

慢-快系统的几何奇异摄动理论

Martin Wechselberger¹

1. 引言

动力系统理论主要是用来研究微分方程解的定性性质。该理论通过研究平衡点和周期轨线的分岔，从而确定这些方程的极限集是如何依赖于系统参数的。MMOs 可能是周期性的轨线，但我们会提出一些已然超越经典动力系统理论可以来论证的问题。具体来说，人们试图把 MMOs 分成 SAOs 和 LAOs 两个时段来分析，从而确定这两个时段的振荡在该系统的状态空间中所表现出的几何特征，并确定它们之间的转换方式。由于这两种振荡转换的速度比这两种振荡本身的振荡速度快得多，使得我们不得不寻求具有多个时间尺度的 MMOs 模型。

早期对模型系统中的 MMOs 的研究通常仅限于将 MMO 特征编排的方式作为参数进行分类，分类结果是多种多样的。Barkley 在参考文献[16]中提出了一个例外：他评估了多时间尺度模型对 MMOs 所产生的作用，他所评估的 MMOs 产生的行为已被 Hudson, Hart 和 Marinko 观察到，并在参考文献[106]中有所提及。他把从一些实验中产生的 MMOs 和在参考文献[207]中被 Showalter, Noyes 和 Bar-Eli 所提出的刻画 BZ 反应的七维模型与三维的多时间尺度模型作了比较。Barkley 无法给出在较大的模型中能够体现 MMOs 定性特征的三维模型，但这种具有人们所渴求性质的模型随后慢慢被建立起来。本文讨论了其中两个模型，尤其剖析了 Koper 在参考文献[123]中提出并研究的模型。Koper 模型类似于一种标准奇异 Hopf 分岔（singular Hopf bifurcation），一个余维-1 的分岔产生于具有两个慢变量和一个快变量的动力系统中。我们所关注的焦点是 MMOs 的 SAOs 是在一般的多时间尺度系统中局部现象产生的副产物。类似于在分岔理论中的标准形式那样，以其最简单的表现形式来理解 MMOs 的多时间尺度的动力学学会引起对更复杂系统中的 MMOs 的特性的深入理解。我们再次研究了 Showalter, Noyes 和 Bar-Eli 的模型，从而强调多时间尺度在研究 MMOs 中的作用。

2. 几何奇异摄动理论

我们考虑下面的一个慢-快向量场，它的动力系统方程形式如下：

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau} = g(x, y, \lambda, \varepsilon) \end{cases}$$

其 $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 是状态空间变量， $\lambda \in \mathbb{R}^p$ 是该系统的参数，并且 ε 是一个远小于 1 的正参数，表示不同时间尺度的比例。函数 $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，假设它们足够光滑，即无穷次可微（属于 C^∞ ），变量 x 是快变量，变量 y 是慢变量。系统 (2.1) 可以通过把慢时间尺度 τ 转换为快时间尺度 $t = \tau/\varepsilon$ 重新缩放为如下形式：

$$(2.2) \quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda, \varepsilon) \\ y' = \frac{dy}{dt} = \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon) \end{cases}$$

已有几种观点被采取用于研究慢-快系统，第一种观点是使用匹配渐近展开等技术进行渐近分析。第二种观点是几何奇异摄动理论 (Geometric singular perturbation theory, GSPT) 采用几何方法研究不变流形、奇异点的标准型以及它们的开折分析。Fenichel 在不变流形的基础工作为 GSPT 奠定了基础，因此他在不变流形的研究成果也被称为 Fenichel 理论。第三种观点被一群在斯特拉斯堡的法国数学家采用。就是通过非标准分析对慢-快系统进行研究，他们对慢-快系统有了许多重要的发现。本文只关注了用 GSPT 方法来研究慢-快系统获得的结果。这个结果对研究 MMOs 是很有必要的。还有其他一些重要的技术是 GSPT 的一部分，比如交换引理 [113, 115]，爆破法 [57, 143, 237]，慢-快标准型理论 [10]，这些在本文中没有被具体说明。

2.1. 临界流形和漫流

慢-快系统的解通常是通过解的增长速度的变化来表现出慢和快的时段特征。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，系统 (2.1) 的快时段的收敛轨线是快子系统或边界层方程的解，如下：

$$(2.3) \quad \begin{cases} x' = f(x, y, \lambda, 0) \\ y' = 0 \end{cases}$$

另一方面，当处于慢时段时，系统 (2.2) 的收敛轨线为系统 (2.4) 的解。

$$(2.4) \quad \begin{cases} 0 = f(x, y, \lambda, 0) \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda, 0) \end{cases}$$

这个微分方程 (DAE) 称为**慢流** (slow flow) 或者**简化系统** (reduced system)。GSPT 的目标之一就是快子系统 (2.3) 和慢子系统 (2.4) 来理解整个系统 (2.1) 或 (2.2) 的当 $\varepsilon > 0$ 时的动力学。在系统 (2.4) 中的代数方程定义了**临界流形** (**退化流形**, critical manifold)：

$$S := \{(x, y) \in R^m \times R^n \mid f(x, y, \lambda, 0) = 0\}$$

我们注意到 S 可能会有奇异点，但是在这里我们假设 S 没有奇异点，所以 S 是一个光滑的流形。 S 中的点是边界层方程 (2.3) 的平衡点。

如果 S (或 M) 是**法向双曲线** (normally hyperbolic)，当正值参数 ε 会足够小时，Fenichel 理论 [71] 保证了临界流形 S (或 S 的子集 M) 作为系统 (2.1) 或 (2.2) 的慢流形的持续性。法向双曲率的概念更一般地被定义为不变流形，这个定义有效地说明了对流形的吸引和/或排斥比流形本身的动力学更强；具体的定义见参考文献 [68, 69, 70, 97]。当只有一个时间尺度时，法向双曲线通常很难去判定。然而，在我们的慢-快系统环境中， S 完全由平衡点构成，并且当所有 $p \in M$ 是边界层方程的双曲平衡点时， S 的子集 M 的法向双曲性的条件就会被满足，也就是说，雅可比矩阵 $(D_x f)(p, \lambda, 0)$ 没有实部为零的特征值。如果对 $p \in M$ ， $(D_x f)(p, \lambda, 0)$ 的特征值实部小于零，我们称法向双曲 S 的子集 M 是**吸引的** (attracting)；同样，如果对 $p \in M$ ， $(D_x f)(p, \lambda, 0)$ 的特征值实部大于零，我们称法向双曲 S 的子集 M 是**排斥的** (repelling)。如果 M 是法向双曲并且既不吸引也不排斥，我们称之为**鞍型** (saddle type)。

