

瞬态认知动力学、亚稳态与决策

Transient Cognitive Dynamics, Metastability and Decision Making

Mikhail I. Rabinovich^{1*}, Ramón Huerta^{1, 2}, Pablo Varona², Valentin S. Afraimovich³

¹ Institute for Nonlinear Science, University of California San Diego, La Jolla, California, United States of America,

² Grupo de Neurocomputación Biológica, Department of Ingeniería Informática, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spain,

³ Instituto de Investigación en Comunicación Óptica, UASLP, San Luis de Potosí, Mexico

(translate by Songjian)

摘要: 过去 15 年来,人们一直在深入讨论利用非线性动力学来理解认知活实验和模型研究表明,这些功能大多是大尺度脑网络在噪声环境下短暂活动的结果。动的观点。其中一个流行的观点是亚稳态在认知功能的执行中起着关键的作用。当时用动力学理论去描述瞬间认知过程时,主要面对的问题是瞬时行为的再现性与灵活性之间的根本矛盾。本文提出了一种基于功能依赖亚稳态认知状态相互作用的瞬态认知动力学理论描述。这种短暂活动的数学图像是一个稳定的异宿通道,即异宿骨架附近的一组轨迹,由连接周围环境的鞍点和不稳定的分隔物组成。我们提出了一个基本的数学模型,一个强耗散动力系统,并给出了满足稳定性和灵活性竞争要求的认知瞬变鲁棒性和再现性的条件。在此基础上,我们描述了一个有效的解决序列决策问题的方法,它表示为一个固定时间的博弈:一个参与者在不断变化的噪声环境中采取序列行动,以使累积报酬最大化。在计算机仿真中,噪声对增益的优化起着重要的作用。

Citation: Rabinovich MI, Huerta R, Varona P, Afraimovich VS (2008) Transient Cognitive Dynamics, Metastability, and Decision Making. *PLoS Comput Biol* 4(5):e1000072. doi:10.1371/journal.pcbi.1000072

Editor: Karl J. Friston, University College London, United Kingdom

Received December 5, 2007; **Accepted** March 27, 2008; **Published** May 2, 2008

Copyright: 2008 Rabinovich et al. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons

Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

Funding: This work was supported by ONR N00014-07-1-0741. PV acknowledges support from Spanish BFU2006-07902/BFI and CAM S-SEM-0255-2006.

Competing Interests: The authors have declared that no competing interests exist.

* E-mail: mrabinovich@ucsd.edu

一、引言

研究大脑活动的动力学方法有着悠久的历史,目前是人们非常感兴趣的方法之一[1-7]。认知功能是通过合作活动方式的产生和转换来体现的。不同的大脑区域根据特定的认知功能以不同的方式参与这些过程,并且可以在不同的认知模式中占主导地位。然而,不同认知过程背后的机制可能依赖于相同的动力学原理,例如,见[8]。

认知功能的执行是基于时间的基本不对称性,通常被比喻为时间之箭(arrow of time)。这与因果对的时间顺序密不可分。因果关系和时间方向之间的对应关系要求认知系统交互的

组织具有特定的特征，在微观层次上要求特定的网络互连。这个组织的一个关键要求是存在非对称的相互作用，因为即使在大脑静息状态下，认知模式的不同子系统之间的相互作用也会产生非平稳的活动，这种活动必须是可重复的。支持时间顺序的模式交互作用的一种可能机制是非互惠竞争。大脑中的竞争是一种普遍现象（参见[9]了解人类记忆系统中的一个显著例子）。在网络复杂性的各个层次上，竞争的生理机制主要是通过抑制连接来实现的。对称互抑制导致多重稳定性，这不是一个合适的动态机制来描述可复制的瞬态。正如我们在[5, 10]中所示，非对称抑制是神经网络中可重复瞬态的起源。

最近，功能磁共振成像（fMRI）和脑电图（EEG）为理解和建模认知开辟了新的可能性[11-15]。实验记录揭示了大脑动力学的详细（空间和时间）图像，对应于一系列心理和行为任务的时间性能，这些任务通常是短暂的和连续的[16-18]。有几个小组建立了大规模的认知动力学模型。基于实验数据，这些模型展示了认知动力学的特征，如不同认知模式之间的亚稳态和快速瞬变[15, 16, 19-24]。有实验证据支持，亚稳态和瞬态动力学是关键现象，有助于大脑皮层过程的建模，从而更好地理解动态的大脑[18, 25-30]。

许多认知过程的共同特征是：（1）传入的感官信息在空间和时间坐标上都有编码，（2）认知模式敏感地依赖于刺激和执行功能，（3）在相同的环境下，认知行为具有确定性和高度可重复性，（4）认知模式对噪音有很强的鲁棒性。这些观察结果表明：（a）具有这些特征的动力学模型应该是强耗散的，这样当刺激存在时，它的轨道会迅速“忘记”认知网络的初始状态；（b）动力系统执行认知公式是通过瞬态轨迹而不是跟随时间之箭的吸引子。本文提出了一种以亚稳态为基本元素的瞬态认知活动的数学理论。

本文的结构如下。在结果部分，我们首先提供了亚稳态及其瞬态的形式化描述框架。我们介绍了一种鲁棒的、可重复的瞬态认知数学模型，并给出了分析这种瞬态行为的基本动力学模型。然后，我们将此模型推广到考虑不确定性的情况，并将其用于决策分析（decision making）。在讨论中，我们重点讨论了一些开放性问题以及我们的理论在不同认知问题中的可能应用。在方法部分，使用严格的数学方法来制定稳健性和再现性的条件。

二、结果

2.1 亚稳态与认知瞬变动力学

认知过程的动力学模型可以将特定地认知功能的认知状态（ $i=1, \dots, N$ ）的激活级别 $A_i(t) \geq 0$ 作为变量。模型的相空间是具有明确的度量的集合，其中轨迹是按照时间顺序排列的认知状态集合。为了建立这个模型，我们在这里介绍了一些理论思想，它们将亚稳态、稳定和可重复的瞬态与非线性动力学的新概念联系起来，即稳定的异宿序列和异宿通道[4, 5, 10, 32-34]。主要观点如下：

（1）大脑活动的亚稳态可以用鞍点（即鞍不动点或鞍极限环）表示在动态模型的高维相空间（取决于认知功能）。

（2）反过来，可重复的瞬变可以由稳定的异宿通道（SHC）表示，该通道是异宿骨架附近的一组轨迹，由连接周围环境的鞍点和不稳定分界线分割组成（见图1）。

（3）SHC 概念可以解决基本的抗噪声的鲁棒性和对信息输入的敏感性之间的矛盾。即使是近距离的信息输入也会在大脑中产生不同的模式。因此，对应的稳定异宿通道的拓扑结构敏感地依赖于刺激，但异宿通道本身作为相空间中的对象（类似于传统吸引子），在结构上是稳定的，并且对噪声具有鲁棒性。

基于这些思想，我们用竞争亚稳态模式方程来模拟交替认知状态的时间演化。这些模式的结构可以在功能神经影像学实验中得到反映。实验证据表明，为了执行特定的认知功能，大脑从不同的大脑区域招募活动[35-37]。这种网络的动态表现为认知模式之间的一系列转换，即，如我们所假设的，一个特定的感兴趣的认知功能的 SHC。

