^{1/2} - a_{12}$$

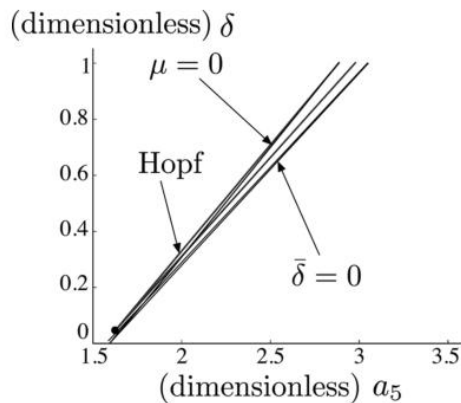


图 3.倍周期分岔的轨迹在 (a_5, δ) 使用数值继续例程, 叠加到 Brøns 的图 4 和 Kaasen (2010) 面计算。倍周期分岔的曲线是与在混合模式振荡出现由方程的直接模拟的区域的边界相一致。

(1)。在左侧, 黑色曲线对应于 Hopf 分支的轨迹和所述方程 $\mu=0$ (几乎重叠) 的溶液;在右边, 它们对应于方程 $\tilde{\delta}=0$, 其中, $\tilde{\delta}$ 是返回到强鸭翼的距离的解决方案。

为了显示在该式混合模式振荡。(1) 从一个奇异 Hopf 分支起源。

考虑该组 Bröns 和 Kaasen(2010)的参数: $a_5=1.987$ 和 $\delta=0.3$ 如图 3(e-f)和 BrönsKaasen(2010) 2010)方程的周期吸引。(1) 这些值是模式 l^2 (一个大振幅振荡和两个小振幅振荡) 的混合模式的振荡。

该奇异降维系统

$$\begin{cases} \delta y'(t) = \varphi_z(z(t))(a_5\varphi(z(t)) - (a_6(\varphi(z(t)) - a_7)^2 + a_8 + \delta a_1)y(t), \\ \varepsilon z'(t) = (a_1y(t) - a_2\varphi(z(t)) - a_3 \frac{\varphi(z(t))z(t)}{\varphi(z(t)) + a_4} \end{cases}$$

意味着式 (1) 具有一个折叠的节点, 也就是, 减少奇异等式的节点平衡。(6) 位于所述折曲线 F 上。因此, 折叠节点对应于 $\varphi'(z_{fn}) = 0$, 那么 $z_{fn} = \alpha = (\frac{a_{11}}{a_{10}})^{1/2} - a_{12}$. 最后, 折叠节点的坐标是:

$$\begin{cases} x_{fn} = \varphi(\alpha) = \frac{a_4(a_9 + 2(a_{10}a_{11})^{1/2} - a_{10}a_{12})}{a_{13} - (a_9 + 2(a_{10}a_{11})^{1/2} - a_{10}a_{12})}, \\ y_{fn} = \frac{x_{fn}}{a_1} (a_2 + a_3 \frac{z}{x_{fn} + a_4}) \\ z_{fn} = \alpha \end{cases}$$

图 2 示出折叠的节点不位于所述混合模式振荡中的小振幅振荡的中心。因此, 折叠节点理论无法解释式的等式 (1)。

首先, 将混合模式振荡远离折叠奇点和接近鞍聚焦平衡。其次, 小振幅振荡几个方面则要根据折叠节点理论是什么。该轨迹的这些功能是部分原因是由于一个奇异霍普夫分岔附近。对于使用类似的说法在 Szmolyan 和 Wechselberger (2001) 5 的所有值, 证明了公式。(1) 具有由方程赋予一个唯一的折叠奇点。我们改变坐标, 使等式 (1) 变为:

$$\begin{cases} x'(t) = \mu + Ax(t) + Bz(t) + \text{高阶项} \\ \delta y'(t) = x(t) - y(t) + \text{高阶项} \\ \varepsilon z'(t) = (-x(t) + \varphi(z(t)))(z(t) + \alpha), \end{cases}$$

其中 μ, A, B 是参数 a_1, \dots, a_{13} , 和 δ 的函数。到变化的变量, 我们首先替换 $x(t)$ 乘以 $x(t)/(a_4 + x(t))$, 则通过 $(x - x_{fn}, y - y_{fn}, z - z_{fn})$, 取代 (x, y, z) 和重新调整。对于每个 $\mu > 0$ 时, 原点是折叠节点点和 $\mu=0$ 对应于奇异 Hopf 分支。对应于 $\mu=0$ 的值是一个 $a_5 \approx 2.030596282$ 。我们通过扩大矢量场有关折叠节点并计算 5 将所得泰勒展开有常数项消失, 其对应于等式 $l^2/40$ 的值求出该值。(8)。