边界层方程的双曲性在 S 里的点处失效， S 在慢变量空间上的投影是奇异的。一般来说，在奇点理论的意义这些点是折点 [10]。在折点 p^* 处，会有 $f(p^*, \lambda, 0) = 0$ 并且矩阵 $(D_x f)(p^*, \lambda, 0)$ 的秩为 $m - 1$ ， $(D_x f)(p^*, \lambda, 0)$ 与左、右零向量 ω 和 ν 作用，使得 $\omega \cdot [D_{xx}^2 f](p^*, \lambda, 0)(\nu, \nu) \neq 0$ ， $\omega \cdot [D_{xx}^2 f](p^*, \lambda, 0) \neq 0$ 。临界流形轨线到快变量仿射空间的这些不平状态类似于二次函数。奇点理论更有力地说明了存在局部坐标系使得函数 f 转换成 $y_1 = x_1^2$ 。在 n 维临界流形 S 中，折点形成了一个余维-1 子流形的集合，特别是当 $m = 1$ 和 $n = 2$ 时，折点形成平滑曲线，该曲线分隔了吸引分支和排斥分支的二维临界流形 S 。在本文中，我们不考虑 S 在慢变量空间上的投影的退化奇异点。

除了折点外，隐函数定理表明 S 是函数 $h(y) = x$ 的局部曲线图，而且简化系统 (2.4) 可以被表示成如下形式：

$$(2.5) \quad \dot{y} = g(h(y), y, \lambda, 0)$$

我们也可以把系统 (2.4) 保持成 DAE 结构，并把它记为 (2.6) 式，作为 S 的限制向量场。

$$(2.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = \pm(D_x f)^{-1}(D_y f)g \\ \dot{y} = g \end{cases}$$

在 $R^m \times R^n$ 上通过观察 $f = 0$ 和 $\dot{y} = g$ ，表明 $\dot{x} = \pm(D_x f)^{-1}(D_y f)g$ 。当 f 是奇异的时，向量场 (2.6) 会**爆破** (blows up)。它可以通过用 $\pm \det(D_x f)$ 的方式来缩放时间，从而实现**去奇异化** (desingularized)，我们选择正负号，使得轨线的方向在 S 的吸引分支上保持不变。这种去奇异化系统在我们的许多分析中都起着重要作用。如果 S 是法向双曲的，不仅仅是 S ，慢流形在 $\varepsilon > 0$ 时也保持着这种特性；以下基本定理是更为精确的说明这一点。

定理 2.1 (Fenichel 定理[71]) 设 $M = M_0$ 是一个紧的系统 (2.2) 临界流形 S 的法向双曲子流形 (可能有界)，并且 $f, g \in C^r$ ， $r < \infty$ 。则对于充分小的正值 ε 有下列结论成立：

(F1) 存在一个局部不变流形 M_ε 微分同胚到 M_0 。局部不变的意思是 M_ε 具有轨线进入或离开所穿过的边界。

(F2) M_ε 距 M_0 有一个 $O(\varepsilon)$ 量级的 Hausdorff 距离。

(F3) 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时， M_ε 上的流收敛于 M 上的慢流。

(F4) M_ε 是 C^r - 光滑的。

(F5) M_ε 是法向双曲的，并且 M_ε 与作为 M_0 的快变量有相同稳定的性质 (吸引，排斥，或鞍型)。

(F6) M_ε 一般是不唯一的。在与 M_ε 的边界保持固定距离的区域中，所有的流形都满足 (F1) - (F5)，并且每个流形之间会存在一个 Hausdorff 距离 $O(e^{-K/\varepsilon})$ ，其中 $K > 0$ 且 $K = O(1)$ 。

法向双曲流形 M_0 与局部稳定和不稳定流形相关联，关系如下：

$$W_{loc}^s(M_0) = \bigcup_{p \in M_0} W_{loc}^s(p) \quad \text{和} \quad W_{loc}^u(M_0) = \bigcup_{p \in M_0} W_{loc}^u(p),$$

其中 $W_{loc}^s(p)$ 和 $W_{loc}^u(p)$ 分别表示在 p 点处的作为边界层方程的一个双曲函数平衡点 p 的局部稳定和局部不稳定流形。这些流形对充分小的正值 ε 存在局部稳定和不稳定流形 $W_{loc}^s(p)$ 和 $W_{loc}^u(p)$ ，如果用 $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$ 和 $W_{loc}^u(M_\varepsilon)$ 代替 M_ε 和 M_0 (或者用 $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$ 和 $W_{loc}^u(M_0)$ 代替 M_ε 和 M_0)，结论 (F1)-(F6) 依然是成立的。

我们称 M_ε 为 Fenichel 流形。Fenichel 流形是**慢流形** (slow manifolds) 的一个子类，是在当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，快时间尺度会趋向于 0 的向量场中的不变流形。我们按习惯把奇异极限中的对象标记下标 0，而相关的摄动对象标记下标 ε 。几何上，一个 Fenichel 流形 M_ε 的稳定流形 $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$ 组成点的轨线会提前靠近 $W_{loc}^s(M_\varepsilon)$ ；类似的， $W_{loc}^u(M_\varepsilon)$ 组成点的轨线会延后靠近 M_ε 。