作者总结

认知过程的时间结构建模是理解认知的关键步骤。在不断变化的环境中，认知功能，如顺序学习、短期记忆和决策，不能仅仅用基于非线性动力学经典概念的传统观点来理解，非线性动力学描述了静态或有节奏的大脑活动。许多认知功能的执行是一个短暂的动态过程。任何潜在的认知过程的动力机制都必须在相似的环境条件下从一个实验到另一个实验都是可重复的，同时，它必须对内部和外部信息的变化敏感。我们在这里提出一个新的动态对象，可以代表稳健和可复制的瞬态大脑动力学。我们还提出了一类新的暂态动力学分析模型，可用于时序决策。

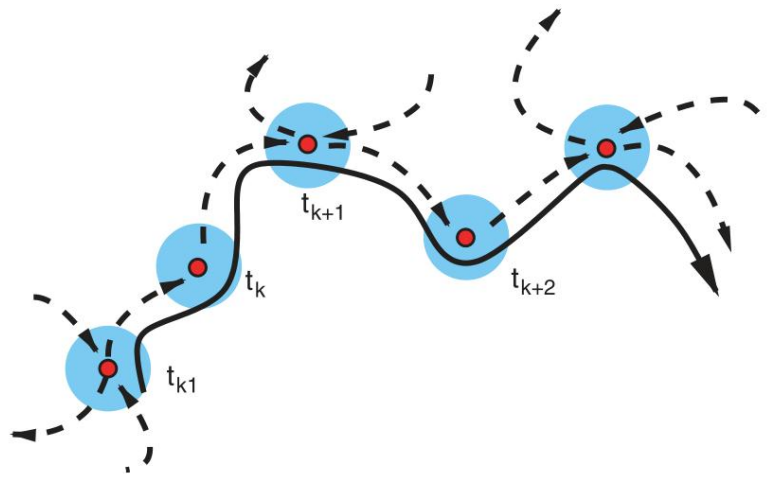


图 1. 稳定的异宿通道的示意图。SHC 是由在鞍点链附近凝结的轨迹及其连接周围鞍点（圆）的不稳定分隔线（虚线）构成的。粗线表示 SHC 中的轨迹示例。间隔是系统需要从亚稳态 k 移到 $k+1$ 的特征时间。

2.2 数学图像和模型

我们在这里提出，可重复认知活动的数学图像是一个稳定的异质通道，包括亚稳态，在相应动力学模型的相空间中由通过不稳定分离连接的鞍点集合表示（见图 1）。注意，图 1 的拓扑结构提醒了一个“混沌的巡回”[38]。然而，仅基于 Milnor 吸引子，我们无法证明 SHC 的主要特征是再现性现象。

为了使我们的建模更加透明，让我们以流行的节奏性神经元活动的动力学图像为例，即极限环。在神经系统的每一个复杂程度上，它的描述和分析都可以在一些基本模型的框架内完成，比如相位方程。在这个框架中可以回答的问题非常多样：在小型神经系统的同步，如 CPGs，产生脑节律[39]等。我们在这里的方法是相似的。我们提出了一种新的数学模型来描述可重复的瞬变，这种模型可以应用于网络复杂度金字塔的不同层次。这种范式是稳定的异宿通道。SHC 作为一个极限环，在不同的系统复杂度水平上可以用相同的基本方程来描述。当然，变量 $A_i(t) \geq 0$ 的意义在每个水平上是不一样的。

在介绍可再现性瞬态认知动力学分析的基本模型之前，重要的是讨论不依赖于该模型的 SHC 的两个一般特征。这些是：(i) SHC 结构稳定性的起源，以及 (ii) 在中等噪声下鞍点附近的长通过时间。

为了理解 SHC 的稳定性条件，我们必须考虑到鞍点附近的初等相体积沿稳定的分隔线被压缩，沿不稳定的分隔线被拉伸。我们把鞍点的特征值记作：

$$\lambda_1^{(i)} > 0 > \text{Re} \lambda_2^{(i)} \geq \text{Re} \lambda_3^{(i)} \geq \dots \geq \text{Re} \lambda_d^{(i)}$$

数字 $v_i = \frac{-\text{Re} \lambda_2^{(i)}}{\lambda_1^{(i)}}$ 称为鞍点值。如果 $v_i > 1$ (压缩比拉伸大)，鞍点被称为耗散鞍。直觉上很清楚，如果异宿链中的所有鞍都是耗散的，则轨迹不会离开异斜通道。对异质通道结构稳定性的严格分析支持我们的直觉 (见方法)。

瞬变过程的时间特性问题与鞍点动力系统小随机扰动的“退出问题”有关。这个问题首先由 Kifer[40]解决，然后在几篇论文中进行了讨论，特别是在[41]中。鞍不动点附近的局部稳定性分析允许我们估计系统在鞍点附近花费的时间：

$$\tau(p) = 1 / \lambda \ln(1/|\eta|) \quad (1)$$

其中 $\tau(p)$ 为平均通过时间， $|\eta|$ 为噪声水平， λ 为鞍点的不稳定分割线对应的特征值。一个生物学上合理的模型，能够在相空间中产生由 SHC 表示的稳定和可重复的行为，必须 (i) 便于解释结果并与实验数据进行比较，(ii) 在计算上可行，(iii) 有足够的控制参数来处理不断变化的环境和不同认知功能 (如学习和记忆) 之间的相互作用。我们认为我们所寻找的动力系统必须是强耗散和非线性的。这种模型的主要动力学特征是不同亚稳态之间的竞争。因此，在这个基本模型的相空间中，必须有几个 (通常是许多) 由不稳定分离相连接的鞍态。这种链代表了活动从一种认知模式到另一种认知模式的顺序转换过程。这个过程可以是有限的，即以简单吸引子或重复吸引子结束。如果我们选择变量 $A_j(t)$ 作为不同模式的激活量，我们可以假设鞍点被布置在一个 N 维相空间的轴上，而连接它们的分离轴被布置在一个 (N-n) 维流形上 (n < N-1)，它是相空间的边界。

我们将使用两种满足上述条件的模型：(i) 兴奋性和抑制性神经簇的 Wilson-Cowan 模型[42]和 (ii) 广义 Lotka-Volterra 方程-一个描述多参与者竞争现象的基本模型[32, 43]。两种模型都可以用一般形式表示为：

$$\dot{A}_j = -\sigma_j(I)A_j + \Theta \left[-\sum_{i=1}^N \rho_{ji} A_i + \beta \right] \quad (2)$$

其中 $A_j(t) \geq 0$ 为第 j 个簇的激活水平， $\Theta[z]$ 是一个非线性函数，例如 Wilson-Cowan 模型的 sigmoid 函数和广义 Lotka-Volterra 模型的多项式函数。连接矩阵 ρ_{ij} 依赖学习的刺激和改变。 $\sigma(I)$ 是表征认知状态依赖于输入信息 I 的一个参数。参数 β 表示其他类型的外部输入或噪声。在一般情形下， $A_j(t)$ 是一个向量函数，其分量的数目取决于单个脑区内动力学的复

杂性。认知模式动力学可以解释为一种非线性的相互作用，这种作用是相互合作和竞争的。

为了说明方程 2 相空间中稳定的异宿通道的存在性，我们考虑一个由三个竞争神经簇组成的简单网络。这个网络可以用 Wilson-Cowan 模型描述为：

$$\dot{A}_j = -A_j + \Theta \left[-\sum_{i=1}^N \rho_{ji} A_i + \beta \right] \quad (3)$$

