

MMOs 的慢-快系统机制

Martin Wechselberger¹

我们介绍了相关的标准形式和模型系统，并就产生的 SAOs 的本质提供了精确的说明。这门学科的性质决定了其中一些分析是技术性很强的。然而，这种分析使我们能够估算某些量，这些量是可以从数值模拟和实验数据产生的，并在产生 MMOs 例子中可以测量的。具体来说，我们考虑的是 SAOs 的数量以及每个周期的振幅变化。每个局部机制的这些特性都用基本的几何概念进行了说明和讨论，并在第 4-7 节中给出了研究案例。此外，在第 3.1-3.4 节中，我们将展示在存在将轨线带回具有 SAOs 的区域的**全局回归机制**（global return mechanism）的情况下，各个局部机制如何导致 MMOs 产生的。这种全局回归机制是在模型中被发现的；参见第 3.2 节和第 4-5 节的研究案例，研究的是具有 S 形的慢流形。我们还考虑了与进出 SAOs 区域相关的邻近慢流形的轨线的几何结构。

3.1. 在折结点处的 MMOs

折结点仅仅是针对在慢时间尺度上的系统 (2.1) 的奇异极限 (2.4) 而定义的。然而，它们与 MMOs 直接相关，因为当对充分小的正值 ε ，系统 (2.1) 的轨线会穿过一个折结点处具有小振荡的区域。Wechselberger 和合作者在 [31, 214, 237] 中对折结点进行了详细的分析，而 Guckenheimer、Haiduc [88] 和 Guckenheimer [86] 则计算了在折结点附近的慢流形的交点并绘制了沿着穿过这些区域的轨线的流形图。从定理 2.3 中，我们知道折结点处的特征值之比 $0 < \mu < 1$ 是决定折结点附近动力学的一个关键量。特别是， μ 控制振动的最大数量。上述研究采用标准形式描述了折结点附近的振荡动力学。这些标准形式的两个等价形式是 (3.1) 和 (3.2)：

$$(3.1) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = -(\mu + 1)x - z \\ \dot{z} = \frac{1}{2}\mu \end{cases}$$

注意到 μ 是系统 (3.2) 的特征值之比，并且 $v \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$ 表明了系统在 (3.1) 和 (3.2) 中没有平衡点。如果把系统 (3.1) 中的 (x, y, z) 用 (u, v, w) 替换掉，并记时间变量为 τ_1 ，则通过以下的坐标变换

$$x = (1 + \mu)^{1/2}u, \quad y = (1 + \mu)v, \quad z = -(1 + \mu)^{3/2}w$$

可得到系统 (3.2)。并且对时间变量作变换 $\tau = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 + \mu}}$ 可得

$$(3.3) \quad v = \frac{\mu}{2(1 + \mu)^2} \quad \text{或} \quad \mu = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8v}}{-1 - \sqrt{1 - 8v}}$$

因此系统 (3.1) 中的次鸭解的数量会随着参数 ν 而变化: 当 ν 较小时, $\mu \approx 2\nu$, 将 x, y, z, t 再次缩放为 $x = \varepsilon^{1/2}\bar{x}, y = \varepsilon\bar{y}, z = \varepsilon^{1/2}\bar{z}, t = \varepsilon^{1/2}\bar{t}$, 并应用于系统 (3.1) 中, 为了便于记号, 把横杠去掉, 得到系统 (3.4)

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -\nu \end{cases}$$

因此, 对于不同的 ε 取值, 系统 (3.1) 的相图通过线性映射在拓扑上等价。系统 (3.4) 的标准形式描述了折结点 (这里是原点) 附近的动力学, 特征值之比 μ 与系统 (3.3) 所给的相同。从 $x > 0, y = \infty$ 的区域处过来的轨线穿过折结点区域的过程中会产生一些振荡, 这些振荡是在向 $x < 0, y = \infty$ 区域处延伸之前产生的。在这个系统中没有返回到折结点区域的轨线。我们先关注小振荡的数量。如果对于某个 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $2k + 1 < \mu^{-1} < 2k + 3$, 则在系统 (3.4) 中折结奇异点的 $O(1)$ 附近, 主强鸭解 γ_s 绕主弱鸭解 γ_w 扭转 1 次, 第 i 个次要强鸭解 $\xi_i, 1 \leq i \leq k$, 绕主弱鸭解 γ_w 扭转 $2i + 1$ 次。系统 (3.4) 对应于一个在系统 (3.1) 和 (3.2) [214, 237] 中的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域。(扭转相当于半旋转。) 在图 6 中描述了系统 (3.4) 当 $\nu = 0.025$ 时的这种扭转。注意到当 $\nu = 0.025$ 时对应的 $\mu \approx 0.0557$ 。因此, 当 $k = 8$ 时, 满足 $2k + 1 < \mu^{-1} \approx 17.953 < 2k + 3$, 所以根据定理 2.3, 存在八个次鸭解 $\xi_i, 1 \leq i \leq 8$, 以及强鸭解和弱鸭解 $\gamma_{s/w}$ 。图 6 展示了在一个三维的区域的系统 (3.4) 的吸引分支 S_ε^a 和排斥分支 S_ε^r, z 轴取在 $-\alpha$ 到 α 之间的相图, $z = \alpha$ 和 $z = -\alpha$ 的两个平面记为 Σ_α 和 $\Sigma_{-\alpha}$, 其中 $\alpha = 0.14$; 有关如何完成这些计算的详细信息, 请参见第 8 节。尽管简化的标准形式的系统 (3.4) 不再依赖于 ε , 我们仍然要了解慢流形的 ε -相关, 以便把它们从临界流形的吸引分支和排斥分支中区分开来; 此外, 吸引慢流形 S_ε^a 和排斥慢流形 S_ε^r 可以被看做是系统 (3.1) 或系统 (3.2) 的慢流形。这两个流形都是 Fenichel 流形的拓展形式, 并且它们说明了慢流形如何在临界流形的折曲线附近相交; 折曲线是 z 轴。由于标准形式系统 (3.4) 的对称性:

