时间尺度系统中的 MMOs

Martin Wechselberger

我们想描述一个 MMOs 的参数机制，这个 MMOs 的 SAOs 由于沿着鞍焦点 p 的不稳定流形 $W^u(p)$ 螺旋运动而产生，并且是唯一的或者是其中的一部分。对这个问题的分析似乎比折结点的分析要复杂得多，而且是刚刚开始。我们提供了一些定位这些参数机制的见解。首先，我们将奇异 Hopf 分岔的标准型（3.7）式中的 v 作为主要的分岔参数，并寻找 v 的取值范围，在这个范围里可以找到 MMOs。如果 $v = v_H$ 处的 Hopf 分岔是超临界的，那么对于足够接近 Hopf 分岔的参数，$W^u(p)$ 的极限集就是分岔稳定的周期轨线。由于一种新型的分岔，观察到 MMOs 的起始点在距离 Hopf 分岔 $v = O(\varepsilon)$ 处发生[87]。这种新型的分岔发生在某个参数机制中，在该机制中 p 为鞍焦点且 $W^u(p)$ 与二维排斥 Fenichel 流形 S_ε^r 相切。如果不仔细观察，人们可能认为动态系统中的两个不稳定对象不能相交。然而，回想一下，$W^u(p)$ 由当 $t \to -\infty$ 时接近 p 的轨线组成，而 S_ε^r 由在慢时间尺度上保持 $O(1)$ 量级时间慢速的前向轨线组成。因此，单轨线可能满足以上（两个情况）。图 11 展示了系统（3.7）在参数 $(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.007057, 0.008870, -0.5045, 1.17, 0.01)$ 时，$W^u(p)$ 和 S_ε^r 之间的切线的一个例子（注意到，$v = O(\varepsilon)$，因此，$v_H \approx -8.587 \times 10^{-5}$）。其中展示了在 $W^u(p)$（红色线）上从靠近 p 处开始并在截面 $\Sigma := \{y = 0.3\}$ 处结束的轨线集合，以及在临界流形的排斥分岔上开始并在 Σ 上结束的 S_ε^r 上的轨迹的集合；有关计算这些流形所使用的方法的细节，请参阅第 8.1 节。图 11(b) 展示了 $W^u(p)$ 和 S_ε^r 与 Σ 相交的两条曲线的的切线。

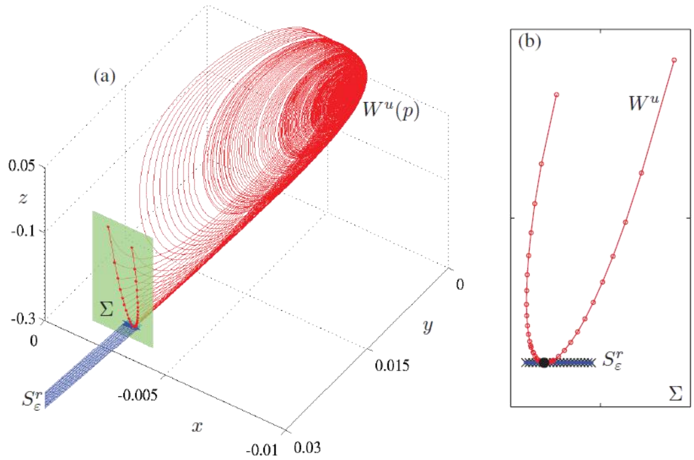

图 11：平衡点的不稳定流形 $W^u(p)$ 与参数为 $(v,a,b,c,\varepsilon)=(0.007057,0.008870,-0.5045,1.17,0.01)$ 的排斥慢流形 S_ε^r 之间的切面图。子图(a)显示了 $W^u(p)$（红色）和 S_ε^r（蓝色）的轨线，它们终止于由 $y=0.3$ 定义的绿色截面处。子图(b)中显示了 $W^u(p)$（在被计算的轨线上的点标记为“o”）和 S_ε^r（在被计算的轨线上的点标记为“x”）的交点。

一个 MMO 的周期轨线 Γ 沿着 $W^u(p)$ 形成的 SAO 的数目取决于 Γ 与 p 的距离有多近，以及 p 的复特征值的实部与虚部的比率。接近 p 的唯一方法是沿着其稳定流形 $W^s(p)$，所以如图 9 所示的 MMO 必须非常接近 $W^s(p)$。MMO 和 $W^s(p)$ 之间的最小距离 d 类似于在折结点的情况下轨线距主强鸭解的距离 δ。与折结点的情况不同，在 $W^u(p)$ 附近观测到的 SAO 的最大振幅与 d 基本无关。当 $d \to 0$ 改变时，SAOs 的周期长度增加，并且该周期从小到不能够检测到的振荡时就开始了。关于标准型（3.7）式的参数是如何影响 d 的相关研究很少，但是在 Guckenheimer 的论文[87]中的图 8 说明了 d 以复杂的方式依赖于参数 c。已知存在一个参数区域，在这个区域内 MMO 轨线的全局回归接近 $W^s(p)$。然而，由于在超临界 Hopf 分岔附近没有立即发现 MMOs，所以在 MMO 轨线上，复特征值的实部与虚部的比值仍然（被限制）远离 0。这就防止出现极其长的瞬时的振荡，这些振荡像在次临界 Hopf 分岔附近发现的振荡一样任意缓慢地增长；参见第 5 节以及[89，图 5]。

用于产生 SAOs 的奇异 Hopf 和折结点机制不是互斥的，并且这两种机制可以存在于具有$v = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$的过渡区域中的单个 MMO 中。所发现的具体行为部分取决于奇异 Hopf 分岔附近的平衡点 p 是具有一对复特征值的鞍焦点还是具有两个实特征值的鞍点。图 21 中展示的 MMO 包含一些 SAOs，它们位于吸引和排斥慢流形之间的旋转扇区内，并且一些 SAOs 位于鞍焦平衡点的不稳定流形上。另一方面，我们注意到，SAOs 不能与只有实特征值的鞍平衡点相关联；这种情况发生在参数区域$v > (a + c)\varepsilon^{1/2}$里（按照前导顺序），此时$v = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$。因此，在这种情况下，SAOs 仅与$v = O(1)$（即，$\mu = O(1)$）的折结点类型机制相关联。Krupa 和 Wechselberger[144]对过渡区$v = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$进行了分析，并指出如果全局回归机制投影到漏斗区，则折结点理论可以推广到该参数区。