2.1.1. 在 Van der Pol 方程中的临界流形和慢流

让我们用一个例子来说明这些 GSPT 的一般概念。具有常数受迫项的 Van der Pol 方程是最简单的系统中的一个，在这个系统里面的相关概念都是很直白 (显然) 的，这些概念历史上可能也是第一次给出，Van der Pol 方程如下：

$$(2.7) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} = \lambda - x \end{cases}$$

在这个慢-速系统中虽然快慢变量各一个，但是当这个系统第一次被发现时[50]，它所展示出来了复杂的动力学确实令人惊讶。在系统(2.7)中，通过令 $\varepsilon = 0$ ，我们得到了一个包含一个代数方程的简化系统，该代数方程定义了系统(2.7)的临界流形(2.8)，这个流形是三次曲线：

$$(2.8) \quad S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{3}x^3 - x =: c(x) \right\}$$

除了三次曲线上的局部极值点(极小值点和极大值点) $p_{\pm} = (\pm 1, \mp 2/3)$ 外，该曲线是法向双曲的，上述的临界流形 S 有一个服从于快变量 x 的折，在极值点 p_{\pm} 处法向双曲性是不满足的，因为 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \lambda, 0) = 1 - x^2$ 在极值点 p_{\pm} 等于0。因此，在极值点 p_{\pm} 为折点而且在极值点 p_{\pm} 处自然地将临界流形分解成如下三个分支：

$$S = S^{a,-} \cup \{p_{-}\} \cup S^r \cup \{p_{+}\} \cup S^{a,+}$$

其中 $S^{a,-} := S \cap \{x < -1\}$ ， $S^{a,+} := S \cap \{x > 1\}$ 并且 $S^r := S \cap \{-1 < x < 1\}$ 。从 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \lambda, 0)$ 的正负情况中我们可知分支 $S^{a,-}$ 和 $S^{a,+}$ 都是吸引分支， S^r 是排斥分支。图2中的灰色三次曲线就是临界流形 S ，我们注意到临界流形 S 和它的吸引/排斥分支不依赖 λ ，因此在子图(a)中 $\lambda = 0$ 的情况和子图(b)中 $\lambda = 1$ 的情况是一样的。任何不在 S 上的点的动力学完全受快变量 x 的方向的控制，这些点在图2中已用水平双箭头表示出来；注意到临界流形 S 的中间部分是排斥分支，两边无界的部分是吸引分支。

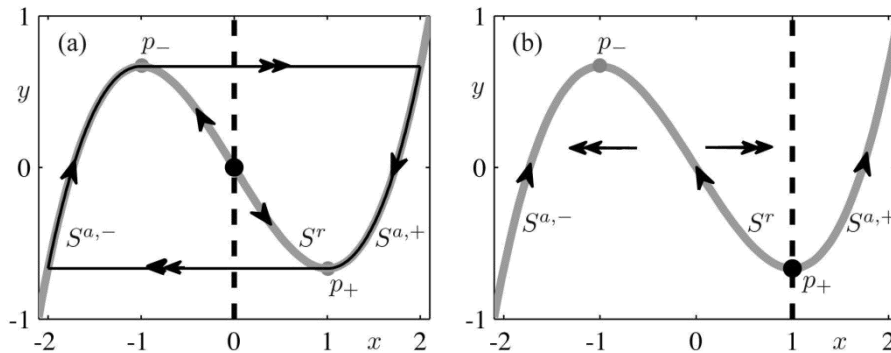


图2: Van der Pol 方程在 $\lambda = 0$ (a) 和 $\lambda = 1$ (b) 的情况下的相图。展示了临界流形 S (灰色实曲线) 和 y 零值线(虚线); 双箭头表示快流的方向, 单箭头表示慢流的方向。子图(a)展示了当张弛振荡(黑色线) 围绕着不稳定平衡点时的辅助流形。子图(b)是在局部极小值点 p_{+} 处带有折奇异的奇异 Hopf 分岔时期。

在 Van der Pol 方程(2.7)中，为了得到临界流形 S 上的慢流(2.5)，实际上不需要精确地解出 $S^{a,-}$ 、 S^r 和 $S^{a,+}$ 上的三次方程 $y = c(x)$ 中的 x 。使用快变量 x 来表述慢流(简化流)更方便。为此，我们对 $f(x, y, \lambda, 0) = y - c(x) = 0$ 关于慢时间尺度 τ 求导，得到如下形式：

$$\dot{y} = \dot{x}x^2 - \dot{x} = \dot{x}(x^2 - 1)$$

以上有关 \dot{y} 的等式结合(2.7)式中第二个等式，我们可以得到(2.9)式：

$$(2.9) \quad (x^2 - 1)\dot{x} = \lambda - x \quad \text{或} \quad \dot{x} = \frac{\lambda - x}{x^2 - 1}$$

图2中灰色曲线的箭头表示的是临界流形 S 上的慢流方向。慢流依赖于 λ ，因为流的方向也由临界流形 S 的 $x = \lambda$ 时的局部平衡点决定。慢流是定义在 $S^{a,-}$ 、 S^r 和 $S^{a,+}$ 上的，但在 $x = \pm 1$ 时不成立(只要 $\lambda \neq \pm 1$)。我们可以通过对因式 $(x^2 - 1)$ 收缩时间，达到对慢流的

$x = \pm 1$ 附近去奇异化的目的。这样就得到了去奇异化慢流的等式 $\dot{x} = \lambda - x$ 。同时也注意到，这样的时间收缩会使排斥分支 S^r 上的时间方向反转，因此，当将去奇异化系统的相图与慢流的相图相关时，必须注意。