$$(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, -z, -t)$$

这两个慢流形 S_ε^a 和 S_ε^r 关于 y 轴旋转 90 度, 它们就是彼此的像。图 6(a) 中相交曲线为鸭轨线; 被黑色标记的是主强鸭解 γ_s (黑色) 和前三个是次鸭解 ξ_1 (橙色线), ξ_2 (红色线) 和 ξ_3 (青色线)。嵌在其中的 (b) 图展示的是 S_ε^a 和 S_ε^r 在平面 $\Sigma_m := \{z = 0\}$ 上相交的曲线, 其中包含位于原点的折结点。在平面 Σ_m 上鸭轨线被确定为交点; 只有主强鸭解 γ_s 和三个是次鸭解 $\xi_1 - \xi_3$ 被标记出来, 但是请注意, 在图的中心还有其他的互相非常接近的鸭解 (包括弱鸭解 γ_w)。

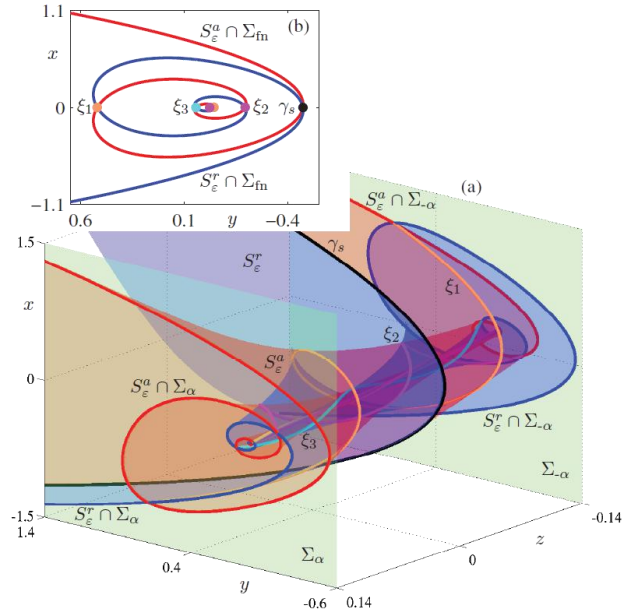


图 6: 当 $\nu = 0.025$ 时的系统 (3.4) 在折结点附近的不变慢流形。吸引慢流形 S_ϵ^a (红色) 和排斥慢流形 S_ϵ^r (蓝色) 都是 Fenichel 流形的扩展。主要强鸭状 γ_s (黑色曲线) 和三个次要的鸭解 ξ_1 (橙色线), ξ_2 (红色线) 和 ξ_3 (青色线) 是 S_ϵ^a 和 S_ϵ^r 的前四条相交曲线; 插图 (b) 显示了这些对象如何与正交于折曲线 $\{x = 0, y = 0\}$ 的截面相交的。

进入折区域的轨线被限制在由 S_ϵ^a 和 S_ϵ^r 及其两条相交曲线围住的带状区域中。相交曲线是最大鸭解, 并且这个轨线受到这两个有界鸭轨线振荡影响。为说明有多少鸭解, 以及它们究竟产生多少振荡, 我们在图 7(a) 中展示了系统 (3.4) 在 $\nu = 0.025$ 时的流形图。由于流形沿着 S_ϵ^a 强收缩, 对于沿 S_ϵ^r 不延伸的轨迹, 穿过折区域的流形图沿一个方向强收缩。因此, 流形图几乎是一维的, 并且可以用一些始于临界流形且远离折曲线的轨线来近似。图 7(a) 所示流形图是通过线段 $\{x = 20, y = x^2 = 400, -3.25 \leq z \leq -0.75\}$ 上的 500 个等间隔的初始值分别到平面 $x = 10$ 进行积分而获得; 所绘制的是最终值相对于初始值的 z -坐标。在这个流形图中可以看到不连续性的十个片段。这些不连续的分段标记在线段 $\{x = 20, y = x^2 = 400, -3.25 \leq z \leq -0.75\}$ 的扇区上, 这些扇区对应于不断增长的 SAOs; 实际上, 每个分段对应于慢流形的吸引分支 S_ϵ^a 上的二维的扇区 I_i , $0 \leq i \leq 9$ 。图 7(a) 中右侧的外部扇区 I_0 在左侧由主强鸭解 γ_s 界定; 扇区 I_1 由主强鸭解 γ_s 和第一个最大次鸭解 ξ_1 共同界定; 扇区 I_i ($i = 2, \dots, 8$) 由最大次鸭轨线 ξ_{i-1} 和 ξ_i 界定, 最后一个 (左外部) 扇区 I_9 在右边由 ξ_8 界定。在主强鸭解 γ_s 和最大次鸭解 ξ_i 的一侧, $0 \leq i \leq 8$, 轨线沿着排斥慢流形 S_ϵ^r , 然后随着 x 值的减小跳跃。在 γ_s 和 ξ_i 的另一侧, 轨线跳回到吸引慢流形, 并在流向 $y = \infty$ 之前, 通过折结点区域再进行一次振荡。图 7 中的四个图 (b1)–(b4) 展示了四条轨线投射到 (x, y) 平面上的部分; 它们的初始值是 $(x, y, z) = (200, 400, z_{in})$, z_{in} 是图 (a) 中所标记部分的 z 轴对应坐标, 即 (b1)–(b4) 分别对应 $z_{in} = -1.25$, $z_{in} = -1.5$, $z_{in} = -1.75$ 及 $z_{in} = -2.25$ 。子图 (b1) 中的轨线选自扇区 I_2 , 由 ξ_1 和 ξ_2 界定; 该轨迹产生 2 次振荡。在图 (b2) 中的轨线来自扇区 I_5 , 并且实际上它产生 5 个振荡。图 (b3) 和 (b4) 中的另外两条轨线分别产生 7 次和 9 次振荡, 但是在这些振荡中, 有一些因为太小而不可见。