其中 $\rho_{ji} < 0$ ， $\rho_{j \neq i} \geq 0$ ， $\beta > 0$ ， $N = 3$ 。

网络也可以用以下形式的 Lotka-Volterra 模型来描述：

$$\dot{A}_j = A_j (\sigma_j - \sum_{i=1}^N \rho_{ji} A_i) \quad (4)$$

其中 $\rho_{ji} > 0$ 。在下面的所有例子中，我们假设连接矩阵是非对称的，例如 $\rho_{ij} \neq \rho_{ji}$ ，这是 SHC 存在的必要条件。

图 2 说明了 $N=3$ 的这两个模型的动态如何产生鲁棒性的序列活动：两个模型的相空间都有 SHC。Wilson-Cowan 模型和 Lotka-Volterra 模型的主要区别在于吸引子的类型。系统 3 包含 SHC 中的稳定极限环和稳定不动点（ $\beta = 0$ 的坐标原点）。相反，在系统 4 的相空间中有一个吸引子，即 SHC。

这两个模型都证明了即使在许多交互模式下也具有鲁棒的瞬态（顺序）活动。图 3 给出了这种动力学的一个例子。这张图显示了一个由 100 个兴奋和 100 个抑制模式组成的双组分 Wilson-Cowan 网络的动力学。这些模拟中使用的参数与文献[44]中报告的参数相同，其中连接是从伯努利随机过程中提取的，但是连接的概率相对于平衡的激励抑制网络略有变化。系统的组织方式是这样的：模型的子组进入一个固定的组分中，剩余的产生连续的活动。该模型本身具有足够的普遍性，可以被翻译成其他概念和想法，正如本文以认知模式的形式提出的那样。

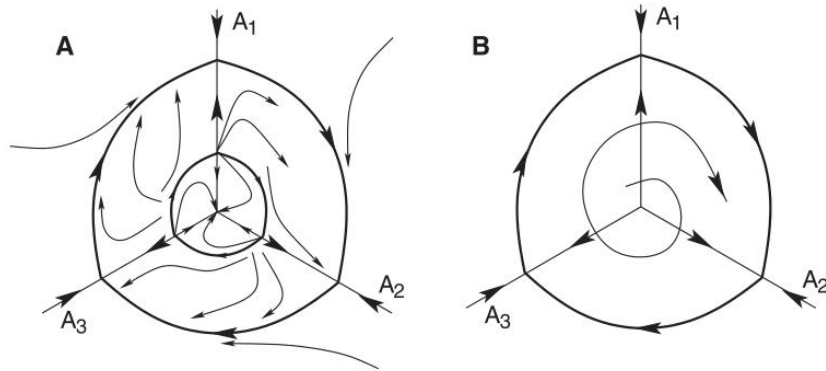


图 2. 三个耦合团簇相空间中的闭稳定异宿序列。(A) Wilson-Cowan 簇 (B) Lotka-Volterra 簇。

图 4 说明了 $N=20$ 模式下模型 4 瞬态时序动力学的再现性。此模拟对应于以下条件：(i) $\rho_{ij} \neq \rho_{ji}$ ，(ii) $v_i > 1$ （细节见[10]）。在这个图中，每种模式都用不同的颜色表示，而活动水平则用颜色的饱和度表示。对方程组进行了十次模拟，轨迹每次都是从随机的的初试条件

超立方体 $R_{0,0.2}^{20}$ 开始。注意模式间顺序激活的高再现性，包括开关之间的时间间隔。

由于具有 N 较大的系统 4 的复杂性，上述条件不能保证系统中没有其它不变集。然而，我们在计算机模拟中并没有发现它们。有关 SHC 结构稳定性的严格证明，请参见“方法”一节。

必须强调的是，SHC 可能由具有多个不稳定流形的鞍点组成。根据[40]和[45]，如果一个动力系统受到小噪声的影响，那么对于通过鞍点附近的初始点的任何轨迹，沿着一个强不稳定方向逃逸该区域的概率几乎为 1，因此这些序列也是可行的。强不稳定方向对应于鞍点线性化的最大特征值。换言之，每件事的发生方式都与 SHC 相同；只有用鞍点的强不稳定流形来代替 SHC 中不稳定的分离性。

正如我们之前提到的在方程或者 4 中的变量 $A_i(t) \geq 0$ 可以用几种不同的方式来解释。其中一项与实验工作有关的工作如下。使用 fMRI 数据的功能的主成分(PC) (见[46])，在主正交 PCs 的基础上建立认知“相空间”是可能的。在相空间瞬时 t 的这样一点处表征了瞬间的功能性认知状态。随后瞬间的状态集合是一种认知轨迹，代表了短暂的认知动态。

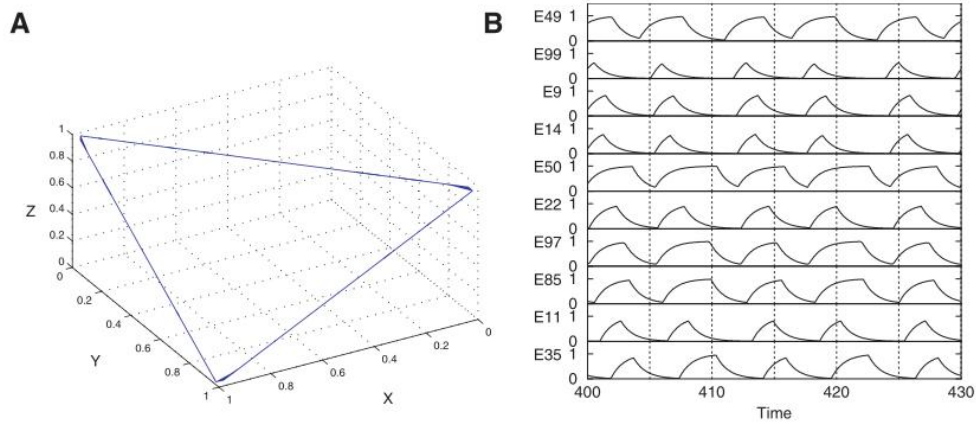


图 3. 用 Wilson-Cowan 方程模拟 200 种认知模式的鲁棒瞬态动力学。(A) 显示了三种认知模式的激活水平 (E14、E11、E35)，(B) 显示模式间顺序切换的时间序列：显示了总共 200 个交互模式中的 10 个不同模式。

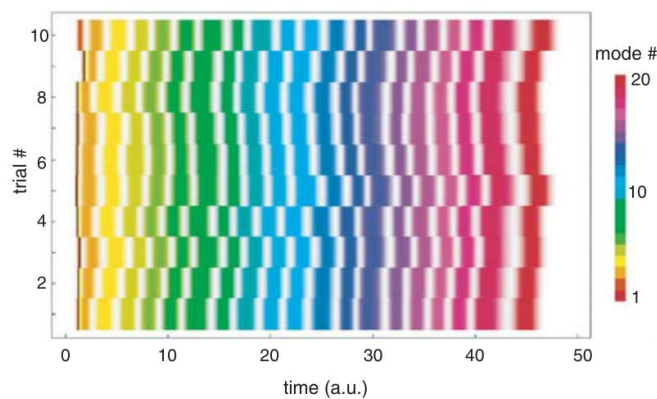


图 4. 模型 4 中对应于 SHC 的 20 个亚稳态模式的瞬态序列动力学的再现性。图中显示了 10 次试验的时间序列。每个试验的模拟都是在不同的随机初始条件下开始的。由于鞍座的耗散性，初始条件仅在开始时影响轨迹 (详情见[10])。