现在我们来关注一下图 2(a) 中 $\lambda = 0$ 的情况，这种情况在 $|\lambda| < 1$ 的范围中是具有代表性的。(2.7) 式的 y -零值线，是通过 $\dot{y} = 0$ 来定义的，图中黑色垂直虚线表示的就是 y -零值线 (x -零直线就是 S)，并且原点是唯一的平衡点，在平衡点 (原点) 处可以得出 λ 的值。图中的闭曲线是一条奇异轨线，这条轨线是由起始于两个折点 p_{\pm} 处并连续到 S 的部分组成的。边界层方程轨线的连续相互关联的部分和慢流形一起被称为**辅助线流形 (次流形, candidate)** [20]。奇异轨线沿着 S 上的慢流到一个折点，然后它跳跃了，也就是说，它做了一个流向快轨线部分的转换，流向了 S 的另一个分支。利用相同的机制，又把奇异轨线返回到 S 的初始分支，当 $\varepsilon > 0$ 时，奇异轨线摄动到一条 Van der Pol 系统中的周期轨线，该 Van der Pol 系统与该奇异轨线 (辅助流形) 之间有个 Hausdorff 距离 $O(\varepsilon^{2/3})$ 。Van der Pol 将**张弛振荡 (relaxation oscillation)** 引入用于描述在慢和快阶段运动交替的周期轨线。

2.2 奇异 Hopf 分岔和鸭爆炸 (Canard Explosion)

慢-快系统的动力学在临界流形上失去法向双曲性的点附近是十分复杂的，和我们所知道的拥有单时间尺度的系统完全不同。本节讨论一种被称为**鸭爆炸 (canard explosion)** 的现象，这种现象发生在平面慢-快系统中，也是发生在一个奇异的 Hopf 分岔之后。我们首先讨论 (2.7) 式 Van der Pol 系统这个例子。

2.2.1. 在 Van der Pol 系统中的鸭爆炸

正如上所述，在图 2(a) 中的相图在 λ -值取值范围中是具有代表性的。然而，在图 2(b) 中的 $\lambda = 1$ 时的相图是退化的。线性稳定性分析表明，当 $\varepsilon > 0$ 时， $(x, y) = (\lambda, \frac{1}{3}\lambda^3 - \lambda)$ 是唯一的平衡点，在这个平衡点处可以求出 $|\lambda| < 1$ 范围内的 λ 值。当 $\lambda = \pm 1$ 时，就会发生 Hopf 分岔。一个动力学系统的 Hopf 分岔的特征在于当参数改变时，在平衡点处有一对纯虚数特征值以非零速度穿过虚轴 [148]。结果，我们发现了一族从分岔点产生的周期轨线。我们把这两个一般情况区别如下：分岔周期轨线稳定的**超临界 (supercritical)** Hopf 分岔和分岔周期轨线不稳定的**亚临界 (subcritical)** Hopf 分岔。Hopf 分岔的类型由 **Lyapunov 系数 (Lyapunov coefficient)** 的符号决定 (这个系数与 Hopf 标准型中三阶项有关)，对于 Hopf 分岔而言，Lyapunov 系数要求为非零。在一般的 Hopf 分岔附近，周期轨线的振幅与参数到分岔点距离的平方根相 (比较) 差不多。对于 (2.7) 式 Van der Pol 系统来说，超临界的 Hopf 分岔在 $\lambda_H = \pm 1$ 时发生，并且在参数区间 $|\lambda| < 1$ 分岔周期轨线内是存在。

当正值参数 ε 较小时，对如何观察 (2.7) 式 Van der Pol 系统的稳态动力学随 λ 的改变从稳定焦点到张弛振荡的分析是慢-快系统理论的一个重要发展。图 3(a) 展示了，当 $\varepsilon = 0.05$ 时，以 λ 为参数且产生于 Hopf 分岔的周期轨线的数值延拓结果。可以预料得到，在 $\lambda_H = 1.0$ 处，靠近 Hopf 分岔周期轨线 (深灰色曲线) 很小的。然而，当 λ 减小时，周期轨线又会非常迅速的增长，在增长过程中，周期轨线会沿着慢流形 S^r 延伸一段时间。事实上，对于图 3(a) 中黑色轨线 λ 的值约为 0.993491，也就是说， λ 的值可以取到 6 位小数。注意，我们仅仅展示了一个中等大小特征的增长轨线：图 3(a) 中最大的周期轨线仅仅包含折点 p^- 。当让 λ 继续减小时，这个周期轨线会继续快速增长，直到它达到张弛振荡的形状；就像图 2(a) 那样。

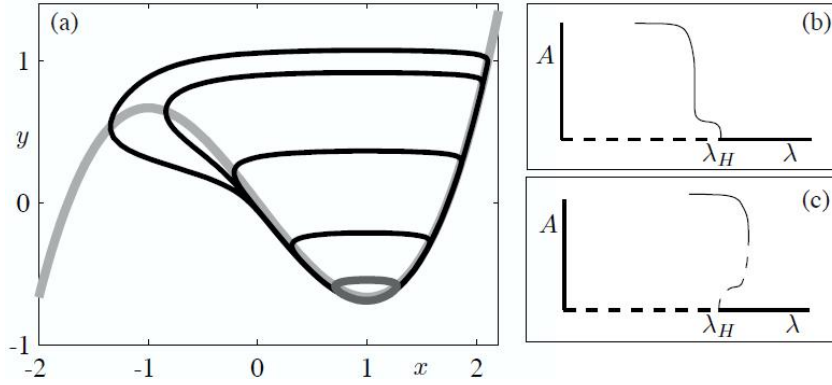


图 3: 当 $\varepsilon = 0.05$ 时, 在 Van der Pol 方程中的周期轨线的数值延拓。子图 (a) 展示的是周期轨线的一部分: 深灰色轨线是典型的在 $\lambda = \lambda_H$ 时 Hopf 分岔附近的小极限循环, 所有的黑色轨线都是在 $\lambda \approx 0.993491$ 的小参数区间内产生的。子图 (b) 和 (c) 是对应于超临界和亚临界奇异 Hopf 分岔的分岔图; 这里, A 表示极限环的振幅。