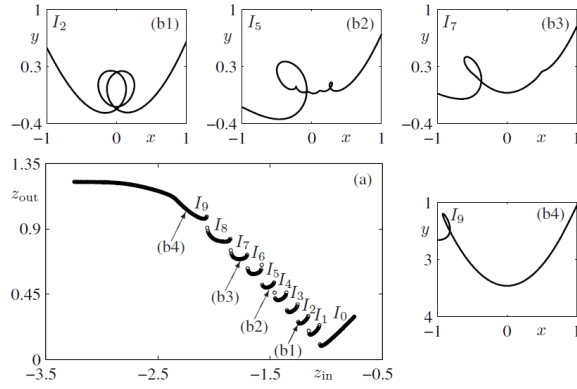


图 7: 当 $\nu = 0.025$ 时的系统 (3.4) 的旋转扇区数目的数值研究。子图 (a) 通过绘制 z -坐标 Z_{out} 第一次回归到具有等间隔初始值为 $(x, y, z) = (20, 400, Z_{in})$ 的 500 条轨线在截面 $x = -10$ 的图, 其中 $-3.25 \leq Z_{in} \leq -0.75$ 。子图 (b1) - (b4) 显示了投影到 (x, y) -平面上的四个轨线, 这些轨线对应于子图 (c) 中标记的点, 其中面板子图 (b1) 中 $Z_{in} = -1.25$, 子图 (b2) 中 $Z_{in} = -1.5$, 子图 (b3) 中 $Z_{in} = -1.75$, 子图 (b4) 中 $Z_{in} = -2.25$ 。

图 7 中的扭转扇区的实际宽度非常接近, 导致与 ε 相关的伸缩常会获得系统 (3.4)。当在系统 (3.1) 和系统 (3.2) 中的方程依赖于 ε 时, 扇区的宽度也会依赖于 ε 。事实上, 除了最大扭转对应的扇区外, 所有扇区宽度都非常小, 最大扭转对应的扇区被 ξ_k 和主弱鸭解所界定。对于产生振荡的旋转扇区宽度的渐近分析, 系统 (3.2) 更方便些, 因为去奇异化的慢流的特征值是 $-\mu$ 和 -1 。Brons, Krupa 和 Wechselberger[31]发现以下结果。

定理 3.1 (旋转扇区的宽度) 考虑系统 (2.14), 假设该系统有一个折结奇异点。在距离折曲线 $O(1)$ 处, 所有次鸭解都位于主强鸭解的 $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$ 邻域内。因此旋转扇区的宽度 I_i ($1 \leq i \leq k$) 为 $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$ 且扇区 I_{k+1} 的宽度是 $O(1)$ 。

注意, 当 $\mu \rightarrow 0$ (折鞍点极限) 时, 旋转扇区的数目会无限增加, 并且它们的宽度上限减小到 $O(\varepsilon^{1/2})$ 。

3.1.1. 具有全局回归机制的折结点

全局回归机制可以保证轨线再次回到到折结点漏斗, 从而产生 MMO。在这种情况下, 我们产生一条辅助轨线, 如图 8 所示的那样。从折结点开始, 随着快流形, 直到它返回漏斗中, 然后流形再回到折结点。我们把流形 (全局回归点) 到奇异强鸭解 $\tilde{\gamma}_s$ 的距离记为 δ , 这个距离是在距离折曲线 $O(1)$ 距离的横截面上测量的, 在 (折点处) 辅助轨线返回到漏斗。在满足一定的技术条件下, 1^s 模式的 MMO 就形成了, 其中 SAOs 的数目 s 可以根据定理 3.1 预测出来; 这个定理也表明了辅助轨线最有可能通过最大旋转的扇区 I_{k+1} , 这里的 k 是由特征值比 μ 所决定的。综上所述, 我们得到了以下结果。

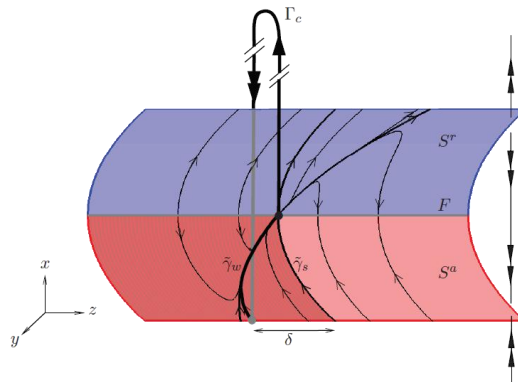


图 8: 产生 MMOs 的辅助周期轨线 Γ_c 的示意图, 该 MMOs 具有由折结点奇异性产生的 SAOs。辅助周期轨线 Γ_c 在与弱奇异鸭解 $\tilde{\gamma}_w$ 相关的最大旋转扇区中沿着临界流形 (red) 的吸引分支 S^a (red) 靠近折结点。当轨线到达折结点 (黑点) 时, 它沿着一层跳跃并继续进行全局回归。

定理 3.2 (泛型特征 1^{s+1} 的 MMOs [31]) 考虑系统 (2.14) 满足以下列假设:

(A0) 假设 $0 < \varepsilon \ll 1$, 并且充分小, $\varepsilon^{1/2} \ll \mu$, 对于 $k \in N$, 有 $2k + 1 < \mu^{-1} < 2k + 3$ 。

(A1) 临界流形 S 是 (局部) 一个折曲面。

(A2) 相应的简化问题具有折结奇异点。

(A3) 存在一个辅助周期轨线 (如图 8 构建的那样), 它是由层界问题的快纤维组成, 是一个全局回归段的一部分, 他也是从距离奇异强鸭解 $\tilde{\gamma}_s$ 为 δ 处开始的漏斗内的吸引流行 S^a 的一部分。(在到折曲线 F 距离 $O(1)$ 处测量的)。