具有单个快变量的慢-快系统，就像我们过去研究折结点和奇异 Hopf 分岔那样，没有快速振荡。它们的快速子系统是一维的，直线上向量场的轨线被约束为单调的。这就意味着这些系统中的 LAOs 总是张弛振荡，这种振荡的轨线不沿着快速变量方向，而通过临界流形。因此，具有看起来不是张弛振荡的 LAOs 的 MMOs 的模型必须至少具有两个快速变量；图 1 中展示的 BZ 反应的振荡就是这样的例子。下一节讨论具有三个时间尺度的系统。这样的系统可以看作一个或两个快速变量之间的中间变量，并且它们确实具有$L > 1$的“简单”MMO 的特征。

3.3. 在三个时间尺度系统中的 MMOs

当奇异 Hopf 分岔的标准型(3.5)式和(3.7)式的系数v、a、b和c为$O(\varepsilon)$量级或更小时，则z相对于y变化缓慢，且系统实际上有三个时间尺度：快、慢和超慢。Krupa、Popovic 和 Kopell[139]用几何方法和在$a = c = 0$情形的渐近展开的方法来研究了这个系统。他们观察到了 SAOs 的振幅相对较大的 MMOs。他们的分析是基于伸缩系统，该系统具有两个快变量和一个慢变量。为了使三时间尺度结构显式化，我们设置$v = \varepsilon\hat{v}$，$a = \varepsilon\hat{a}$，$b = \varepsilon\hat{b}$且$c = \varepsilon\hat{c}$。将 3.2 节中的奇异 Hopf 标准型（3.7）式重新用$x = \varepsilon^{1/2}\bar{x}$，$y = \varepsilon\bar{y}$，$z = \varepsilon^{1/2}\bar{z}$，$t = \varepsilon^{1/2}\bar{t}$缩放，得到（3.8）式：

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - \varepsilon^{1/2}x^3 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = \varepsilon\left(-\hat{v} - \varepsilon^{1/2}\hat{a}x - \varepsilon\hat{b}y - \varepsilon^{1/2}\hat{c}z\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

系统（3.8）仍然是一个奇摄动系统，但是现在有两个快变量x和y和一个慢变量z。如果$\hat{v} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$或更小，即$v = O\left(\varepsilon^{3/2}\right)$或更小，则平衡点位于原点附近的$O(1)$邻域内。如果该平衡点是鞍焦点类型的，那么它在动力学中起着重要作用；尤其是，它经历$\hat{v} = O(\varepsilon)$的 Hopf 分岔，即$v = O\left(\varepsilon^2\right)$。

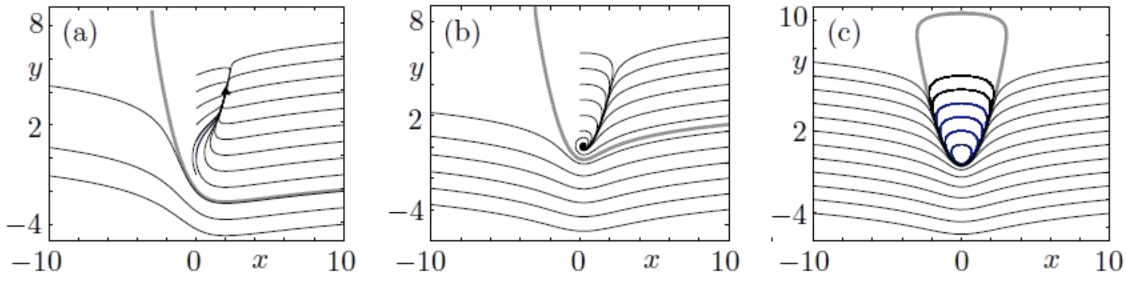

图 12：系统（3.9）取三个不同的 z 值的相图。图中显示了几个轨线（黑色）和一个近似于分隔线的轨线（灰色）。对于每个 z ，在 $(x,y)=(z,z^2)$ 处有一个平衡点 p 。子图(a) - (c)分别表示 $z=2$ 、 $z=0.25$ 和 $z=0$ 的情况，其中 p 是稳定结、稳定焦点和由连续周期轨线族包围的中心。这个轨线族的边界是最大鸭解。

我们首先考虑 z 作为参数的系统(3.8)的二维边界层问题。它通过系统(3.9)导出的，如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

该系统与对平面鸭解问题分析中所得到的系统完全相同，与系统(2.7)相比较，只是参数 λ 被 z 代替。系统（3.9）对于每个 z 值都具有唯一的平衡点 p，且由 $(x, y) = (z, z^2)$ 所确定。在图 12 中的(a)、(b)和(c)中分别展示了系统(3.9)在 (x, y)-平面中取三个不同 z 值的时的相图，即 $z = 2$、$z = 0.25$ 和 $z = 0$。对于 $z > 0$，平衡点 p 是 (x, y)-平面上的吸引不动点；在 $z > 1$ 时，它是结点，在 $0 < z < 1$ 时，它是焦点；注意到，这个信息（z 的取值范围）还决定了 $\hat{v} = O(\varepsilon^{1/2})$ 到（前导阶）的系统(3.8)的平衡点类型，同样的参数也可以用来确定 3.2 节中鞍-焦平衡点的流域边界。平衡点 p 的流域边界是一条无界轨线，该轨线在图（a）和（b）中是以灰色表示。当 $z = 0$ 时，向量场（3.9）具有时间反转对称性，这导致存在周期轨线族。的确，函数

$$H(x, y) = \exp(-2y)\left(y - x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