当平衡点移动越过折点 p_+ 时, 在 $\lambda_H = 1$ 处, 会产生 Hopf 分岔。此时的 Hopf 分岔被称为奇异 Hopf 分岔。在 Hopf 分岔处的特征值具有 $O(\varepsilon^{-1/2})$ 的量级, 使得周期轨线在 Hopf 分岔处产生, 其周期介于快 $O(\varepsilon^{-1})$ 量级和慢 $O(1)$ 量级时间尺度之间。这个周期轨线的大小在长度为 $O(e^{-K/\varepsilon})$ (对于某个固定正值 K) 的参数值 λ 的区间内从直径 $O(\varepsilon^{1/2})$ 迅速增长到直径 $O(1)$, 即 $O(\varepsilon)$ 会接近 λ_H 。图 3 (b) 和 (c) 分别是超临界情况和亚临界情况下奇异 Hopf 分岔的 λ 可能的分岔草图; 纵轴表示周期轨线的最大振幅。这两个分岔草图突出了上述的特性。有一个非常小的 λ 区间, 其中振荡的振幅以平方根方式增长, 这在 Hopf 分岔附近是可以预测的 [148]。然而, 振荡的振幅急剧增长, 直到它达到对应的张弛振荡才会停下来。

在 Hopf 分岔附近的周期轨线的振幅的快速增长被称为**鸭爆炸** (canard explosion)。鸭爆炸的名字来源于鸭爆炸时的一些周期轨线看起来有点像鸭子 [50]。事实上, 在图 3 (a) 中最大的周期轨线就是这种“鸭形”轨线的一个例子。更一般地说, 不管它的实际形状如何, 如果它在慢时尺度上沿一个排斥慢流形 (延伸) 运行一段 $O(1)$ 量级的时间, 就把它称为鸭轨线。如果它连接吸引和排斥慢流形, 鸭轨线被称为**最大鸭解** (maximal canard)。由于慢流形不是唯一的, 所以这个定义取决于特定的吸引和排斥慢流形的选择; 这一点可以参照定理 2.1 的 (F6)。其他的情况产生的轨线是以指数方式接近彼此的。在 (2.7) 式 Van der Pol 系统中, 流形 $S_\varepsilon^{a,+}$ 和 S_ε^r 在最大鸭轨线中相交的点附近的参数空间中发生 $O(e^{-K/\varepsilon})$ -封闭式鸭爆炸。它与参数值 $\lambda = 1$ 相关联, 其中平衡点位于临界流形 S 的折点 p_+ 处, 参见图 2 (b)。

2.3. 一般平面系统中的奇异 Hopf 分岔和鸭爆炸

在 (2.7) 式 Van der Pol 系统中, 在 $\lambda = 1$ 时产生奇异 Hopf 分岔, 此时的平衡点就是折点。在一个一般慢-快平面系统族中, 奇异 Hopf 分岔不会精确的产生于折点, 而是产生于相空间和参数空间中, 在与距离平衡点和折点重合处 $O(\varepsilon)$ 的地方。将 (2.7) 式 Van der Pol 系统的慢系统修正为下式, 可得到一个一般系统族:

$$\dot{y} = \lambda - x + ay$$

在这个修正后的系统中, 平衡点和折点仍然在 $x = 1$ 处重合, 但在 $x = \sqrt{1 + \varepsilon a}$ 处会发生 Hopf 分岔。对于平面慢-快系统, 存在使用几何或渐近线的方法对鸭爆炸及其相关奇异 Hopf 分岔的详细动力学分析; 我们将这些结果总结如下:

定理 2.2 (在 R^2 中的鸭爆炸 [143]) 假设一个平面慢-快系统有一个一般折点 $p_* = (x_p, y_p) \in S$, 也就是在 p_* 处满足以下关系:

$$(2.10) \quad f(p_*, \lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(p_*, \lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(p_*, \lambda, 0) \neq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(p_*, \lambda, 0) \neq 0$$

假设临界流形在 $x < x_p$ 时是局部吸引, 在 $x > x_p$ 时是局部排斥, 并且 $\lambda = 0$ 时在 p_* 处满足

$$(2.11) \quad g(p_*, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} g(p_*, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} g(p_*, 0, 0) \neq 0.$$

则分别会在 λ_H 和 λ_C 处发生奇异 Hopf 分岔和鸭爆炸, 其中

$$(2.12) \quad \lambda_H = H_1 \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$(2.13) \quad \lambda_C = (H_1 + K_1) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})$$

系数 H_1 和 K_1 可以通过标准变换或者通过 Hopf 分岔的第一个 Lyapunov 系数计算出来。 λ_H 和 λ_C 的奇异极限是相等的, 对于任意的充分小的正值 ε , 在 Hopf 分岔点的线性系统 [90, 148] 中有一对奇异特征值 (singular eigenvalues):

$$\sigma(\lambda; \varepsilon) = \alpha(\lambda; \varepsilon) + i\beta(\lambda; \varepsilon)$$

其中 $\alpha(\lambda_H; \varepsilon) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha(\lambda_H; \varepsilon) \neq 0$, 且

在慢时间尺度 τ 中, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H; \varepsilon) = \infty$; 在快时间尺度 t 中, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_H; \varepsilon) = 0$ 。