Hopf 分支带自动计算的值是一个 $a_5 \approx 2.0252772146$ 为 $\varepsilon=10^{-3}$, $a_5 \approx 2.0279173803$ 为 $\varepsilon=5 \cdot 10^{-4}$ 和一个 $a_5 \approx 2.0300574958$ 为 $\varepsilon=10^{-4}$ 。

对于奇异 Hopf 分岔, 折叠奇点附近, 存在一个中心歧管, 弱不稳定的, 含 Hopf 型动力学 (的 Guckenheimer, 2008), 由 $W^u(p_s)$ 表示。对于 $\mu > 0$ 非常小, 该中心歧管对应于具有强稳定实本征值和弱不稳定中心方向的鞍焦点。通过折叠奇点附近的轨迹被吸引到鞍点的不稳定中心歧管, 并按照动态就可以了。这意味着小振幅振荡靠近鞍聚焦平衡而不是保持折叠的奇点的附近。混沌动力学产生从中心歧管和所述一组慢歧管远离折叠线之间的转换。通过这种机制, 简单的周

期轨道经过倍周期级联途中混乱。随后，复杂的周期轨道经历对他们的环中的一个鸭翼爆炸，成长为混合模式振荡。这种机制尚未完全了解，但（的 Guckenheimer, 2008;和的 Guckenheimer Meerkamp, 2012），用于产生混合模式振荡。图 1 显示了从一个周期加倍轨道至 1^1 的混合模式振荡通过鸭爆炸的过渡。

公式 (1) 的第二个特征是它塑造的混合模式振荡轨迹是薄弱的回报： y 中的一个全球性的回归过程中很少发生变化。这意味着，每一个轨迹通过全球回报返回靠近强鸭，保持从对应的小幅度振荡的最大总数 (Bröns 等, 2006) 漏斗的中央部门之遥。如在折叠区域移动大于 x 更快 y ，则溶液移动相对快的朝向 $W^u(p_s)$ 和随后离开折叠区域 (图 2b) 的附近。

关于折叠节点理论，在从折叠节点生成的混合模式振荡小的振荡的最大总数来自

$$s_{\max} = [\Psi(\mu)]$$

其中 $[\cdot]$ 表示的整数部分和 $\Psi(\mu)$ 为满足 $\Psi(\mu) = O(1/\mu)$ 的平滑函数 (Wechselberger, 2005; VO 等人, 2010)。将此应用于的情况下的 $a_5 = 1.987$ 和 $\delta = 0.3$ 产量 $s_{\max} = 27$ ，基本上实际值 $s = 2$ 上方。这表明折叠节点场景没有解释本文观察到混合模式振荡的图案。

5. 结论

我们完成了 Bröns 和 Kaasen (2010) 为式的森林病虫害模型做混合模式振荡的分析。(1)。式。(1) 提供了一个例子，其中产生机构是单数 Hopf 分岔而不是折叠的奇点。该模型中的折叠节点是不是在塑造和组织混合模式振荡果断，这样小幅度振荡是比他们应该是什么折叠节点理论下较少 (Bröns 等, 2006)。

要理解公式的混合模式的动态特性。我们位于折叠奇点和全系统的鞍聚焦平衡，计算本征值在平衡状态，并评估了全球返回的属性。对于所选择的参数的森林害虫模型更坚为单数 Hopf 分支比折叠的节点或折叠鞍节点 (Bröns 等人, 2006; Guckenheimer, 2008; 鲁帕和 Wechselberger, 2010; 的 Guckenheimer 和 Meerkamp, 2012)。特别是，Guckenheimer Meerkamp (2012) 指出，在采用鸭式爆炸现象连接 perioddoubling 在一个单数的 Hopf 正常形式的混合模式动力学分岔的作用。我们发现，对于足够小 ϵ ，混合模式振荡式中的存在。(1) 的沿着倍周期分岔的级联出生小振幅周期- $2n$ 循环爆炸。这种级联涉及小幅度混沌吸引子。还有位于 isolas 通过倍周期分岔改变他们的大振幅振荡周期 $2n+1$ 的轨道。