是一个整体，水平曲线 $H = 0$ 是一条抛物线，它把围绕 p（原点）的周期轨线与位于抛物线之下的无界轨线分开，并且在有限时间内，当 $x \to \pm\infty$ 时，变成无界轨线。

当 z 保持较小的值且与 x 和 y 相比变化缓慢，系统（3.8）可以看作系统（3.9）的摄动。在这种情况下，H 的变化可以用来监测轨线的 SAOs。我们在（未缩放的）奇异 Hopf 标准型（3.7）中，用 MMOs 的研究数值来证明这一点，其中我们主要关注于在参考文献[139]中研究的 $a = c = 0$ 的情况。而且我们固定 $b = -0.005$ 和 $\varepsilon = 0$，并改变参数 v 的值。然后我们得到 $\dot{z} = -v - by$，这个式子表明当 y 变大时，z 会增加，但是当系统产生 SAO 且 y 变小时，z 会减小。的更准确地说，我们希望在产生 SAOs 时，z 的平均值会增加，而在产生 LAOs 时，z 的平均值会减少。z 的变化应该足够大，以驱动轨线穿过慢流形并引起 SAOs 和 LAOs 之间的转换。

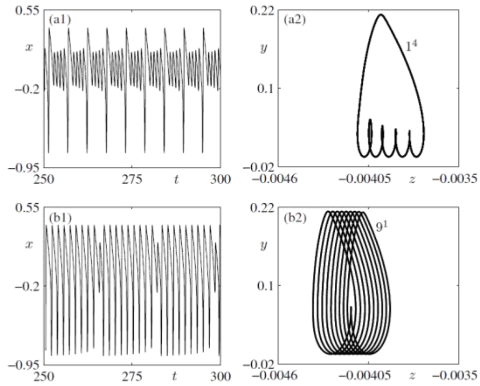

图 13：参数为 $(a,b,c,\varepsilon) = (0,-0.005,0,0.01)$ 的系统（3.7）的稳定周期 MMOs 图。第一行(a1)是在 $v = 0.00015$ 时，x 为时间序列，具有特征 1^4 的周期 MMO，并将其投影到(a2)中的 (z, y)-平面上；类似的第二行(b)是 v = 0.00032 时的投影，其中周期 MMO 具有特征 9^1。

图 13(a)展示了一个周期性的具有特征 1^4 的 MMO，该振荡是在 $v = 0.00015$ 时被发现的(它是 $O(\varepsilon^2)$ 量级的)。注意，对于该参数的选择，在平面 $y = 0.03$ 上 $z = 0$。在子图（a2）上，轨线在 (z, y)-平面上的投影表明，z 大约是从-0.003713 下降到-0.004143，而轨线产生了四个个 SAOs，并且 z 在单个 LAO 期间增加了。注意到系统（3.7）还具有两个平衡点，

它们的 z-坐标为 $\pm\sqrt{-\,{}^{\nu}\!/\!_{(b\varepsilon)}}$，在这种情况下它们的 z 坐标等于 $\pm\sqrt{3}$。然而，子图(a2)中所示的 MMO 模式只局限于原点附近(在 z 方向上)，所以这两个平衡点对动力学没有影响。

当 ν 增加时，在 $z=0$ 时的 y 值增加了，并且轨线倾向于更快地通过 SAOs 区域。图 13（b）展示出了一个当 $\nu=0.00032$ 时而获得的周期性的特征 9^1 的 MMO。这里的 ν 值接近于取值范围的最大值，在一个取值范围中的参数值取 $(a,b,c,\varepsilon)=(0,-0.005,0,0.01)$ 时会有 MMOs 存在且 $z=0$，$y=0.064$。正如子图(b2)中所展示的投影那样，z 的平均值在每个 LAO 期间增加($|z|$ 减少)，但是在它越过阈值进入 SAOs 区域之前会产生 9 个 LAOs。另一方面，单个 SAO 会将轨线带回 LAOs 的区域。

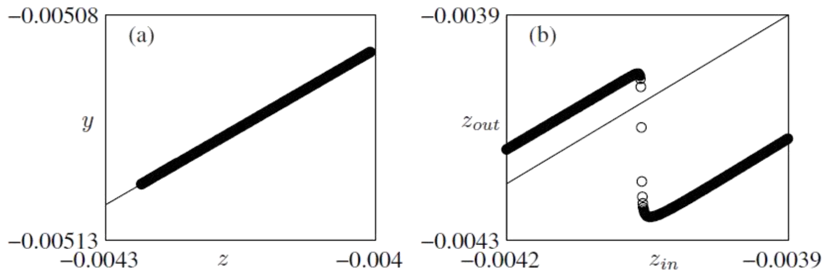

图 14：将参数为 $(\nu,a,b,c,\varepsilon)=(0.0003,0,-0.005,0,0.01)$ 的系统（3.7）在区段 $x=0$ 的回归图。子图(a)显示返回几乎是一维的沿着一条由 $y=0.1153z-0.004626$ 近似给出的直线。在子图(b)中，绘制了具有 $z\in[-0.0043,-0.004]$ 的初始条件返回的 z-坐标与其初始 z-值的关系。