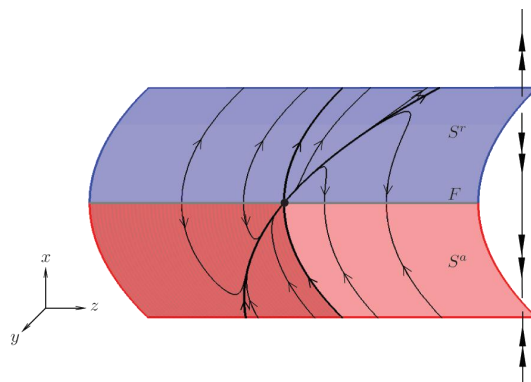


图 4: 具有吸引分支 S^a (红色) 和排斥分支 S^r (蓝色) 的临界流形 S 在折曲线 F (灰色) 处相接。横向于 S 的快流用双(大)箭头表示, 而靠近折结点的 S 上的慢流用单个(小)箭头表示; 参见图 5 (b)。 S^a 的深色阴影区域是漏斗, 是由穿过折结点的所有点组成。

2.4. 在有一个快变量和两个慢变量的系统中的折奇异点

平面系统的鸭爆发生在指数型小参数区间内。然而, 只要存在一个以上的慢变量, 鸭轨线就可以在 $O(1)$ 范围内存在。为了说明这一点, 我们考虑 (2.1) 式当 $m=1$ 和 $n=2$ 的特殊情况, 如下:

$$(2.14) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, z, \lambda, \varepsilon), \\ \dot{y} = g_1(x, y, z, \lambda, \varepsilon), \\ \dot{z} = g_2(x, y, z, \lambda, \varepsilon). \end{cases}$$

我们假设 (2.14) 的临界流形 $S = \{f = 0\}$ 有一个吸引分岔 S^a 和一个排斥分岔 S^r ，这两个分岔在折曲线 F 处相交，如图 4 所示。我们还假设在临界流形 S 上的折点 $p_* \in F$ 在奇异点理论的意义上都是一样的，也就是说它们满足下面的条件：

$$f(p_*, \lambda, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(p_*, \lambda, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_*, \lambda, 0) \neq 0, D_{(y,z)}f(p_*, \lambda, 0) = \text{满秩}$$

慢流在去奇异化前，在折曲线上没有被定义。在大多数折点上，轨线会接近或远离临界流形 S 的吸引和排斥分支。在一般系统中，可能存在孤立点，这样的点被称为折奇异点，在该点处慢流轨线会穿过去。折奇异点是去奇异化的慢流的平衡点。如上所述，去奇异化的慢流可以表示成 (2.15) 式：

$$(2.15) \quad \begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g_1 + \left(\frac{\partial}{\partial z} f\right) g_2, \\ \dot{y} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g_1, \\ \dot{z} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g_2. \end{cases}$$

(2.15) 被限制在 S 上。如果下式成立

$$g_1(p_*, \lambda, 0) \frac{\partial f}{\partial y}(p_*, \lambda, 0) + g_2(p_*, \lambda, 0) \frac{\partial f}{\partial z}(p_*, \lambda, 0) = 0$$

则折点 $p_* \in F$ 是折奇异点。图 4 是在 S 上的慢流系统，并且图中 F 上的粗实心点就是折奇异点，在该点处 F 由吸引变为排斥（满足慢流形）。

在 (2.15) 系统中的折点 p_* 的稳定性有不同的可能性。设 σ_1 和 σ_2 是临界流形 S 上 (2.15) 系统雅可比矩阵的特征值，讨论折奇异点 p_* 处的情况，如下：

$$\begin{cases} \text{折鞍点} & \text{如果 } \sigma_1 \sigma_2 < 0, \quad \sigma_{1,2} \in R \\ \text{折结点} & \text{如果 } \sigma_1 \sigma_2 > 0, \quad \sigma_{1,2} \in R \\ \text{折焦点} & \text{如果 } \sigma_1 \sigma_2 > 0, \quad \text{Im}(\sigma_{1,2}) \neq 0 \end{cases}$$

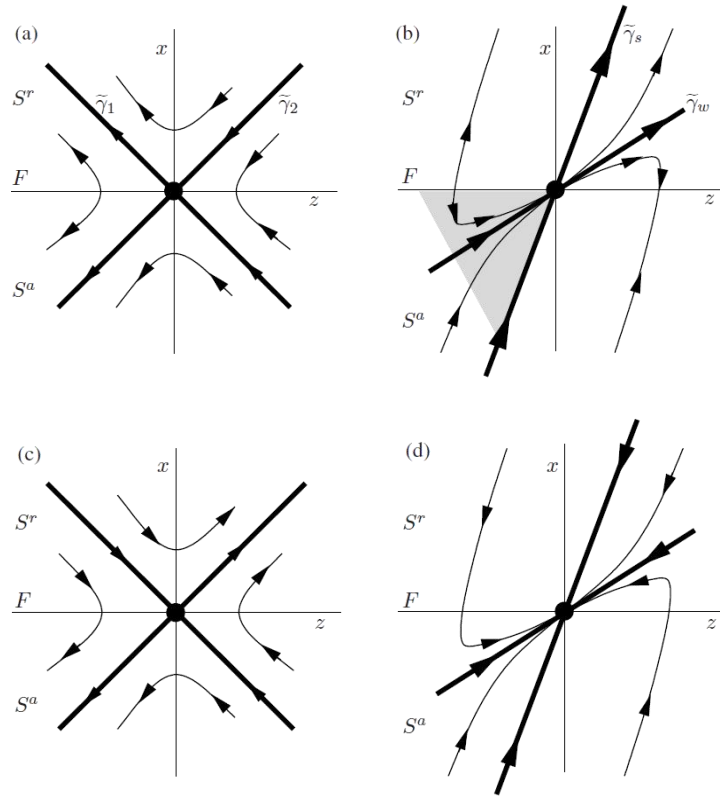


图 5: 折鞍点 (a) 和折结点 (b) 附近的局部线性化慢流的相图; 由特征方向定义的奇异鸭解图显示为粗线。相应的非奇异慢流分别显示在 (c) 和 (d) 中。