顺序的 decision making

决策必须是可重复的，以便记忆和学习。另一方面，决策系统也必须对来自环境的新信息敏感。这些要求从根本上讲是矛盾的，目前的方法[47-50]不足以解释对 DM 使用顺序活动。在这里，我们提出了一类新的适合于分析顺序决策（SDM）的模型，它基于 SHC 概念，是模型 4 的推广。

决策理论[51]的一个关键发现是，个体的行为从风险厌恶（当预测到可能的收益时）转移到风险寻求（当预测到可能的损失时）。特别是，Kahneman 和 Tversky[52]进行了几个实验，以测试不确定性下的决策。研究表明，当考虑到潜在利润时，决策者会规避风险，而当考虑到潜在损失时，决策者会成为风险寻求者。其他经典范式认为，无论是在预测潜在利润还是在预测可能亏损的情况下，决策者都应始终规避风险。

SDM 模型

为了说明 SHC 概念如何应用于特定认知功能的执行，让我们考虑一个简单的固定时间（ T^* ）游戏：玩家在不断变化的环境中采取连续的行动，以便获得最大的回报。游戏成功取决于决策策略。从形式上讲，SDM 模型包括：(i) 一组环境状态 $\sigma(I)$ ，(ii) 一组动力学变量 $A_j > 0$ ，表征与决策策略执行相对应的认知模式的活动水平；(iii) 表示累积奖励的标量，它取决于在可用时间 T^* 内实现的步数，以及沿不同瞬变（即不同选择）步数的瞬时奖励值。根据环境条件，游戏可以在步骤 $(k+1)$ 结束，也可以根据不同的选择继续使用一种或多种不同的方法。很明显，要获得最大的累积奖励，玩家必须在游戏时间 T^* 内通过尽可能多的步骤。因此，使游戏成功的策略必须基于两个条件：

- (1) 在时间内，游戏不必要在吸引子（稳定的不动点）处结束；
- (2) 玩家必须在时间 T^* 期间遇到尽可能多的亚稳态。

策略

很难用解析的方法估计哪种策略最适合解决第一个问题。它可以在计算机模拟中完成，但我们可以对第二个问题进行预测。让我们假设我们有一个成功的游戏，为了简单起见，每个状态的奖励是相同的（正如我们的计算机模拟所示，如果每个步骤的奖励不同，结果不会发生质的变化）。因此，相空间中的博弈动力学可以用系统来描述：

$$\dot{A}_j = A_j(t) \left[\sigma_j(I_k) - \left(A_j - \sum_{i \neq j} \rho_{ji} A_i \right) \right] + A_j(t) \eta_j(t) \quad (5)$$

$$\sigma_j(I_k) \in [\sigma_j^0 + S_i^m(I_k)], \quad m \in \{1, \dots, m_k\} \quad (6)$$

其中 $A_j \geq 0$ ， m_k 是在 t_k 决策步时， σ_j 的容许值的数量， S_i^m 是在 t_k 步时，环境信息 I_k 决定的刺激， η_j 是一个乘性噪声。我们可以认为游戏是一个连续的过程，它由一个排列在异宿通道中的轨迹表示（见图 1）。鞍邻域对应于决策步骤。显然，这些步骤的数量随着博弈速度的增加而增加，这取决于系统在鞍（亚稳态）附近花费的时间，如等式 1 所示： $t_k = 1/\lambda_k \ln(1/|\eta|)$ ，

其中 $|\eta|$ 是摄动水平（在 t_k 决策步骤时，博弈轨迹与鞍座之间的平均距离）， λ_k 为对应于该鞍座的不稳定分离的最大增量。根据这一估计，我们可以作出明确的预测。如果系统没有在游戏进行到一半时停止（见上面的问题 1），为了获得最好的奖励，玩家必须选择 $\sigma(I_k)$ ，对应最大的 λ_k ，并且要有一个最佳的噪声水平（不要太多以避免离开异宿信道）。假设在控制下一步决策的输入 I 中有噪声。由于

$$A_j[\sigma(\xi = I + \eta(t))] \approx A_j\sigma(I) + A_j \left. \frac{d\sigma}{d\xi} \right|_I \eta(t) \quad (7)$$

这种加性信息噪声在动力学模型的右侧表现为乘性噪声。

计算机建模

模型参数的选择是在 $\sigma_j^0 \in [5, 10]$ 内均匀分布中选择。作为概念的证明，序列的具体顺序并不重要。因此，序列顺序是从鞍点 0 到 N ，它是通过一个连接矩阵得到，因此， $\rho_{i-1i} = \sigma_{i-1}^0 / \sigma_i^0 + 0.51$ ， $i=2, \dots, N$ ， $\rho_{i-1i} = \sigma_{i+1}^0 / \sigma_i^0 - 0.5$ ， $i=1, \dots, N-1$ ， $\rho_{ij} = \rho_{j-1j} + (\sigma_i^0 - \sigma_{j-1}^0) / \sigma_j^0 + 2$ ， $i \notin \{j-1, j, j+1\}$ 。注意到存在无穷个矩阵可以产生相同的序列。构成每个鞍点或决策步骤所有可能扰动或刺激的基础的所有其他参数都取自均匀分布 $S_i^m \in [-4, 9]$ 。这些参数的具体选择对本文所示的结果没有任何影响。为了简单起见，我们假设每个决策步骤的外部扰动是不相关的。动力系统 5 和 6 采用标准显式变量 Runge-Kutta 方法进行积分。

当轨迹达鞍点附近在半径 $\varepsilon = 0.1$ 范围内到时，使用决策函数。在本例中应用的规则是高风险规则，具体实现如下。在每个鞍点时，我们计算了增量 $\lambda_{j(q)i} = \sigma_{j(q)} - \rho_{j(q)i} \sigma_{j(q)}$ ， $q = 1, \dots, m_k$ ，使得选择特定的 q ，在每个鞍点得到最大的 $\lambda_{j(q)i}$ 。换句话说，我们选择最大的增量，它对应离开鞍点 S_i 最快速度，因此以最短时间达到下一个鞍点。

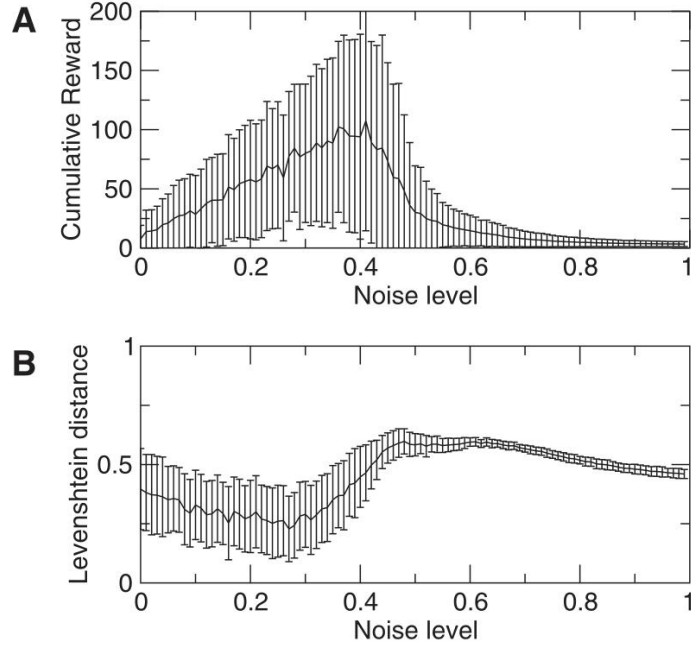


图 5. 利用乘性噪声估计不同噪声水平下的累积奖赏。(A) 累积奖励, 计算为系统在游戏最后时刻 (这种情况下是 100) 之前所经历的认知状态的数目。对于每一级噪声, 生成 1000 个不同的序列 ($N=15$, 共 15 个选择)。(B) 用所有生成序列的平均 Levenshtein 距离计算序列的再现性指数。距离越小, 1000 次不同的运算序列就越相似。计算成对距离并取其平均值, 以获得由误差条表示的平均值和标准偏差。