对于 $\nu\in(0.00015,0.00032)$ 的中间值，系统显示具有各种特征的非周期性 MMOs 以及周期性 MMOs。这些特征可以通过到 $x=0$ 的截面的近似一维（回归图）来分析。返回到这个截面，随着 x 的减小，它会与一条薄带重合；这种情况如图 14(a)所示，此时 $\nu=0.0003$，系统应该会产生非周期性 MMOs。图 14(a)中的薄带近似可由 $y=0.1153z-0.004626$ (此时 $x=0$) 拟合。如果我们在 $z\in[-0.0043,-0.004]$ 时，在这条线上取 600 个初始条件，则它们返回横截面的下一个值落就会到两个段上，这两个段接近初始线并且 $z\in[-0.0043,-0.004]$。图 14(b)描绘了这些返回，显示了 600 个初始条件的回归中的 z 坐标 z_{out} 与其初始 z 坐标 z_{in}；还显示了对角线 $z_{out}=z_{in}$。图 14(b)表明，线段附近的回归图可以通过（秩一图）来近似，在这个秩一图中具有两个斜率接近于一的线段，且被初始值 $z_{in}\approx-0.004055$ 的陡峭段分开。回归图在该图的左“分岔”上 z 值会随之增加，而在右分岔上 z 值会随之减少。这在上述的情况中，因为较大的 z 值对应于 SAOs 产生，而较小的值对应于 LAOs 产生。没有碰到图陡峭部分的轨线会在两个分岔之间来回重复。当 ν 变化时，回归图的“形状”在性质上保持相同：两个分岔仍然具有接近于一的斜率，但是它们与对角线的偏移不同。大约当 $\nu<0.00013$ 时，代表 SAOs 的右分岔图像映射到自己，而当 $\nu>0.00034$ 时，左分岔图像映射到自己，且系统只有大周期的且无 SAOs 的张弛振荡。在存在 MMOs 的 ν 取值范围内，一维映射[41]的捏合（kneading）理论可以应用于由数值生成的回归映射，以预测 MMOs 的特征。

进一步深入了解 $z=z_{in}\approx-0.00405$ 处的回归图的陡峭段来自于对吸引和排斥慢流形的交点处的计算。我们从在吸引分岔上的初始条件($x<2$)计算正向轨线，从临界流形的排斥分岔上的初始条件计算反向轨线，直到它们与截面 $\{x=0\}$ 相交。因为轨线快速收敛到吸引慢流形和排斥慢流形，它们与 $\{x=0\}$ 的交点给出了慢流形曲线与 $\{x=0\}$ 的交点的良好近似。这两条相交曲线的交点坐标大约是 $(y,z)=(0.0050941,0.0040564)$。因此，这一点位于产生图 14（b）所示的陡峭段的区域内。根据定义，吸引和排斥慢流形的交集是最大的鸭解。在排斥流形一侧的截面 $\{x=0\}$ 的初始条件产生了 SAOs，而另一侧的轨线产生快速跳转到吸引慢流形的另一侧($x>0$)。因此，我们已经从数值上证实了鸭轨线将图 14(b)所示的回归图的两个分岔分开；与图 7(a)进行了比较，图 7(a)说明了在折结点附近计算的一维回归图有几个陡峭部分，这些部分对应着主强鸭解和问题的最大次鸭解。

3.4. 动力学 Hopf 分岔的回旋机制产生的 MMOs

回顾 3.3 节，系统（3.8）中的 SAOs 与 LAOs 之间的突然（不连贯）过渡是三时间尺度结构作用的结果，这样的结构允许我们把系统看成具有两个快变量和仅有一个慢变量，这种具有两个或更多个快变量的系统可能在边界层方程中具有 Hopf 分岔。现在我们考虑这种情况，并假设边界层方程的一对复特征值沿着简化系统的轨线穿过虚轴。由于在快变量方向上的复特征值，在慢流形周围的轨线会产生振荡。这种振荡的幅度最初会减小(此时复特征值的实部是负的)，然后再次增加(在实部变为正之后)。我们把情况称为**动力学 Hopf 分岔**（dynamic Hopf bifurcation）。我们的主要目标是确定 MMOs 何时具有与动力学 Hopf 分岔相关联的 SAOs。注意到与具有单个快变量的系统不同，这种类型的 SAO 既不与临界流形的折奇异性相关，也不与 $\varepsilon > 0$ 的系统的（奇异）Hopf 分岔相关。

一个著名的动力学 Hopf 分岔的例子是时滞 Hopf 分岔现象。为了简单起见，我们在这里讨论一个具有一个慢变量和两个快变量的系统，这可能是最低维数的情况了。考虑一维临界流形 S 上边界层方程发生 Hopf 分岔的 L 段。这意味着边界层方程沿 L 的线性化具有一对横跨虚轴的复特征值 $\alpha \pm i\beta$。在超临界 Hopf 分岔的情形下，由慢变量参数化的边界层方程吸引周期轨线的单参数族从点 $L_0 \in L$ 开始产生，其中 $\alpha = 0$。如果整个系统的轨迹线 $u(t)$ 接近 L，该 L 段靠近距离 L_0 的距离为 $\delta = |L_u - L_0| = O(1)$ 的点 $L_u \in L$，则 $u(t)$ 将在慢时间尺度上以指数方式接近 L。边界层方程经历 Hopf 分岔，但在分析系统中，在 Hopf 分岔发生后，$u(t)$ 在 $O(1)$ 距离上保持接近 L [169]。发生这**时滞**(delay)是因为 $u(t)$ 从 L 被排斥需要 $O(1)$ 时间，特别是 $u(t)$ 不会立即跟随从 L_0 开始产生的边界层方程的周期轨线。慢速分析确定了一个确定的“跳跃”点（称为**缓冲点**（buffer point）），在该点 $u(t)$ 离开 L 并接近周期性轨线，如果 $u(t)$ 没有更早地离开 L 并接近周期轨道。在时滞 Hopf 分岔中沿 L 有 SAOs，但在 L_0 附近它们以指数方式变小，且从 L 到周期轨线的跳跃可能在 SAOs 的单个周期内发生。因此，时滞 Hopf 分岔附近的 SAOs 通常非常小，以至于在实例中无法观察到。这种情况让我们联想到与 $\delta = O(1)$ 折结点相关的 MMOs。更具体地说，定理 3.2 预测了最大特征 1^{k+1} MMO，但是由于在 S_ε^a 上向主弱鸭解 γ_w 强收缩，实际上只观察到最后的旋转，可以参见图 7(b4)。