(A4) 假设存在一个适当的横截面。则存在一个稳定的 1^{k+1} 特征的 MMO。

(A4) 中所提到的横截面假设在一般情况下难以确切的表述。在一个 S 形流形的环境下, 它涉及到两个折曲线在吸引慢流形相对分支上的投影, 并且这些流形沿这些分支, 关于这一点可以参考文献 [31]。

定理 3.2 不仅要求对充分小的 ε 满足 $0 < \varepsilon \ll 1$, 而且还要求 $\mu \gg \varepsilon^{1/2}$ ($0 < \mu < 1$)。然而, ε 在应用中通常为 $O(10^{-2})$ 量级的, 为了该定理得以应用, μ 必须接近 1。因此, 这种最大 MMO 特征在实际应用中很少见到。此外, 具有特征 1^{k+1} 的 MMO 的 SAOs 往往太小, 不容易看到。

图 7 说明当轨线接近折结点时 (靠近强鸭解的折结点), 其中的 SAOs 的振幅是很大的, 并且是位于 I_i 之间的, 其中 $i \leq k$ 。由定理 3.1 可知, $i \leq k$ 的扇区 I_i 的最大宽度上界由 $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$ ($\mu < 1/3$) 所界定。当 δ 为 $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$ 时, 实际上可以找到伴有 $i \leq k$ 的 SAO 的稳定的 MMO, 关于这一点有下面的定理 [31]。

定理 3.3 (具有特征 1^i 的稳定的 MMOs) 假设系统 (2.14) 满足定理 3.2 的假设条件

(A0)-(A3), 并还满足假设条件 (A5):

(A5) 当 $\delta = 0$ 时, 全局回归点在奇异强鸭解 $\tilde{\gamma}_s$ 上, 并且当 $\delta \neq 0$ 时, 回归点会以一定的速度 (非零) 穿过奇异强鸭解 $\tilde{\gamma}_s$ 。

假设 $\delta = O(\varepsilon^{(1-\mu)/2}) > 0$ 。若充分小的 ε 满足 $0 < \varepsilon \ll 1$, $k \in N$, 有 $2k + 1 < \mu^{-1} < 2k + 3$, 则对于每一个 i , $1 \leq i \leq k$, 存在子扇区 $\tilde{I}_i \subset I_i$, 其宽度为 $O(\varepsilon^{(1-\mu)/2})$, 此宽度对应的距离区间为 (δ_i^-, δ_i^+) , 如果 $\delta \in (\delta_i^-, \delta_i^+)$, 则存在一个具有特征 1^i 的稳定的 MMOs。

定理 3.3 指出, 当 δ 增加时 (假设 μ 在这种参数变化中保持不变), 我们应该会观察到一系列特征 1^i 的稳定的 MMO, 相应的 SAOs 越多。在从特征 1^i 到特征 1^{i+1} 的 MMO 的转换中, 即在区间 (δ_i^-, δ_i^+) 和区间 $(\delta_{i+1}^-, \delta_{i+1}^+)$ 之间的区域中, 我们期望发现更复杂的类型, 它们通常是特征 1^i 和特征 1^{i+1} 的混合。从几何上讲, 当将图 7(a) 的流形图向上或向下移动时, 会筛选出不同的稳定的 MMOs; 由于一般 ε -相关的系统的旋转扇区 1^{k+1} 的宽度比其他扇区大得多, 因此当参数 δ 引起变化时, 应该期望通过对扇区 I_i ($i \leq k$) 的转换会非常快地。

如果 $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$, 即假设条件 (A0) 不成立, 那么只要全局回归点落在漏斗区域内, $\delta = O(1)$ 时, 我们仍然期望会有特征 1^{k+1} 的稳定的 MMO 产生; 注意到, $k = O(1/\varepsilon^{1/2})$, 并且这种 MMO 的 SAOs 的振幅将再次变小。如果 $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$ 且 $\delta = O(\varepsilon^{1/2})$, 则产生含有较大 SAO 的混合 MMO 的可能性更大。例如, 在第 4 部分中图 20 展示了在 Koper 模型中特征 $1^2 1^3$ 型的 MMO。在这个 MMO, 全局回归非常接近次最大鸭解 ξ_2 , 首先稍微向左 (进入具有两个 SAOs 的旋转扇区 I_2), 然后稍微向右 (进入具有三个 SAO 的旋转扇区 I_3), 就会得到这个特征的 MMO。

迄今为止所有的理论没有涵盖折结点附近的所有可能的动力学。如果高阶项包含在标准形式 (3.1) - (3.2) 式中, 则当 $\mu = O(\varepsilon^{1/2})$ 或更小时, 在折结点的 $O(\varepsilon^{1/2})$ 邻域中可能出现平衡点。这一观察激发了我们对三维奇异 Hopf 分岔的研究。

3.2. 奇异 Hopf 分岔导致的 MMOs

慢-快系统 (2.1) 的平衡点总是满足 $f(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0$; 一般地, 它们位于某个区域中, 该区域与临界流形 S 相关, 是法向双曲的区域。然而, 慢-快系统的一般单参数族中, 平衡点可以跨越 S 的折。当这种情况发生时, 在平衡点跨越折曲线处的折奇异点是慢-快系统的实际平衡点。在具有两个慢变量的广义向量场中, 由此产生的折奇异点是折鞍点, 该折鞍点正好存在于平衡点跨越折曲线处的特定参数值上, 它被称为 II 型折鞍点。这与 I 型的折鞍点是有区别的, I 型的仅仅是指简化流形的鞍点分支, 这就意味着它不涉及全系统的 (真正) 平衡点。这种区别是因为我们在折鞍点和折结点的例子中观察到简化系统的奇异点不必是全慢-快系统的平衡点的投影。然而, II 型折鞍点是整个系统的实际平衡点。重要的是这意味着, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 系统有一个奇异 Hopf 分岔, 它一般发生在参数空间中距 II 型折鞍点分岔 $O(\varepsilon)$ 处。