为了评估模型, 我们分析了不相关乘性噪声 (uncorrelated multiplicative noise) 的影响。结果如图 5 所示。正如理论预测的那样, 噪声在游戏中起着关键作用, 并且存在一个最优的噪声水平。对于低噪声, 系统以较慢的方式穿过大多数鞍点 (见方程式 1), 而对于噪声值的增加, 游戏中涉及的亚稳态的数量减少。图 5A 显示了不同噪声水平的累积奖励。研究了两种有趣的情况。正如我们从图中所看到的, 对于特定的噪声水平可以得到最佳的累积奖励。对于中等水平的噪声, 系统进入部分的重复序列, 因为两个或更多的不稳定方向允许系统以随机的方式移动到两个或多个不同的位置。所获得序列的再现性测量如图 5B 所示。我们可以看到, 与对应于最大累积回报的序列相比, 生成的可再现性最强的序列的噪声水平稍小。估计序列间的再现性, 我们使用了 Levenshtein 距离, 这基本上找到了将一个序列转换成另一个序列的最简单方法[53]。该距离适合于识别序列的重复性, 并在多个应用中使用。有时, 序列会变得重复, 而在其他情况下, 它只是死亡。图中的误差线通过标准差表示。虽然 Levenshtein 距离显示的误差条不太大, 但累积的回报确实如此, 因为噪声水平通常进入极限环, 到底最大的时间。这更有可能找到两种极端: (i) 快速结束 (ii) 到达一个极限环。

关于习惯的形成, 重要的是要注意, 记忆的序列受到外部刺激, 可以在任何给定的时间改变方向。这一事实反映在图 5 所示的结果中, 其中 Levenshtein 距离不精确到零。形成 SHC 的异宿框架可以被打破, 对于给定的噪声, 甚至可以重复自己而产生极限环。因此, 在风险决策规则下, 该模型确实存在由外部扰动集引起的备选方案。

这个简单的游戏演示了一种具有多个亚稳态的瞬态认知动力学。我们建议其他类型的顺序决策可以用相似的动力学机制来表示。

讨论

本文从理论上描述了一些认知功能的动力机制。任何一个非常复杂的过程的理论模型,

比如一个认知任务，都应该强调那些最重要的特征，并且应该淡化那些不重要的细节。主要的困难是把彼此分开。为了建立我们的理论，我们选择了两个关键的实验观察：亚稳态认知状态的存在和可再现认知过程的传递性。我们还没有将构成执行特定功能的认知模式的大脑不同部分分开。我们还没有将构成执行特定功能的认知模式的大脑不同部分分开。这种粗粒度理论的主要目标是建立一个瞬态认知动力学的一般框架，该框架基于一种以自然方式包含不确定性的新型模型。我们讨论的基于 SHC 的可再现瞬态动力学包含两个不同的时间尺度，即鞍点附近的慢时间尺度和鞍点之间转换的快时间尺度（见图 1）。考虑到这一点，可以建立一个不是基于 ODEs 而是基于 Poincare 映射的动力学模型（参见文献[5]），这对于复杂系统的建模是非常有效的。

无赢家竞争动力学（由一系列的鞍态表示，这些鞍态的邻域通过其不稳定流形连接形成一个异宿序列）是许多瞬时认知活动的自然动力学图像。特别是我们希望提到大脑中的瞬时同步[54]，在这里作者研究了在自发 EEG 中 α 活动的不同相位同步状态之间的转换动力学。A 或熊被描述为一系列全同步状态（头皮上的准稳定模式）。我们认为这种动态可以用无赢家竞争原则的框架来描述。文献[55, 56]从理论的角度分析了部分同步相团簇之间的异质网络。SHC 概念允许考虑即使在具有不同基础频率（如 γ 和 β 频率）的同步状态之间的转换。

认知功能可以相互影响。例如，当我们建模 decision making 时，我们必须考虑注意力、工作记忆和不同的信息源。尤其是，各种背景线索与行动和奖励的动态关联对于做出有效决策至关重要[57]。这里的一个关键问题是如何组合几个奖励预测，每个预测都基于不同的信息：有些奖励预测可能只依赖于视觉线索，而另一些则可能不仅利用视觉和听觉线索，还利用受试者采取的行动。由于不同奖励预测的准确性在学习过程中动态变化，因此预测的组合很重要[58]。从更广泛的角度来看，该理论的下一步必须考虑模型 4 等代表不同认知功能执行的模型之间的相互作用。

本文讨论的动力学机制有助于解释脑成像技术获得的实验数据，也有助于设计新的实验，帮助我们更好地理解高级认知过程。特别是，我们认为，基于 fMRI 数据主成分分析的认知相空间重构将有助于找到特定认知功能的动态模型参数值。在模型变量和功能磁共振成像数据之间建立直接关系对于实现新的辅助神经反馈协议将非常有用[59-62]，它可以打开各种新的医学和脑机应用。

方法

稳定的异宿序列

我们考虑一个常微分方程组：

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathfrak{R}^d \quad (\text{M1})$$

其中向量场 X 是 C^2 -光滑。我们假设系统 M1 有 N 个平衡点，记为 Q_1, Q_2, \dots, Q_N ，使得每个 Q_i 都是一个具有一维不稳定流形 $W_{Q_i}^u$ 的鞍型的双曲点，该流形由 Q_i 和两个“分离”组成，

$W_{Q_i}^u \setminus Q_i$ 的连接着部分，是通过 Γ_i^+ 和 Γ_i^- 来定义的，我们假设 $\Gamma_i^+ \subset W_{Q_{i+1}}^s$ ，是 Q_{i+1} 的稳定流形。

定义： 集合 $\Gamma: \cup_{i=1}^N Q_i \cup_{i=1}^{N-1} \Gamma_i^+$ 称作异宿序列。

我们把矩阵 $DX|_{Q_i}$ 的特征值记作 $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_d^{(i)}$ 。根据上面的假设，其中一个正的，其余的是负的实部。不失一般性，我们假设它们的顺序为：

$$\lambda_1^{(i)} > 0 > \operatorname{Re} \lambda_2^{(i)} \geq \operatorname{Re} \lambda_3^{(i)} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_d^{(i)}$$

我们将使用以下的鞍点值（见方程 1）：

$$v_i = \frac{-\operatorname{Re} \lambda_2^{(i)}}{\lambda_1^{(i)}}$$

对于有兴趣了解这些结果细节的读者，作为第一步，我们建议阅读参考文献[63, 64]。

定义 M1：同宿序列 γ 称作稳定的同宿序列（SHS），如果

$$V_i > 1, \quad i=1, \dots, N \quad (\text{M2})$$

文献[10, 32]表明条件 M2 意味着 γ 的稳定性，在这个意义上，从邻域内 Q_i 一点出发的轨迹任然保持在附近，直到它来到 Q_N 的邻域。事实上，沿着这条轨迹的运动可以看作是平衡点 $Q_{i=1, \dots, N}$ 之间的一系列转换。