在许多示例中，例如在第 6 和 7 节中的那些示例中，实际上可以在动力学 Hopf 分岔附近观察具有 SAOs 的 MMOs，该动力学 Hopf 分岔的振幅比较大，易于被观察到。我们采用 Wallet 在参考文献[235]中使用的术语“回旋”来描述通过具有振荡的动力学 Hopf 分岔的轨线，振荡的幅度保持在可观测阈值。我们讨论了在一个慢变量和两个快变量的系统中回旋以及它是如何产生 MMOs 的。考虑动力学 Hopf 分岔的边界层方程线性化得到的模型系统(3.10)：

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -y + zx \\
\dot{y} = x + zy \\
\dot{z} = \varepsilon
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

该方程在极坐标下是可分的，对于平面 $\{z = 0\}$ 中具有初始条件的轨线满足 $\dot{r} = \varepsilon t r$。因此，一般解是 $r(t) = r(0)\exp\left(\varepsilon t^2/2\right)$，这意味着解的振幅在 $z < 0$ 时减小，而在 $z > 0$ 时增大。我们得出结论，$r\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)/r(0) = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$，并且振荡在 $1/\varepsilon$ 的时间间隔内几乎具有恒定的振幅。如果轨线的 r-坐标在 z 值为 $O(\varepsilon)$ 时减小到 $r = 1$，则与动力学 Hopf 分岔相关的振荡的最小振幅仍可被观测到。这些振荡的振幅和 ε 与接近动力学 Hopf 点的距离的耦合表征了回旋状态并将其与时滞 Hopf 分岔区分开来。当 ε 在系统中固定时，时滞 Hopf 点和回旋之间的区别变得模糊，但是在许多例子中还是很清晰的。

系统（3.10）描述了 SAOs，在边界层方程中发生动力学 Hopf 分岔的点附近具有非常明显的非零振幅。然而，它不能解释 MMOs 中在产生 SAO 期间开端时和结束时的特征性突变，例如第 6 和 7 节中的突变，因为这些突变依赖于不属于系统(3.10)局部分析的机制。目前还没有全面研究确定由回旋产生的 SAOs 的突然开始和结束可能的几何机制。本文没有讨论这个问题，而是重点研究了生成 MMOs 的 SAOs 的局部机制。尽管如此，下面的示例说明了一种突然跳离回旋的 SAOs 的机制。考虑通过展开余维-2 的 Bogdanov–Takens 分岔[90]的“动力学”部分，定义系统(3.11)。

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y \\
\dot{y} = \lambda + zy - x^2 - xy \\
\dot{z} = \varepsilon
\end{cases}
\tag{3.11}
$$

如前面一样，我们把 z 看作是一个缓慢变化的参数。当 $\lambda > 0$ 且 $\varepsilon = 0$ 时，系统有两条平衡直线，由 $x = \pm\lambda$ 和 $y = 0$ 所定义。一个超临界 Hopf 分岔沿平衡线 $x > 0$ 的部分出现。在该分岔中产生的周期轨线族终止于同宿轨线。而且 (x, y) 平面上总是存在一个有界区域，在该区域内围绕平衡点发生振荡，这就是回旋区域。边界层方程在 $x < 0$ 时的(鞍)平衡线扰动到鞍型 Feniche 流形，在这个例子中它的稳定流形和不稳定流形引导入口和出口到回旋处。正如我们所见到的那样，振荡的数目及其最小振幅由初始条件和 ε 的大小决定。这在图 15 中用 $\lambda = 0.1$ 的系统(3.11)的轨线和 ε 的不同值加以说明了，所有这些都从位于回旋区域之外的初始条件 $(x, y, z) = (-1, 0.8, -0.12)$ 开始。注意到 x 和 y 是 $O(1)$ 量级的，所以一个回旋产生的条件是 $|z|$ 是 $\sqrt{\varepsilon}$ 阶的。在图 15(a)中，当 $\varepsilon = 0.006$ 时，我们没有发现回旋的产生，但是观察到衰减很快、在一段时间内非常小的振荡，然后在轨线跳离之前再次快速增长。另一方面，在子图(b)中，当 $\varepsilon = 0.012$ 时，振荡先衰减然后逐渐增大，并且它们始终保持可观测的大小。我们得出结论，ε 刚好足够大，足以描述一个回旋区域，在跳跃发生之前通过它可产生七个 SAOs。对于更大的 ε 值，相同的初始条件会产生几乎保持恒定振幅的振荡；这种情况可以参见图 15(c)中，其中 $\varepsilon = 0.02$。注意到由于在边界层系统中通过 Hopf 分岔附近区域的较快的移动，所以我们现在在轨线跳开之前只发现三个 SAOs。

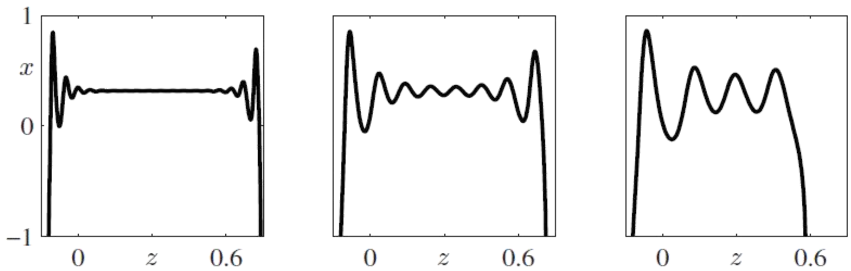

图 15：具有初始点 $(x,y,z)=(-1,0.8,-0.12)$ 的系统(3.11)的轨线的 x -坐标的时间序列。(a) - (c)分别为当 $\lambda=0.1$ 时，对应 $\varepsilon=0.006$ 、 $\varepsilon=0.012$ 和 $\varepsilon=0.02$ 的情况。