为了获得奇异 Hopf 分岔的标准型, 根据折结点的标准型 (3.1) 式, 并加入高阶项, 从而获得 (3.5):

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v - ax - by - cz \end{cases}$$

类似于系统 (3.1) 那样, 对 (3.5) 式中的变量作如下变换:

$$x = \varepsilon^{1/2} \bar{x}, \quad y = \varepsilon \bar{y}, \quad z = \varepsilon^{1/2} \bar{z}, \quad t = \varepsilon^{1/2} \bar{t}$$

系统 (3.5) 变为如下形式:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \bar{x}' = \bar{y} - x^2 \\ \bar{y}' = \bar{z} - \bar{x} \\ \bar{z}' = -v - \varepsilon^{1/2} a \bar{x} - \varepsilon b \bar{y} - \varepsilon^{1/2} c \bar{z} \end{cases}$$

这个缩放的向量场提供了一个折奇异点邻域的 $O(\varepsilon^{1/2})$ 的缩放, 在这个邻域里期望会有 SAO 发生。缩放从第一个方程中去除了 ε , 而第三个方程的系数 a 、 b 和 c 变得与 ε 相关; v 保持不变。注意到当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, \bar{y} 的系数趋向于 0 的速度比 \bar{x} 和 \bar{z} 的系数趋 0 的速度要快。这个特性使得慢速系统的标准型的定义有些问题: 状态空间变量和奇异摄动参数 ε 的缩放相互影响。这些与 ε 相关的尺度在折点和折奇异点的 “blow-up” 分析中起着重要作用。

与折结点的标准型 (3.1) 式相反, 系统 (3.6) 对于所有 v 值都具有平衡点。如果 $v = O(1)$, 则这些平衡点远离原点, 其坐标为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 量级或更大。由于要研究折奇异点附近的动力学, 系统 (3.6) 中的 ε 相关项在这个参数域中几乎不起作用, 该系统可以看成是折结点标准型 (3.4) 式的微摄动后得到的; 因此, 如果 $v = O(1)$, 则定理 3.2 和 3.3 是适用的。另一方面, 如果 $v = 0$ ($\varepsilon^{1/2}$) 或更小, 则存在一个平衡点位于相空间的 $O(1)$ 区域内。这个平衡点是由系数 a 和 c 所决定, 并且在折奇异点附近的局部动力学中起着重要作用 [87, 144]。特别地, 对于 $v = O(\varepsilon)$ [87], 平衡点经历奇异 Hopf 分岔。因此, 对于参数值 $v = O(\varepsilon^{1/2})$ 或更小, 系统 (3.6) 中第三个方程的高阶项是至关重要的。

因此，经历奇异 Hopf 分岔的系统的最合适标准型是什么？（几个组）已经导出了系统 (3.5)，但是由于在缩放后 ε 具有较高的阶数，所以使（该项）下降。然而，该项出现在系统 (3.5) Hopf 分岔的第一 Lyapunov 系数 ε 中的最低阶项的公式中，因此如果我们希望确定奇异 Hopf 分岔的完全展开[87]，则该项必须保留。

发生在奇异 Hopf 分岔附近的 MMOs 具有与通过折结点机制生成的 MMOs 稍微不同的特性。Guckenheimer 和 Willms[95]观察到亚临界（普通）Hopf 分岔可能导致参数空间的一大片区域汇集到具有不稳定的复特征值的鞍平衡点的小邻域中。在轨线接近平衡点后，SAOs 的量级随着轨线螺旋离开平衡点而增加。类似的 MMOs 有可能穿过奇异 Hopf 分岔附近，此时平衡点是一个鞍焦点，吸引 Fenichel 流形上的轨线汇集进入靠近平衡点的一维稳定流形的区域，SAOs 随着轨迹螺旋离开平衡点（鞍焦点）而发生。我们在此回顾我们对奇异 Hopf 分岔和附近经过的 MMOs 的理解，这仍然是不完整。

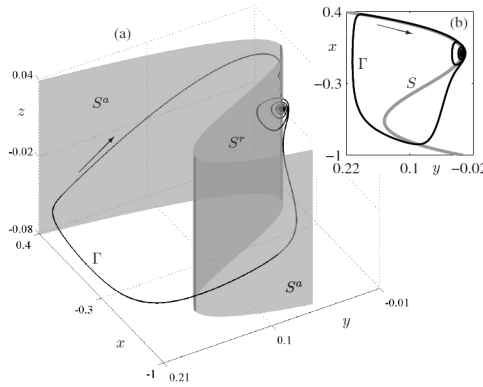


图 9: 参数为 $(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.0072168, -0.3872, -0.3251, 1.17, 0.01)$ 的系统 (3.7) 的 MMO 周期轨线 (黑曲线) 的相图。临界流形 S (灰色) 是在 $x = 0$ 和 $x = -\frac{2}{3}$ 处有折的 S 形表面。轨线由两个靠近 S 吸引分支的慢段和两个快段组成，其中 SAOs 位于靠近平衡 p 的区域，而 S 排斥分支 S^r 正好经过 $x = 0$ 处的折。子图 (a) 显示了三维视图，子图 (b) 是在 (x, y) 平面上的投影。

因为没有全局回归机制，标准型 (3.5) 式不能产生 MMOs；在该系统中，轨线在有限时间内离开平衡点和折曲线流到无限大的区域。这种特性可以通过向使临界流形为 S 形的标准型中添加三次项来改变，类似于 Van der Pol 方程：

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x^2 - x^3 \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = -v - ax - by - cz \end{cases}$$