当然条件 $\Gamma_i^+ \subset W_{Q_i}^s$ 表示系统 M1 不是结构稳定的，它只能出现在参数的异常值或者特殊形式的系统中。作为这样一个系统的例子，可以考虑广义 Lotka-Volterra 模型 4（见[10, 32]）。

稳定的异宿通道

我们考虑另外一个系统：

$$\dot{x} = Y(x), \quad x \in \mathfrak{R}^d \quad (\text{M3})$$

同样有 N 个鞍型平衡点 Q_1, Q_2, \dots, Q_N 具有一维不稳定流形 $W_{Q_i}^u = \Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^- \cup Q_i$ ，且 $v_i > 1$ ， $i=1, \dots, N$ 。在 Q_i 的一个半径为 ε 的开球记作 U_i （当然可以考虑一个 Q_i 的任意小的邻域），它不包括不变集，除了 Q_i 。稳定流形 $W_{Q_i}^s$ 把 U_i 划分为两部分：一部分为 U_i^+ 包括一片的 Γ_i^+ ，另一部分为 U_i^- 。假设 $\Gamma_i^+ \cap U_{i+1}^+ \neq \emptyset$ ， $i=1, \dots, N-1$ ，用 $\Gamma_{i,i+1}^+$ 表示 $\bar{\Gamma}_i^+ \setminus \bigcup_{j \neq i} U_j^+$ 连接的组成，包括 Q_i 和 $\Gamma_{i,i+1}^+ \cap \bar{U}_j^+ = \emptyset$ ， $j \neq i, i+1$ 。在 \mathfrak{R}^d 中用 $O_\delta(\Gamma_{i,i+1}^+)$ 表示 $\Gamma_{i,i+1}^+$ 的 δ 邻域。

定义 M2: 设 $V(\varepsilon, \delta) = \bigcup_{i=1}^{N-1} O_\delta(\Gamma_{i,i+1}^+) \cup \bigcup_{j=1}^N U_j^+$ 。我们说系统 M3 有一个稳定的异宿通道在 $V(\varepsilon, \delta)$ 内，

如果存在一个初始点的集 $U \setminus U_1^+$ 合，使得对于每个 $x_0 \in U$ ，存在 $T > 0$ ，其中对于 M3 的解

$x(t, x_0)$ ， $0 \leq t \leq T$ 满足以下条件：

i. $x(0, x_0) = x_0$

ii. 对于任意的 $0 \leq t \leq T$ ， $x(t, x_0) \in V(\varepsilon, \delta)$

iii. 对每个 $1 \leq i \leq N$ ，存在 $t_i < T$ ，使得 $x(t_i, x_0) \in U_i^+$

因此，如果和足够 ε 和 δ 小，对应 $x(t, x_0)$ 的轨迹的移动可以被看做沿着不稳定 $\Gamma_{i,i+1}^+$ 的分离片在鞍点 Q_i ， $i=1, \dots, N$ 之间的转换。

因此，具有 SHC 的性质在结构上是稳定的：如果系统 M3 具有 SHC，那么接近系统 M3 的 C1 也具有 SHC。

我们在附加条件下证明这个事实。记作的相交。它是一个线段一端是，另一端为，它属

于。定义，稳定流形的一部分，，其中是中集合 B 的邻域，边界由组成，一个维的球，“平行”与，和一个“圆柱”同胚于，其中为维球，的值为 $[0, 1]$ 。我们用表示这个圆柱。下面引理的证明是相当标准的，可以在鞍点附近使用局部技巧来实现（见[63-65]）。

引理 M1.存在 $0 < \varepsilon_0 < 1$ ，使得对于任意的 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 和任意的 $1 \leq i \leq N$ ，存在 $\varepsilon_i < \varepsilon_0$ 和 $1 < \mu_i < \nu_i$ ，以下结果成立：如果 $\tilde{\varepsilon}_i \leq \varepsilon_i$ ， $x_0 \in C_i(\tilde{\varepsilon}_i)$ 则

$$\text{dist}(x(\tau_i, x_0), P_i) < \tilde{\varepsilon}_i^{\mu_i} \quad (\text{M4})$$

其中 dist 表示在 \mathfrak{R}^d 中的距离， $\tau_i > 0$ 表示时间， $x(\tau_i, x_0)$ 表示 M3 的解从 U_i^+ 穿过 x_0 存在的点。

线段 $\bar{\Gamma}_{i,i+1}^+$ 有两个端点：一个是 P_i ，另一个为 $R_{i+1} \in \partial U_{i+1}^+$ ，固定 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 。

引理 M2.存在 $K_i > 1$ 和 $\gamma_i > 0$ ，使得如果 $x_0 \in O_{\gamma_i} \sim (P_i)$ ， $0 \leq \tilde{\gamma}_i \leq \gamma_i$ ，有：

i. 存在 $\tilde{t}_i > 0$ ，使得 $x(\tilde{t}_i, x_0) \in \partial U_{i+1}^+$

ii. 下面不等式成立

$$\text{dist}(x(\tilde{t}_i, x_0), R_{i+1}) < K_{i\tilde{\gamma}_i} \quad (\text{M5})$$

iii. 每个点 $x(t, x_0)$ ， $0 \leq t \leq \tilde{t}_i$ ，都属于 $\Gamma_{i,i+1}^+$ 的 $(K_{i\tilde{\gamma}_i})$ -邻域。

引理是有限时间区间上常微分方程的解对初始条件连续依赖定理的直接推论。

现在固定 μ_i 和 ε_i ，使之满足引理 M1。我们提出一系列的假设保证 SHC 的存在。

假设 M_N ，点 $R_N \in C_N(\tilde{\varepsilon}_N) \setminus (\bar{B}_N \cup \bar{W}_{N,loc}^s)$ 。

引理 M2 意味着存在 $\tilde{\gamma}_{N-1} < \gamma_{N-1}$ ，使得 $x(\tilde{t}_{N-1}, x_0) \in C_N(\tilde{\varepsilon}_N)$ ，对于每个 $x_0 \in O_{\tilde{\gamma}_{N-1}} \sim (P_{N-1})$ ，固定一个数 $\tilde{\varepsilon}_{N-1} < \varepsilon_{N-1}$ ，使得

$$\tilde{\varepsilon}_{N-1}^{\mu_{N-1}} < \tilde{\gamma}_{N-1} \quad (\text{M6})$$

假设 M_{N-1} 。点 $R_{N-1} \in C_{N-1}(\tilde{\varepsilon}_{N-1}) \setminus (\bar{B}_{N-1} \cup \bar{W}_{N-1,loc}^s)$ 。

同样，存在 $0 < \tilde{\gamma}_{N-2} < \gamma_{N-2}$ ，使得 $x(\tilde{t}_{N-2}, x_0) \in C_{N-1}(\tilde{\varepsilon}_{N-1})$ ，对于每个 $x_0 \in O_{\tilde{\gamma}_{N-2}} \sim (P_{N-2})$ ，固定一个数 $\tilde{\varepsilon}_{N-2} < \varepsilon_{N-2}$ ，使得

$$\tilde{\varepsilon}_{N-2}^{\mu_{N-2}} < \tilde{\gamma}_{N-2} \quad (\text{M7})$$

继续假设我们有

假设 M_i 。点 $R_{i+1} \in C_{i+1}(\tilde{\varepsilon}_{i+1}) \setminus (\bar{B}_{i+1} \cup \bar{W}_{i+1,loc}^s)$ 。

我们选择 $\tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_i$ 使得

$$\tilde{\varepsilon}_i^{\mu_i} < \tilde{\gamma}_i \quad (\text{M9})$$

其中 $\tilde{\gamma}_i$ 是被固定的，所以 $x(\tilde{t}_i, x_0) \in C_{i+1}(\tilde{\varepsilon}_{i+1})$ 提供了 $x_0 \in O_{\tilde{\gamma}_i} \sim (P_i)$.