有趣的是，把与回旋相关的 SAOs 与那些发生在折结点附近或奇异 Hopf 分岔附近的 SAOs 相比较。这两种 SAOs 的第一个区别是，对于回旋来说，振荡周期是 $O(\varepsilon)$ (慢时间)，而对于其他两种情况，振荡周期是 $O(\varepsilon)$。其次，一个回旋的最小振幅和 SAOs 的数目是由奇异摄动参数和到时滞 Hopf 分岔点的全局回归距离决定。对于折结点，特征值的比值 μ 和全局回归到强鸭解的距离 δ 决定了 SAOs 的最小振幅和最小数目，而对于奇异 Hopf 分岔，SAO 的这些性质仅由全局回归到鞍焦平衡点的稳定流形的距离决定。最后，对于一个回旋来说，SAOs 的终止取决于全局机制或 SAOs 的振幅的某些（给定）定义的阈值。没有区分与折结点相关联的终止机制，但平衡点的不稳定流形与排斥慢流形的交点通常限制了奇异 Hopf 分岔附近的 SAOs 的振幅。

3.5. SAOs 局部机制概述

现在，我们总结一下本节关于产生 MMOs 的局部机制的主要结果。对于具有单个快变量的系统，支持产生 SAOs 的局部机制必须涉及两个时间尺度的混合。我们对在折结点和折鞍点附近产生 MMOs 的区域进行划分:

1. **折结点**（Folded Nodes）：如果参数满足适当的量级条件（$\nu = O(1)$），使得整个系统的平衡点不在折结点附近，那么应用 3.1 节的理论，SAOs 是由于慢流形的扭曲而产生的。

2. **奇异 Hopf**（Singular Hopf）：正如 3.2 节所介绍的那样，在奇异 Hopf 分岔（$\nu = O(\varepsilon)$）附近的动力学趋向于相当复杂状态。当轨线遵循鞍焦点的不稳定流形时，就会产生 SAOs。

3. **过渡区**（Transition regime）：折结点区和奇异 Hopf 区被中间值为 $\nu = O(\varepsilon)$ 的过渡区分开。参考文献[144]对折结点理论进行了推广，可以发现在参考文献[144]中的参数 μ 不仅表示特征值之比，而且还可以用于描述爆破（blown-up）系统中平衡点到折结点的距离。在这种过渡区域中，SAOs 可以穿过折结点的旋转扇区，也可以沿着鞍焦平衡点的不稳定流形螺旋离开。

在具有至少两个快变量的系统中，回旋提供了生成 SAOs 的不同的局部机制。这里，边界层方程具有复特征值，且 SAOs 与系统的快速方向一致。目前，把回旋作为 MMOs 生成机制的相关系统性研究较少，理论上研究也不够完善。

最后，具有三个时间尺度的三维系统可以展示本节所讨论的所有机制。换言之，一个三时间尺度系统可以被认为是具有两个慢变量，在这种情况下，可以找到折结点和奇异 Hopf 机制，或者，作为备选方案，可以认为具有两个快变量，这允许发生回旋。

下面的四个部分是说明的在不同的局部机制产生 MMOs 的案例研究:

◎在第 4 节中，Koper 模型是一个三维慢系统，其中具有折结点和超临界奇异 Hopf 分岔。

◎在第 5 节中，三维简化 Hodgkin-Huxley 模型也具有折结点，但还具有亚临界奇异 Hopf 分岔。

◎在第 6 节中，peroxidase-oxidase 反应（P0 反应）的四维 Olsen 模型显示与回旋有关的 MMOs。

◎在第 7 节中，Showalter-Noyes-Bar-Eli 模型是一个展示 MMOs 的七维系统。组织产生这些 MMOs 的全局机制是未知的，但我们在这里可以明确的是，MMOs 中的 SAOs 是由于一个回旋。

参考文献

[1] C. D. ACKER, N. KOPELL, AND J. A. WHITE, Synchronization of strongly coupled excitatory neurons:
Relating network behaviour to biophysics, J. Comput. Neurosci., 15:71－90, 2003.

[2] B. D. AGUDA, AND B. L. CLARKE, Bistability in chemical reaction networks: theory and application to the peroxidase-oxidase reaction, J. Chem. Phys., 87(6):3461 – 3470, 1987.
[3] B. D. AGUDA, AND R. LARTER, Periodic-chaotic sequences in a detailed mechanism of the peroxidase?oxidase reaction, J. Am. Chem. Soc., 113:7913 – 7916, 1991.
[4] B. D. AGUDA, R. LARTER, AND B. L. CLARKE, Dynamic elements of mixed-mode oscillations and chaos in a peroxidase-oxidase network, J. Chem. Phys., 90(8):4168 – 4175, 1989.
[5] F. M. DE AGUIAR, S. ROSENBLATT, A. AZEVEDO, AND S. M. REZENDE, Observation of mixed-mode oscillations in spin-wave experiments, J. Appl. Phys., 85(8):5086 – 5087, 1999.
[6] F. N. ALBAHADILY, J. RINGLAND, AND M. SCHELL, Mixed-mode oscillations in an electrochemical system. I. A Farey sequence which does not occur on a torus, J. Chem. Phys., 90:813 – 821, 1989.
[7] K. AL-NAIMEE, F. MARINO, M. CISZAK, R. MEUCCI, AND F. T. ARECCHI, Chaotic spiking and incom?plete homoclinic scenarios in semiconductor lasers with optoelectric feedback, New Journal of Physics.
[8] F. ARGOUL, A. ARNEODO, P. RICHETTI, AND J. C. ROUX, From quasiperiodicity to chaos in the Belousov?Zhabotinskii reaction. I. Experiment, J. Chem. Phys., 86(6):3325 – 3338, 1987.
[9] F. ARGOUL AND J. C. ROUX, Quasiperiodicity in chemistry: An experimental path in the neighbourhood of a codimension-two bifurcation, Phys. Lett. A, 108(8):426 – 430, 1985.
[10] V. I. ARNOLD (ED.), Encyclopedia of mathematical sciences: Dynamical systems V, Springer-Verlag, Ber?lin/New York, 1994.
[11] N. BABA AND K. KRISCHER, Mixed-mode oscillations and cluster patterns in an electrochemical relaxation oscillator under galvanostatic control, Chaos, 18(1):015103, 2008.
[12] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations I, SIAM J. Appl. Mathem.,46(5):721 – 739, 1986.
[13] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations II, SIAM J. Appl. Mathem., 52(6):1651 – 1664, 1992.
[14] S. M. BAER, T. ERNEUX, AND J. RINZEL, The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance, SIAM J. Appl. Math. 49(1):55 – 71, 1989.
[15] D. BAKES, L. SCHREIBEROVA, I. SCHREIBER, AND M. J. B. HAUSER, Mixed-mode oscillations in a ho?mogeneous ph-oscillatory chemical reaction system, Chaos, 18(1):015102, 2008.
[16] D. BARKLEY, Slow manifolds and mixed-mode oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, J. Chem.Phys., 89(9):5547 – 5559, 1988.
[17] D. BARKLEY, Linear stability analysis of rotating spiral waves in excitable media, Phys. Rev. Lett.,68(13):2090 – 2093, 1992.
[18] B. P. BELOUSOV, A periodically acting reaction and its mechanism, in Collection of short papers on Radiation Medicine for 1958, Med. Publ., Moscow, 1959, pp 145 – 147.
[19] E B ENO?IT, Systems lents-rapides dans R3 et leurs canards, in Third Schnepfenried geometry conference,volume 2, pp 159 – 191. Soc. Math. France, 1982.
[20] E BENO?IT, Enlacements de canards, C.R. Acad. Sc. Paris, 300(8):225 – 230, 1985.
[21] E BENO?IT, Canards et enlacements, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 72:63 – 91, 1990.
[22] E ENO?IT , J.-L. CALLOT, F. DIENER, AND M. DIENER, Chasse au canards, Collect. Math., 31:37 – 119.