参考文献

- Antonovsky, M. Y., Fleming, R. A., Kuznetsov, Y. A., et al. (1990). Forest-pest interaction dynamics: The simplest mathematical models. *Theoretical Population Biology*, 37(2): 343 - 367.
- Benoit, E., Callot, J.-L., Diener, F., et al. (1981). Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 32(1 - 2): 37 - 119.
- Berryman, A. A., Stenseth, N. C., and Isaev, A. S. (1987). Natural regulation of herbivorous forest insect populations. *Oecologia*, 71(2): 174 - 184.
- Bröns, M. and Kaasen, R. (2010). Canards and mixed-mode oscillations in a forest pest model. *Theoretical Population Biology*, 77(4): 238 - 242.
- Bröns, M., Krupa, M., and Wechselberger, M. (2006). Mixed-mode oscillations due to the generalized canard phenomenon. In W. Nagata and S. R. Namachchivaya (Eds.), *Communications*. Providence, RI: American Mathematical Society, 39 - 63.

- Purmová, L. (2006). Canard solutions and travelling waves in the spruce budworm population model. *Applied Mathematics and Computation*, 183(2): 1039 – 1051.
- Desroches, M., Guckenheimer, J., Krauskopf, B., et al. (2012). Mixed-mode oscillations with multiple time scales. *SIAM Review*, 54(2): 211 – 288.
- Doedel, E. J., Paffenroth, R. C., Champneys, A. R., et al. (2007). AUTO-07P: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Retrieved from <http://indy.cs.concordia.ca/auto>
- Fenichel, N. (1979). Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 31(1): 53 – 98.
- Golubitsky, M. and Schaeffer, D. G. (1985). *Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Volume 1)*. New York: Springer-Verlag.
- Gragani, A., Gatto, M., and Rinaldi, S. (1998). Acidic deposition, plant pests, and the fate of forest ecosystems. *Theoretical Population Biology*, 54(3): 257 – 269.
- Guckenheimer, J. (2008). Singular Hopf bifurcation in systems with two slow variables. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 7(4): 1355 – 1377.
- Guckenheimer, J. and Meerkamp, P. (2012). Unfoldings of singular Hopf bifurcation. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(4): 1325 – 1359.
- Krupa, M. and Szmolyan, P. (2001). Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities. *Nonlinearity*, 14(6): 1473 – 1491.
- Krupa, M. and Wechselberger, M. (2010). Local analysis near a folded saddle-node singularity. *Journal of Differential Equations*, 248(12): 2841 – 2888.
- Kucera, D. R. and Orr, P. W. (1980). *Spruce Budworm in the Eastern United States*. Forest Insect & Disease Leaflet 160. Washington, DC: U.S. Department of Agriculture, Forest Service.
- Ludwig, D., Jones, D. D., and Holling, C. S. (1978). Qualitative analysis of insect outbreak systems: The spruce budworm and forest. *The Journal of Animal Ecology*, 47(1): 315 – 332.
- Muratori, S. and Rinaldi, S. (1989). Catastrophic bifurcations in a second-order dynamical system with application to acid rain and forest collapse. *Applied Mathematical Modelling*, 13(12): 674 – 681.
- Pokrovskii, A., Shchepakina, E., and Sobolev, V. (2008). Canard doublet in a Lotka-Volterra type model. *Journal of Physics: Conference Series*, 138(1): 012019.
- Rinaldi, S. and Muratori, S. (1992). Limit cycles in slow-fast forest-pest models. *Theoretical Population Biology*, 41(1): 26 – 43.
- Schultz, M. (2009). Spruce Budworm. In G. Man (Ed.), *Major Forest Insect and Disease Conditions in the United States 2007*. Report FS-919, 38 – 40. Washington, DC: United States Department of Agriculture.
- Szmolyan, P. and Wechselberger, M. (2001). Canards in \mathbb{R}^3 . *Journal of Differential Equations*, 177(2): 419 – 453.
- Vo, T., Bertram, R., Tabak, J., et al. (2010). Mixed-mode oscillations as a mechanism for pseudo-plateau bursting. *Journal of Computational Neuroscience*, 28(3): 443 – 458.
- Wechselberger, M. (2005). Existence and bifurcation of canards in \mathbb{R}^3 in the case of a folded node. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 4(1): 101 – 139.