下面的定理是由引理 1、引理 2、假设 $M_N - M_2$ ，并选择 $\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\gamma}_i$ 和直接推论得出：

定理 M2. 在上述假设下，系统 M3 在 $V(\varepsilon, \delta)$ 内有一个 SHC，其中 $\delta = \max K_{\tilde{\gamma}_i}$ ，且初始点集

$$U = O_{\tilde{\gamma}_i}(P_i) | U_1^+ \quad (\text{见定义 M2}).$$

推论：存在 $\sigma > 0$ ，使得每个系统

$$\dot{x} = Y(x) + Z(x)$$

其中 $\|Z\|_{C^1} < \sigma$ 同样在 $V(\varepsilon, \delta)$ 内有一个 SHC，可能有一个较小的开放集 U 的初始点。

推论的证明基于：

- i. 原始系统和扰动系统的鞍点的局部稳定流形和不稳定流形是接近的
- ii. ODE 的解对参数光滑依赖性定理
- iii. 关于定理 M2 所有假设的开放性

条件 $R_i \in C_i(\tilde{\varepsilon}_{i+1})$ 且 $\tilde{\varepsilon}_i \ll 1$ ，一般来说看起来有点拘谨。然而对于拥有一个 SHS 的系统的一组开放扰动，它们肯定会发生。

定理 M3. 如果系统 M1 有一个 SHS，则在向量场的 Banach 空间存在一个具有范数的开集 U ，使得系统

$$\dot{x} = Y(x) + Z(x)$$

有一个 SHC，对于每个 $Z \in U$ 。

证明：可以用一个相当标准的结构来证明。对于系统 M1，由于 $\Gamma_i^+ \subset W_{Q_{i+1}}^s$ ，在点 $x_0^{(i)} \in \Gamma_i^+$ 附近的局部坐标中，系统 M1 可以重新写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 f(x) \\ \dot{x}_2 &= g(x) \end{aligned} \quad (\text{M9})$$

其中 $x_1 \in P$ ， $x_2 \in P^{d-1}$ ， $x = (x_1, x_2)$ ，不等式 $x_1 > 0$ 决定属于 Γ_i^+ 的 $W_{Q_{i+1}}^s$ 边界。记作“截断函数”：

$\phi(x_0^{(i)}, x)$ ，一个 C^1 -光滑函数 $\mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^+$ ，使得如果 $|x - x_0^{(i)}| < \beta_1$ ，则 $\phi(x_0^{(i)}, x) = 1$ ，如果 $|x - x_0^{(i)}| < \beta_2$ ，

则 $\phi(x_0^{(i)}, x) = 0$ ， $0 < \beta_1 < \beta_2 \ll 1$ 。现在系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 f(x) + \delta_i \phi(x_0^{(i)}, x) \\ \dot{x}_2 &= g(x) \end{aligned} \quad (\text{M10})$$

系统 M10 将有一个分离片 $\Gamma_{i,i+1}^+$ ，如果 $0 < \delta_i \ll 1$ ，它满足假设 M_i ，对于 $i=1, \dots, N-1$ ，我们以这样的方式对系统 M1 进行扰动，得到系统 M3，它拥有 SHC，前提是所有的 $\delta_i > 0$ ，并且足够小。

参考文献

1. Beer RD (2000) Dynamical approaches to cognitive science. Trends Cogn Sci 4:91–99.
2. Freeman WJ, Vitiello G (2006) Nonlinear brain dynamics as macroscopic manifestation of

- underlying many-body field dynamics. *Physics of Life Reviews* 3: 93–118.
3. van der Maas HL, Dolan CV, Grasman RP, Wicherts JM, Huizenga HM, et al. (2006) A dynamical model of general intelligence: the positive manifold of intelligence by mutualism. *Psychol Rev* 113: 842–861.
 4. Ashwin P, Timme M (2005) Nonlinear dynamics: when instability makes sense. *Nature* 436: 36–37.
 5. Rabinovich MI, Varona P, Selverston AI, Abarbanel HDI (2006) Dynamical principles in neuroscience. *Reviews of Modern Physics* 78: 1213–1265.
 6. Port RF, Van Gelder T (1995) *Mind as motion: explorations in the dynamics of cognition* Port RF, Van Gelder T, eds. Cambridge, MA: MIT Press.
 7. Tschacher W, Dauwalder J-P (1999) *Dynamics, synergetics, autonomous agents-Nonlinear systems approaches to cognitive psychology and cognitive science* Tschacher W, Dauwalder J-P, eds. Singapore: World Scientific.
 8. Jantzen KJ, Kelso JA (2007) *Neural Coordination Dynamics of Human Sensorimotor Behavior: A Review*. Springer Berlin/Heidelberg: *Handbook of Brain Connectivity*.
 9. Poldrack RA, Clark J, Pare-Blagoev EJ, Shohamy D, Creso Moyano J, et al. (2001) Interactive memory systems in the human brain. *Nature* 414: 546–550.
 10. Afraimovich VS, Zhigulin VP, Rabinovich MI (2004) On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits. *Chaos* 14: 1123–1129.
 11. Fox MD, Snyder AZ, Vincent JL, Corbetta M, Van Essen DC, et al. (2005) The human brain is intrinsically organized into dynamic, anticorrelated functional networks. *Proc Natl Acad Sci U S A* 102: 9673–9678.
 12. Horwitz B, Tagamets MA, McIntosh AR (1999) Neural modeling, functional brain imaging, and cognition. *Trends Cogn Sci* 3: 91–98.
 13. De Martino B, Kumaran D, Seymour B, Dolan RJ (2006) Frames, biases, and rational decision-making in the human brain. *Science* 313: 684–687.
 14. Kleber B, Birbaumer N (2005) Direct brain communication: neuroelectric and metabolic approaches at Tübingen. *Cognitive Processing* 6: 65–74.
 15. Bischoff-Grethe A, Goedert KM, Willingham DT, Grafton ST (2004) Neural substrates of response-based sequence learning using fMRI. *J Cogn Neurosci* 16:127–138.
 16. Friston KJ (1997) Transients, metastability, and neuronal dynamics. *Neuroimage* 5: 164–171.
 17. Oullier O, Kelso JA (2006) Neuroeconomics and the metastable brain. *Trends Cogn Sci* 10: 353–354.
 18. Jones LM, Fontanini A, Sadacca BF, Miller P, Katz DB (2007) Natural stimuli evoke dynamic sequences of states in sensory cortical ensembles. *Proc Natl Acad Sci U S A* 104: 18772–18777.
 19. Kelso JAS (1995) *The Self-Organization of Brain and Behavior*. Cambridge: The MIT Press.
 20. Friston KJ, Harrison L, Penny W (2003) Dynamic causal modelling. *Neuroimage* 19: 1273–1302.
 21. Friston KJ (2000) The labile brain. I. Neuronal transients and nonlinear coupling. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci* 355: 215–236.
 22. Bressler SL, Kelso JA (2001) Cortical coordination dynamics and cognition. *Trends Cogn Sci* 5: 26–36.
 23. Abeles M, Bergman H, Gat I, Meilijson I, Seidemann E, et al. (1995) Cortical activity flips among