对奇异 Hopf 分岔的标准型的这种修改作为 MMO 的“简化”模型导出。如图 9 所示，系统 (3.7) 在原点附近只引入一个小摄动，但是 S 形临界流形创建了离开原点附近的轨线可能返回的可能性。图 9 展示了在具有参数 v 的系统 (3.7) 中 MMOs 总体结构的一个例子，也就是说，其中的参数

$$(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.0072168, -0.3872, -0.3251, 1.17, 0.01)$$

注意到 $v = O(\varepsilon)$ 。 S 形临界流形 S 是图 9(a) 中的灰色线；(b) 中展示的是图 9(a) 的顶视图。流形 S 具有两条折曲线，一条在 $x = 0$ 处，一条在 $x = -\frac{2}{3}$ 处，它们将 S 分解为一个排斥分支和两个吸引片分支。对于我们的参数选择，在排斥片分支上存在靠近原点的鞍焦点平衡点 p （该原点是折结奇异点）。平衡点 p 具有一对不稳定共轭复特征值。图 9 中的黑色曲线是一个稳定的 MMO 周期轨线，记为 Γ ，它与平衡点 p 相互作用如下：从 $x = 0$ 处的折刚好经过，即在原点附近且 $x < 0$ 的区域，轨线 Γ 沿着其二维不稳定流形从平衡点 p 螺旋形离开，并反复与临界流形 S 的排斥分支 S^r 相交。当轨线 Γ 与排斥慢流形（未示出）相交时，它便跳到 $x < -\frac{2}{3}$ 的临界流形 S 的吸引分支 S^a 上。然后，轨线 Γ 跟随这个分支到达 $x = -\frac{2}{3}$ 的折

处，之后它跳到 $x > 0$ 的临界流形 S 的排斥分支 S^r 处。然后，轨线 Γ 返回到平衡点 p 附近，并重复这个周期运动。

图 9 所示的 MMO 周期轨线 Γ 只是系统 (3.7) 中的多种复杂动力学类型之一。对于系统 (3.7) 超临界 Hopf 分岔产生的小振幅稳定周期轨道，存在 (参数区)。这些周期轨线后续分岔可能是倍周期分岔或环面分岔 [87]。倍周期 (级联) 会产生可能与混沌 MMOs 相关的小振幅混沌不变集。例如，图 10 显示了系统 (3.7) 在参数 $(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.004564, -0.2317, 0.2053, 1.17, 0.01)$ 时的混沌 MMO 轨线，(该轨线) 是由奇异 Hopf 分岔产生的周期轨线的倍周期 (级联) 产生的。由于时间序列的非周期性，它看起来是混沌的，如图 10(a) 中的 x 坐标所示。在图 (b) 上显示了 (x, y) 平面上的二维投影。注意到这个轨线既不接近平衡点 p 也不接近原点的折奇异点。当 v 从图 10 中使用的值 (其中 v 值已经是 $O(\varepsilon)$ 量级) 减小时，轨线的大振幅周期变得不那么频繁并且很快消失，导致小振幅混沌 (吸引子)。在第 4 节讨论了系统 (3.7) 的一个重新缩放的子族，给出了复杂动力学的进一步例子以及与该系统相关的 MMOs 的组织方式的一些分析。

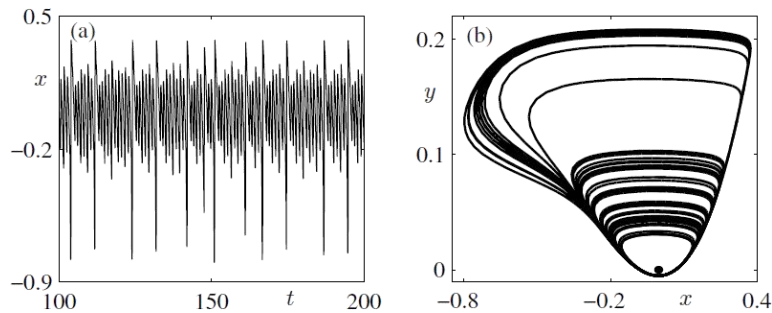


图 10: 参数为 $(v, a, b, c, \varepsilon) = (0.004564, -0.2317, 0.2053, 1.17, 0.01)$ 的系统 (3.7) 的混沌 MMO 轨线图。子图 (a) 显示从 $t = 100$ 到 $t = 200$ 的轨线的 x 坐标的时间序列，子图 (b) 显示轨线在 (x, y) -平面上的投影。

参考文献

- [1] C. D. ACKER, N. KOPELL, AND J. A. WHITE, Synchronization of strongly coupled excitatory neurons: Relating network behaviour to biophysics, *J. Comput. Neurosci.*, 15:71 - 90, 2003.
- [2] B. D. AGUDA, AND B. L. CLARKE, Bistability in chemical reaction networks: theory and application to the peroxidase-oxidase reaction, *J. Chem. Phys.*, 87(6):3461 - 3470, 1987.
- [3] B. D. AGUDA, AND R. LARTER, Periodic-chaotic sequences in a detailed mechanism of the peroxidase-oxidase reaction, *J. Am. Chem. Soc.*, 113:7913 - 7916, 1991.
- [4] B. D. AGUDA, R. LARTER, AND B. L. CLARKE, Dynamic elements of mixed-mode oscillations and chaos in a peroxidase-oxidase network, *J. Chem. Phys.*, 90(8):4168 - 4175, 1989.
- [5] F. M. DE AGUIAR, S. ROSENBLATT, A. AZEVEDO, AND S. M. REZENDE, Observation of mixed-mode oscillations in spin-wave experiments, *J. Appl. Phys.*, 85(8):5086 - 5087, 1999.
- [6] F. N. ALBAHADILY, J. RINGLAND, AND M. SCHELL, Mixed-mode oscillations in an electrochemical system. I. A Farey sequence which does not occur on a torus, *J. Chem. Phys.*, 90:813 - 821, 1989.