图 5(a) 和 (b) 中, 分别展示了 (线性) 慢流的相图, 在 (c) 和 (d) 中, 分别展示了相对应的去奇异化的慢流相图。(a) 和 (c) 中的是折鞍点相图, (b) 和 (d) 中的是折结点相图。注意到, 图 5(a) 和 (b) 的相图可以通过将 S^r 上流方向反转获得, 其中 $\frac{\partial}{\partial x} f > 0$, 即通过反转 (c) 和 (d) 中去奇异化的慢流相图的上半边的方向箭头则有图 5(a) 和 (b) 的相图, 其中 $x > 0$ 。在慢流形上, 沿着折鞍点或者折结点的特征方向连接着临界流形的吸引和排斥分支, 并在有限 (缓慢) 时间内穿过折奇异点的轨线, 称之为**奇异鸭解** (singular canard)。我们注意到, 对于折焦点的情况, 没有奇异鸭解, 这就是为什么这里没有展示折焦点的相图。对于折节点的情况, 一般具有 $|\sigma_1| > |\sigma_2|$ 形式的不等式, 我们写 $|\sigma_s| > |\sigma_w|$, 用 s 和 w 替换数字下标, 以强调强 (s) 和弱 (w) 的特征方向。进一步注意到, 在图 5(b) 中折结点的情况, **强奇异鸭解** (strong singular canard) $\tilde{\gamma}_s$ 和折曲线 F 围出了一整个扇形区域 (阴影部分), 在该区域里的轨线从 S^a 区域穿到 S^r 区域, 并穿过折结点。该扇形区域和整个 (2.14) 系统所对应的区域合起来称为折结点的**漏斗** (funnel)。图 5(b) 中的线性系统应与图 4 进行比较, 图 4 展示了折结点附近的非线性慢流形, 因此, 也有一个漏斗, 由穿过折奇异点的整个扇形组成。

当 $\varepsilon > 0$ 时, 奇异鸭解为整个系统的**最大鸭解** (maximal canard) 的**次鸭解** (secondary canard)。这将在下面这个定理 [19, 23, 31, 214, 237] 中具体描述。

定理 2.3 (在 R^3 中的鸭解) 对于快-慢系统 (2.14), 当 ε 为充分小的正值时, 下列结论成立:

- (C1) 折焦点处没有最大鸭解产生;
- (C2) 在这鞍点处, 两个奇异鸭解 $\tilde{\gamma}_{1,2}$ 会摄动到最大鸭解 $\gamma_{1,2}$;

(C3.1) 在折结点处, 设 $\mu := \frac{\sigma_w}{\sigma_s} < 1$, 奇异鸭解 $\tilde{\gamma}_s$ (强鸭解) 会摄动到最大鸭解 γ_s 。

如果 $\mu^{-1} \notin N$, 则奇异鸭解 $\tilde{\gamma}_w$ (弱鸭解) 也会摄动到最大鸭解 γ_w 。我们称 γ_s 和 γ_w 为主鸭解;

(C3.2) 在折结点处, 设 $k \in N^+$, 且满足 $2k + 1 < \mu^{-1} < 2k + 3$, $\mu^{-1} \neq 2(k + 1)$ 。则除了主鸭解 $\gamma_{s,w}$ 外, 存在其他 k 个最大鸭解, 称之为次鸭解;

(C3.3) 在折结点处, 当 $\mu^{-1} \in N$, 为奇数时, 主弱鸭解经历了一个跨临界分支, 当 $\mu^{-1} \in N$, 为偶数时, 主弱鸭解经历了一个叉式分支。

定理 2.3 的证明是基于对折结奇异点附近慢-快系统的标准形式的分析。回想一下, 最大鸭解对应于一个折结奇异点附近的慢流形的吸引分支 S_ε^a 和排斥分支 S_ε^r 的(横向)交叉。通过引入合适的坐标后, 标准系统变成了一个正则摄动问题, 变分方程沿着“blown-up”的奇异鸭解 ($\varepsilon = 0$ 的问题) 成为经典的**韦伯方程** (Weber equation), 韦伯方程在数学物理方法中经常用到。韦伯方程的性质意味着当 $\mu^{-1} \notin N$ 时, S_ε^a 和 S_ε^r 会发生横向交叉, 因此, (根据 (C2)–(C3.1) 可知) 当摄动量 ε 足够小且 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, 存在最大鸭解。(C3.2) 和 (C3.3) 的证明更加复杂, 这个证明是基于一个扩展的 Melnikov 理论 [236], 该理论说明了当 $\mu^{-1} \in N$ 时, 次鸭解的分岔来自于主弱鸭解。

参考文献

- [1] C. D. ACKER, N. KOPELL, AND J. A. WHITE, Synchronization of strongly coupled excitatory neurons: Relating network behaviour to biophysics, *J. Comput. Neurosci.*, 15:71 – 90, 2003.
- [2] B. D. AGUDA, AND B. L. CLARKE, Bistability in chemical reaction networks: theory and application to the peroxidase-oxidase reaction, *J. Chem. Phys.*, 87(6):3461 – 3470, 1987.
- [3] B. D. AGUDA, AND R. LARTER, Periodic-chaotic sequences in a detailed mechanism of the peroxidase-oxidase reaction, *J. Am. Chem. Soc.*, 113:7913 – 7916, 1991.
- [4] B. D. AGUDA, R. LARTER, AND B. L. CLARKE, Dynamic elements of mixed-mode oscillations and chaos in a peroxidase-oxidase network, *J. Chem. Phys.*, 90(8):4168 – 4175, 1989.
- [5] F. M. DE AGUIAR, S. ROSENBLATT, A. AZEVEDO, AND S. M. REZENDE, Observation of mixed-mode oscillations in spin-wave experiments, *J. Appl. Phys.*, 85(8):5086 – 5087, 1999.
- [6] F. N. ALBAHADILY, J. RINGLAND, AND M. SCHELL, Mixed-mode oscillations in an electrochemical system. I. A Farey sequence which does not occur on a torus, *J. Chem. Phys.*, 90:813 – 821, 1989.
- [7] K. AL-NAIMEE, F. MARINO, M. CISZAK, R. MEUCCI, AND F. T. ARECCHI, Chaotic spiking and incomplete homoclinic scenarios in semiconductor lasers with optoelectric feedback, *New Journal of Physics*.
- [8] F. ARGOU, A. ARNEODO, P. RICHETTI, AND J. C. ROUX, From quasiperiodicity to chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction. I. Experiment, *J. Chem. Phys.*, 86(6):3325 – 3338, 1987.
- [9] F. ARGOU AND J. C. ROUX, Quasiperiodicity in chemistry: An experimental path in the neighbourhood of a codimension-two bifurcation, *Phys. Lett. A*, 108(8):426 – 430, 1985.