- quasi-stationary states. *Proc Natl Acad Sci U S A* 92: 8616–8620.
24. Friston KJ (1995) Neuronal transients. *Proc Biol Sci* 261: 401–405.
 25. Casey BJ, Cohen JD, O’Craven K, Davidson RJ, Irwin W, et al. (1998) Reproducibility of fMRI results across four institutions using a spatial working memory task. *Neuroimage* 8: 249–261.
 26. Werner G (2007) Metastability, criticality and phase transitions in brain and its models. *Biosystems* 90: 496–508.
 27. Fox MD, Snyder AZ, Vincent JL, Raichle ME (2007) Intrinsic fluctuations within cortical systems account for intertrial variability in human behavior. *Neuron* 56: 171–184.
 28. Sasaki T, Matsuki N, Ikegaya Y (2007) Metastability of active CA3 networks. *J Neurosci* 27: 517–528.
 29. Baeg EH, Kim YB, Huh K, Mook-Jung I, Kim HT, et al. (2003) Dynamics of population code for working memory in the prefrontal cortex. *Neuron* 40: 177–188.
 30. Fingelkurts AA, Fingelkurts AA (2006) Timing in cognition and EEG brain dynamics: discreteness versus continuity. *Cogn Process* 7: 135–162.
 31. Raftopoulos A, Constantinou P (2004) Types of cognitive change: a dynamical connectionist account. In: Dimetrou A, Raftopoulos A, eds. *Cognitive Developmental change: Theories, Models and Measurement*: Cambridge Univ. Press. 74 p.
 32. Afraimovich VS, Rabinovich MI, Varona P (2004) Heteroclinic contours in neural ensembles and the winnerless competition principle. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 14: 1195–1208.
 33. Rabinovich M, Volkovskii A, Lecanda P, Huerta R, Abarbanel HD, et al. (2001) Dynamical encoding by networks of competing neuron groups: winnerless competition. *Phys Rev Lett* 87: 068102.
 34. Rabinovich MI, Huerta R, Varona P (2006) Heteroclinic synchronization: ultrasubharmonic locking. *Phys Rev Lett* 96: 014101.
 35. Cotterill RM (2001) Cooperation of the basal ganglia, cerebellum, sensory cerebrum and hippocampus: possible implications for cognition, consciousness, intelligence and creativity. *Prog Neurobiol* 64: 1–33.
 36. Barcelo F, Escera C, Corral MJ, Perianez JA (2006) Task switching and novelty processing activate a common neural network for cognitive control. *J Cogn Neurosci* 18: 1734–1748.
 37. Fries P (2005) A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence. *Trends Cogn Sci* 9: 474–480.
 38. Tsuda I (2001) Toward an interpretation of dynamic neural activity in terms of chaotic dynamical systems. *Behav Brain Sci* 24: 793–810.
 39. Wagatsuma H, Yamaguchi Y (2007) Neural dynamics of the cognitive map in the hippocampus. *Cognitive Neurodynamics* 1: 119–141.
 40. Kifer Y (1981) The exit problem for small random perturbations of dynamical systems with a hyperbolic fixed point. *Israel J, Math* 40: 74–96.
 41. Stone E, Holmes P (1990) Random Perturbations of Heteroclinic Attractors. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50: 726–743.
 42. Wilson HR, Cowan JD (1973) A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue. *Kybernetik* 13: 55–80.
 43. Lotka AJ (1925) *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Willians & Wilkins Co..
 44. Huerta R, Rabinovich M (2004) Reproducible sequence generation in random neural ensembles.

Phys Rev Lett 93: 238104.

45. Bakhtin Y (2007) Exit asymptotics for small diffusion about an unstable equilibrium. *Stochastic Processes and their Applications*; In press.
46. Viviani R, Gron G, Spitzer M (2005) Functional principal component analysis of fMRI data. *Hum Brain Mapp* 24: 109–129.
47. Brown E, Gao J, Holmes P, Bogacz R, Gilzenrat M, et al. (2005) Simple neural networks that optimize decisions. *Int J Bifurcation Chaos Appl Sci Eng* 15: 803–826.
48. Briggman KL, Abarbanel HD, Kristan WB Jr (2005) Optical imaging of neuronal populations during decision-making. *Science* 307: 896–901.
49. Loh M, Deco G (2005) Cognitive flexibility and decision-making in a model of conditional visuomotor associations. *Eur J Neurosci* 22: 2927–2936.
50. Wong KF, Wang XJ (2006) A recurrent network mechanism of time integration in perceptual decisions. *J Neurosci* 26: 1314–1328.
51. Kahneman D, Tversky A (1979) Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica* 47: 263–291.
52. Kahneman D, Tversky A In: Kahneman D, Slovic P, Tversky A, eds (1982) *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press. pp 201–208.
53. Levenshtein VI (1966) Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet Physics Doklady* 10: 707–710.
54. Ito J, Nikolaev AR, van Leeuwen C (2007) Dynamics of spontaneous transitions between global brain states. *Hum Brain Mapp* 28: 904–913.
55. Ashwin P, Borresen J (2004) Encoding via conjugate symmetries of slow oscillations for globally coupled oscillators. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys* 70: 026203.
56. Ashwin P, Orosz G, Wordsworth J, Townley S (2007) Dynamics on networks of cluster states for globally coupled phase oscillators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 6:728–758.
57. Barraclough DJ, Conroy ML, Lee D (2004) Prefrontal cortex and decision making in a mixed-strategy game. *Nat Neurosci* 7: 404–410.
58. Daw ND, Niv Y, Dayan P (2005) Uncertainty-based competition between prefrontal and dorsolateral striatal systems for behavioral control. *Nat Neurosci* 8: 1704–1711.
59. Yoo SS, Jolesz FA (2002) Functional MRI for neurofeedback: feasibility study on a hand motor task. *Neuroreport* 13: 1377–1381.
60. Weiskopf N, Scharnowski F, Veit R, Goebel R, Birbaumer N, et al. (2004) Selfregulation of local brain activity using real-time functional magnetic resonance imaging (fMRI). *J Physiol Paris* 98: 357–373.
61. Caria A, Veit R, Sitaram R, Lotze M, Weiskopf N, et al. (2007) Regulation of anterior insular cortex activity using real-time fMRI. *Neuroimage* 35:1238–1246.
62. Haynes JD, Rees G (2006) Decoding mental states from brain activity in humans. *Nat Rev Neurosci* 7: 523–534.
63. Shilnikov LP, Shilnikov AL, Turaev DV, C LO (1998) *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part I)*. Singapore: World Scientific Publishing.
64. Shilnikov AL, Turaev DV, Chua LO, Shilnikov LP (2001) *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part 2)*. Singapore: World Scientific Publishing.
65. Afraimovich V, Hsu SB (2003) *Lectures on Chaotic Dynamical Systems, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics* 28: International Press.