[23] E B′ ENO?IT, AND C. LOBRY, Les canards de R3
, C.R. Acad. Sc. Paris, 294:483–488, 1982.

[24] N. BERGLUND AND B. GENTZ, Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems: a sample-paths approach, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2005.

[25] N. BERGLUND AND B. GENTZ, Stochastic dynamic bifurcations and excitability, in C. Laing and G. Lord,
editors, Stochastic methods in neuroscience, Oxford University Press, 2008, pp 65–93.

[26] J. BOISSONADE AND P. DEKEPPER, Transitions from bistability to limit cycle oscillations. Theoretical ana?lysis and experimental evidence in an open chemical system, J. Phys. Chem., 84:501–506, 1980.

[27] B. BRAAKSMA, Singular Hopf bifurcation in systems with fast and slow variables, J. Nonlinear Science,8(5):457–490, 1998.

[28] T.S. BRIGGS, AND W.C. RAUSCHER, An oscillating iodine clock, J. Chem. Educ., 50:496, 1973.

[29] T. V. BRONNIKOVA, V. R. FED'KINA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Period-doubling bifurcations and chaos in a detailed model of the peroxidase-oxidase reaction, J. Phys. Chem., 99(23):9309–9312,1995.

[30] T. V. BRONNIKOVA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Nonlinear dynamics of the peroxidase-oxidase reaction. I. Bistability and bursting oscillations at low enzyme concentrations, J. Phys. Chem. B,105:310–321, 2001.

[31] M. BR?NS, M. KRUPA, AND M. WECHSELBERGER, Mixed mode oscillations due to the generalized canard phenomenon, Fields Institute Communications, 49:39–63, 2006.

[32] S. A. CAMPBELL, E. STONE, AND T. ERNEUX, Delay induced canards in a model of high speed machining,Dynamical Systems, 24(3):373–392, 2009.

[33] J. CARR, Applications of centre manifold theory. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.

[34] C. CHICONE, Inertial and slow manifolds for delay differential equations, J. Diff. Eqs., 190:364–406, 2003.

[35] P. COULLET, Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems, Int. J. Bif. Chaos, 12(11):2445–2457,2002.

[36] M. F. CROWLEY AND R. J. FIELD, Electrically coupled Belousov-Zhabotisnky oscillators: a potential chaos generator, in C. Vidal and A. Pacault, editors, Nonlinear phenonema in chemical dynamics, Springer?Verlag, Berlin/New York, 1981, pp 147–153.

[37] H. DEGN, L. F. OLSEN, AND J. W. PERRAM, Bistability, oscillation, and chaos in an enzyme reaction,Annals of the New York Academy of Sciences, 316(1):623–637, 1979.

[38] W. DE MELO, AND S. VAN STRIEN, One-dimensional dynamics, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.

[39] C. A. DEL NEGRO, C. G. WILSON, R. J. BUTERA, H. RIGATTO, AND J. C. SMITH, Periodicity, mixed?mode oscillations, and quasiperiodicity in a rhythm-generating neural network, Biophysical Journal,82:206–214, 2002.

[40] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system, Chaos, 18(1):015107, 2008.

[41] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, The geometry of slow manifolds near a folded node,SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 7(4):1131 – 1162, 2008.

[42] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, The geometry of mixed-mode oscillations in the Olsen model for the perioxidase-oxidase reaction, Discr. Cont. Dyn. Sys. S, 2(4): 807 – 827, 2009.

[43] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Numerical continuation of canard orbits in slow-fast dynamical systems, Nonlinearity, 23(3): 739 – 765, 2010.

[44] A. DHOOGE, W. GOVAERTS, AND YU. A. KUZNETSOV, MatCont: A Matlab package for numerical bifurc?ation analysis of ODEs, ACM TOMS 29(2): 141 – 164, 2003. Available via http://www.matcont.ugent.be/.

[45] C. T. DICKSON, J. MAGISTRETTI, M. H. SHALISNKY, E. FRANSEN, M. E. HASSELMO, AND A. ALONSO,Properties and role of Ih in the pacing of subtreshold oscillations in entorhinal cortex layer II neurons, J. Neurophysiol., 83:2562 – 2579, 2000.