- [7] K. AL-NAIMEE, F. MARINO, M. CISZAK, R. MEUCCI, AND F. T. ARECCHI, Chaotic spiking and incomplete homoclinic scenarios in semiconductor lasers with optoelectric feedback, *New Journal of Physics*.
- [8] F. ARGOUL, A. ARNEODO, P. RICHETTI, AND J. C. ROUX, From quasiperiodicity to chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction. I. Experiment, *J. Chem. Phys.*, 86(6):3325 – 3338, 1987.
- [9] F. ARGOUL AND J. C. ROUX, Quasiperiodicity in chemistry: An experimental path in the neighbourhood of a codimension-two bifurcation, *Phys. Lett. A*, 108(8):426 – 430, 1985.
- [10] V. I. ARNOLD (ED.), *Encyclopedia of mathematical sciences: Dynamical systems V*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1994.
- [11] N. BABA AND K. KRISCHER, Mixed-mode oscillations and cluster patterns in an electrochemical relaxation oscillator under galvanostatic control, *Chaos*, 18(1):015103, 2008.
- [12] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations I, *SIAM J. Appl. Math.*, 46(5):721 – 739, 1986.
- [13] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations II, *SIAM J. Appl. Math.*, 52(6):1651 – 1664, 1992.
- [14] S. M. BAER, T. ERNEUX, AND J. RINZEL, The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance, *SIAM J. Appl. Math.* 49(1):55 – 71, 1989.
- [15] D. BAKES, L. SCHREIBEROVA, I. SCHREIBER, AND M. J. B. HAUSER, Mixed-mode oscillations in a homogeneous photo-oscillatory chemical reaction system, *Chaos*, 18(1):015102, 2008.
- [16] D. BARKLEY, Slow manifolds and mixed-mode oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *J. Chem. Phys.*, 89(9):5547 – 5559, 1988.
- [17] D. BARKLEY, Linear stability analysis of rotating spiral waves in excitable media, *Phys. Rev. Lett.*, 68(13):2090 – 2093, 1992.
- [18] B. P. BELOUSOV, A periodically acting reaction and its mechanism, in *Collection of short papers on Radiation Medicine for 1958*, Med. Publ., Moscow, 1959, pp 145 – 147.
- [19] E. BENOÏT, Systems lent-rapides dans R^3 et leurs canards, in *Third Schnepfenried geometry conference*, volume 2, pp 159 – 191. Soc. Math. France, 1982.
- [20] E. BENOÏT, Enlacements de canards, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 300(8):225 – 230, 1985.
- [21] E. BENOÏT, Canards et enlacements, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 72:63 – 91, 1990.
- [22] E. BENOÏT, J.-L. CALLOT, F. DIENER, AND M. DIENER, Chasse au canards, *Collect. Math.*, 31:37 – 119.
- [23] E. BENOÏT, AND C. LOBRY, Les canards de R^3 , *C.R. Acad. Sc. Paris*, 294:483–488, 1982.
- [24] N. BERGLUND AND B. GENTZ, *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems: a sample-paths approach*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2005.
- [25] N. BERGLUND AND B. GENTZ, Stochastic dynamic bifurcations and excitability, in C. Laing and G. Lord, editors, *Stochastic methods in neuroscience*, Oxford University Press, 2008, pp 65–93.
- [26] J. BOISSONADE AND P. DEKEPPER, Transitions from bistability to limit cycle oscillations. Theoretical analysis and experimental evidence in an open chemical system, *J. Phys. Chem.*, 84:501–506, 1980.
- [27] B. BRAAKSMA, Singular Hopf bifurcation in systems with fast and slow variables, *J. Nonlinear Science*, 8(5):457–490, 1998.

- [28] T.S. BRIGGS, AND W.C. RAUSCHER, An oscillating iodine clock, *J. Chem. Educ.*, 50:496, 1973.
- [29] T. V. BRONNIKOVA, V. R. FED'KINA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Period-doubling bifurcations and chaos in a detailed model of the peroxidase-oxidase reaction, *J. Phys. Chem.*, 99(23):9309–9312, 1995.
- [30] T. V. BRONNIKOVA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Nonlinear dynamics of the peroxidase-oxidase reaction. I. Bistability and bursting oscillations at low enzyme concentrations, *J. Phys. Chem. B*, 105:310–321, 2001.
- [31] M. BRUNNS, M. KRUPA, AND M. WECHSELBERGER, Mixed mode oscillations due to the generalized canard phenomenon, *Fields Institute Communications*, 49:39–63, 2006.
- [32] S. A. CAMPBELL, E. STONE, AND T. ERNEUX, Delay induced canards in a model of high speed machining, *Dynamical Systems*, 24(3):373–392, 2009.
- [33] J. CARR, *Applications of centre manifold theory*. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.
- [34] C. CHICONE, Inertial and slow manifolds for delay differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 190:364–406, 2003.
- [35] P. COULLET, Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems, *Int. J. Bif. Chaos*, 12(11):2445–2457, 2002.
- [36] M. F. CROWLEY AND R. J. FIELD, Electrically coupled Belousov-Zhabotinsky oscillators: a potential chaos generator, in C. Vidal and A. Pacault, editors, *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981, pp 147–153.
- [37] H. DEGN, L. F. OLSEN, AND J. W. PERRAM, Bistability, oscillation, and chaos in an enzyme reaction, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 316(1):623–637, 1979.
- [38] W. DE MELO, AND S. VAN STRIEN, *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.
- [39] C. A. DEL NEGRO, C. G. WILSON, R. J. BUTERA, H. RIGATTO, AND J. C. SMITH, Periodicity, mixed-mode oscillations, and quasiperiodicity in a rhythm-generating neural network, *Biophysical Journal*, 82:206–214, 2002.
- [40] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system, *Chaos*, 18(1):015107, 2008.
- [41] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, The geometry of slow manifolds near a folded node, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(4):1131 – 1162, 2008.
- [42] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, The geometry of mixed-mode oscillations in the Olsen model for the peroxidase-oxidase reaction, *Discr. Cont. Dyn. Sys. S*, 2(4): 807 – 827, 2009.
- [43] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Numerical continuation of canard orbits in slow-fast dynamical systems, *Nonlinearity*, 23(3): 739 – 765, 2010.
- [44] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS, AND YU. A. KUZNETSOV, *MatCont: A Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs*, *ACM TOMS* 29(2): 141 – 164, 2003. Available via <http://www.matcont.ugent.be/>.
- [45] C. T. DICKSON, J. MAGISTRETTI, M. H. SHALISNKY, E. FRANSEN, M. E. HASSELMO, AND A. ALONSO, Properties and role of Ih in the pacing of subthreshold oscillations in entorhinal cortex layer II neurons, *J. Neurophysiol.*, 83:2562 – 2579, 2000.
- [46] C. T. DICKSON, J. MAGISTRETTI, M. H. SHALISNKY, B. HAMAM, AND A. ALONSO, Oscillatory activity in entorhinal neurons and circuits: Mechanisms and function, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 911:127 – 150, 2006.