[46] C. T. DICKSON, J. MAGISTRETTI, M. H. SHALISNKY, B. HAMAM, AND A. ALONSO, Oscillatory activity in entorhinal neurons and circuits: Mechanisms and function, Ann. N.Y. Acad. Sci., 911:127 – 150, 2006.

[47] F. DIENER, AND M. DIENER, Nonstandard analysis in practice, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1995.

[48] M. DIENER, The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate, The Mathematical Intelli?gencer, 6:38 – 48, 1984.

[49] E. J. DOEDEL, Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations, in B. Krauskopf, H. M. Osinga and J. Galan-Vioque, editors, Numerical continuation methods for dynamical systems: path following and boundary value problems, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2007, pp 117 – 54.

[50] E. J. DOEDEL, R. C. PAFFENROTH, A. C. CHAMPNEYS, T. F. FAIRGRIEVE, YU. A. KUZNET?SOV, B. E. OLDEMAN, B. SANDSTEDE AND X. J. WANG, AUTO-07p: Con?tinuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations; available at http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/.

[51] E. J. DOEDEL, B. E. OLDEMAN, AND C. L. PANDO L., Bifurcation structures in a model of a CO2 laser with a fast saturable absorber, Int. J. Bifurc. Chaos, in press.

[52] S. DOI, J. INOUE, AND S. KUMAGAI, Chaotic spiking in the Hodgkin – Huxley nerve model with slow inactivation in the sodium current, J. Integr. Neurosci., 3(2):207–225, 2004.

[53] J. DROVER, J. RUBIN, J. SU, AND B. ERMENTROUT, Analysis of a canard mechanism by which excitatory synaptic coupling can synchronize neurons at low fifiring frequencies, SIAM J. Appl. Math., 65(1):69–92, 2004.

[54] J.L.A. DUBBELDAM, B. KRAUSKOPF AND D. LENSTRA, Excitability and coherence resonance in lasers with saturable absorber, Phys. Rev. E 60(6):6580–6588, 1999.

[55] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE, Canard cycles and center manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., 577, 1996.

[56] W. ECKHAUS, Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks, Lec. Notes Math., 985:449–494, 1983.

[57] M. EISWIRTH AND G. ERTL Kinetic oscillations in the catalytic CO oxidation on a Pt(110) surface, Surf. Sci., 177(1):90–100, 1986.

[58] M. EISWIRTH, K. KRISCHER, AND G. ERTL, Nonlinear dynamics in the CO-oxidation on Pt single crystal surfaces, Appl. Phys. A, 51:79–90, 1990.

[59] J. P. ENGLAND, B. KRAUSKOPF, AND H . M. OSINGA, Computing one-dimensional global manifold of Poincare maps by continuation, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 4(4):1008–1041, 2005.

[60] J. P. ENGLAND, B. KRAUSKOPF, AND H .M. OSINGA, Computing two-dimensional global invariant manifolds in slow-fast systems, Int. J. Bif. Chaos, 17(3): 805–822, 2007.

[61] I. ERCHOVA AND D. J. MCGONIGLE, Rhythms of the brain: An examination of mixed mode oscillation approaches to the analysis of neurophysiological data, Chaos, 18(1):015115, 2008.

[62] A. ERISIR, D. LAU, B. RUDY, AND C. S. LEONARD, Function of specifific K+ channels in sustained high frequency fifiring of fast-spiking interneurons, J. Neurophysiol., 82:2476–2489, 1999.

[63] B. ERMENTROUT AND M. WECHSELBERGER, Canards, clusters and synchronization in a weakly coupled interneuron model, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 8(1):253–278, 2009.

[64] V. R. FED0KINA, F. I. ATAULLAKHANOV, AND T. V. BRONNIKOVA, Computer simulations of sustained oscillations in the peroxidase-oxidase reaction, Biophysical Chemistry, 19:259–264, 1984.

[65] V. R. FED0KINA, F. I. ATAULLAKHANOV, AND T. V. BRONNIKOVA, Stimulated regimens in the peroxidase oxidase reaction, Theor. Exp. Chem., 24(2):172–178, 1988.

[66] N. FENICHEL, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flflows, Indiana University Mathematical Journal, 21:193–225, 1971.

[67] N. FENICHEL, Asymptotic stability with rate conditions, Indiana University Mathematical Journal, 23:1109– 1137, 1974.

[68] N. FENICHEL, Asymptotic stability with rate conditions II, Indiana University Mathematical Journal, 26:81– 93, 1977.

[69] N. FENICHEL, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, J. Diff. Eqs., 31:53–98, 1979.

[70] R.J. FIELD, E. KOR OS , AND R.M. NOYES, Oscillations in chemical systems II. Thorough analysis of temporal oscillations in the Ce − BrO3-malonic acid system, J. Am. Chem. Soc., 94:8649–8664, 1972.

[71] R. J. FIELD AND R. M. NOYES, Oscillations in chemical systems IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction, J. Chem. Phys., 60:1877–1884, 1974.

[72] S. J. FRASER, The steady state and equilibrium approximations: A geometrical picture, J. Chem. Phys., 88:4732–4738, 1988.

[73] S. D. FURROW, Chemical oscillators based on iodate ion and hydrogen peroxide, in R. J. Field and M. Burger, editors, Oscillations and traveling waves in chemical systems, Wiley-Interscience, 1985, pp 171–192.

[74] P. GASPARD AND G. NICOLIS, What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?, J. Stat. Phys., 31(3):499–518, 1983.

[75] P. GASPARD AND X.-J. WANG, Homoclinic orbits and mixed-mode oscillations in far-from-equilibrium systems, J. Stat. Phys., 48:151–199, 1987.

[76] T. GEEST, C. G. STEINMETZ, R. LARTER, AND L. F. OLSEN, Period-doubling bifurcations and chaos in an enzyme reaction, J. Phys. Chem., 96:5678–5680, 1992.s