- [47] F. DIENER, AND M. DIENER, *Nonstandard analysis in practice*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1995.
- [48] M. DIENER, The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate, *The Mathematical Intelligencer*, 6:38 – 48, 1984.
- [49] E. J. DOEDEL, Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations, in B. Krauskopf, H. M. Osinga and J. Galan-Vioque, editors, *Numerical continuation methods for dynamical systems: path following and boundary value problems*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2007, pp 117 – 54.
- [50] E. J. DOEDEL, R. C. PAFFENROTH, A. C. CHAMPNEYS, T. F. FAIRGRIEVE, YU. A. KUZNETSOV, B. E. OLDEMAN, B. SANDSTEDTE AND X. J. WANG, AUTO-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations; available at <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>.
- [51] E. J. DOEDEL, B. E. OLDEMAN, AND C. L. PANDO L., Bifurcation structures in a model of a CO₂ laser with a fast saturable absorber, *Int. J. Bifurc. Chaos*, in press.
- [52] S. DOI, J. INOUE, AND S. KUMAGAI, Chaotic spiking in the Hodgkin – Huxley nerve model with slow inactivation in the sodium current, *J. Integr. Neurosci.*, 3(2):207–225, 2004.
- [53] J. DROVER, J. RUBIN, J. SU, AND B. ERMENTROUT, Analysis of a canard mechanism by which excitatory synaptic coupling can synchronize neurons at low firing frequencies, *SIAM J. Appl. Math.*, 65(1):69–92, 2004.
- [54] J.L.A. DUBBELDAM, B. KRAUSKOPF AND D. LENSTRA, Excitability and coherence resonance in lasers with saturable absorber, *Phys. Rev. E* 60(6):6580–6588, 1999.
- [55] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE, Canard cycles and center manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 577, 1996.
- [56] W. ECKHAUS, Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks, *Lec. Notes Math.*, 985:449–494, 1983.
- [57] M. EISWIRTH AND G. ERTL Kinetic oscillations in the catalytic CO oxidation on a Pt(110) surface, *Surf. Sci.*, 177(1):90–100, 1986.
- [58] M. EISWIRTH, K. KRISCHER, AND G. ERTL, Nonlinear dynamics in the CO-oxidation on Pt single crystal surfaces, *Appl. Phys. A*, 51:79–90, 1990.
- [59] J. P. ENGLAND, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Computing one-dimensional global manifold of Poincare maps by continuation, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 4(4):1008–1041, 2005.
- [60] J. P. ENGLAND, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Computing two-dimensional global invariant manifolds in slow-fast systems, *Int. J. Bif. Chaos*, 17(3): 805–822, 2007.
- [61] I. ERCHOVA AND D. J. MCGONIGLE, Rhythms of the brain: An examination of mixed mode oscillation approaches to the analysis of neurophysiological data, *Chaos*, 18(1):015115, 2008.
- [62] A. ERISIR, D. LAU, B. RUDY, AND C. S. LEONARD, Function of specific K⁺ channels in sustained high frequency firing of fast-spiking interneurons, *J. Neurophysiol.*, 82:2476–2489, 1999.
- [63] B. ERMENTROUT AND M. WECHSELBERGER, Canards, clusters and synchronization in a weakly coupled interneuron model, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 8(1):253–278, 2009.
- [64] V. R. FEDOKINA, F. I. ATAULLAKHANOV, AND T. V. BRONNIKOVA, Computer simulations of sustained oscillations in the peroxidase-oxidase reaction, *Biophysical Chemistry*, 19:259–264, 1984.

- [65] V. R. FEDOKINA, F. I. ATAULLAKHANOV, AND T. V. BRONNIKOVA, Stimulated regimens in the peroxidase oxidase reaction, *Theor. Exp. Chem.*, 24(2):172–178, 1988.
- [66] N. FENICHEL, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana University Mathematical Journal*, 21:193–225, 1971.
- [67] N. FENICHEL, Asymptotic stability with rate conditions, *Indiana University Mathematical Journal*, 23:1109–1137, 1974.
- [68] N. FENICHEL, Asymptotic stability with rate conditions II, *Indiana University Mathematical Journal*, 26:81–93, 1977.
- [69] N. FENICHEL, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 31:53–98, 1979.
- [70] R.J. FIELD, E. KOROS, AND R.M. NOYES, Oscillations in chemical systems II. Thorough analysis of temporal oscillations in the $Ce - BrO_3$ -malonic acid system, *J. Am. Chem. Soc.*, 94:8649–8664, 1972.