- [10] V. I. ARNOLD (ED.), *Encyclopedia of mathematical sciences: Dynamical systems V*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1994.
- [11] N. BABA AND K. KRISCHER, Mixed-mode oscillations and cluster patterns in an electrochemical relaxation oscillator under galvanostatic control, *Chaos*, 18(1):015103, 2008.
- [12] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations I, *SIAM J. Appl. Mathem.*, 46(5):721 – 739, 1986.
- [13] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations II, *SIAM J. Appl. Mathem.*, 52(6):1651 – 1664, 1992.
- [14] S. M. BAER, T. ERNEUX, AND J. RINZEL, The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance, *SIAM J. Appl. Math.* 49(1):55 – 71, 1989.
- [15] D. BAKES, L. SCHREIBEROVA, I. SCHREIBER, AND M. J. B. HAUSER, Mixed-mode oscillations in a homogeneous photo-oscillatory chemical reaction system, *Chaos*, 18(1):015102, 2008.
- [16] D. BARKLEY, Slow manifolds and mixed-mode oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *J. Chem. Phys.*, 89(9):5547 – 5559, 1988.
- [17] D. BARKLEY, Linear stability analysis of rotating spiral waves in excitable media, *Phys. Rev. Lett.*, 68(13):2090 – 2093, 1992.
- [18] B. P. BELOUSOV, A periodically acting reaction and its mechanism, in *Collection of short papers on Radiation Medicine for 1958*, Med. Publ., Moscow, 1959, pp 145 – 147.
- [19] E. BENOÏT, Systems lent-rapides dans R^3 et leurs canards, in *Third Schnepfenried geometry conference*, volume 2, pp 159 – 191. Soc. Math. France, 1982.
- [20] E. BENOÏT, Enlacements de canards, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 300(8):225 – 230, 1985.
- [21] E. BENOÏT, Canards et enlacements, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 72:63 – 91, 1990.
- [22] E. BENOÏT, J.-L. CALLOT, F. DIENER, AND M. DIENER, Chasse au canards, *Collect. Math.*, 31:37 – 119.
- [23] E. BENOÏT, AND C. LOBRY, Les canards de R^3 , *C.R. Acad. Sc. Paris*, 294:483–488, 1982.
- [24] N. BERGLUND AND B. GENTZ, *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems: a sample-paths approach*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2005.
- [25] N. BERGLUND AND B. GENTZ, Stochastic dynamic bifurcations and excitability, in C. Laing and G. Lord, editors, *Stochastic methods in neuroscience*, Oxford University Press, 2008, pp 65–93.
- [26] J. BOISSONADE AND P. DEKEPPER, Transitions from bistability to limit cycle oscillations. Theoretical analysis and experimental evidence in an open chemical system, *J. Phys. Chem.*, 84:501–506, 1980.
- [27] B. BRAAKSMA, Singular Hopf bifurcation in systems with fast and slow variables, *J. Nonlinear Science*, 8(5):457–490, 1998.
- [28] T.S. BRIGGS, AND W.C. RAUSCHER, An oscillating iodine clock, *J. Chem. Educ.*, 50:496, 1973.
- [29] T. V. BRONNIKOVA, V. R. FED’KINA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Period-doubling bifurcations and chaos in a detailed model of the peroxidase-oxidase reaction, *J. Phys. Chem.*, 99(23):9309–9312, 1995.
- [30] T. V. BRONNIKOVA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Nonlinear dynamics of the peroxidase-oxidase reaction. I. Bistability and bursting oscillations at low enzyme concentrations, *J. Phys. Chem. B*, 105:310–321, 2001.

- [31] M. BRUNO, M. KRUPA, AND M. WECHSELBERGER, Mixed mode oscillations due to the generalized canard phenomenon, *Fields Institute Communications*, 49:39–63, 2006.
- [32] S. A. CAMPBELL, E. STONE, AND T. ERNEUX, Delay induced canards in a model of high speed machining, *Dynamical Systems*, 24(3):373–392, 2009.
- [33] J. CARR, *Applications of centre manifold theory*. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.
- [34] C. CHICONE, Inertial and slow manifolds for delay differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 190:364–406, 2003.
- [35] P. COULLET, Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems, *Int. J. Bif. Chaos*, 12(11):2445–2457, 2002.
- [36] M. F. CROWLEY AND R. J. FIELD, Electrically coupled Belousov-Zhabotinsky oscillators: a potential chaos generator, in C. Vidal and A. Pacault, editors, *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981, pp 147–153.
- [37] H. DEGN, L. F. OLSEN, AND J. W. PERRAM, Bistability, oscillation, and chaos in an enzyme reaction, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 316(1):623–637, 1979.
- [38] W. DE MELO, AND S. VAN STRIEN, *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.
- [39] C. A. DEL NEGRO, C. G. WILSON, R. J. BUTERA, H. RIGATTO, AND J. C. SMITH, Periodicity, mixed-mode oscillations, and quasiperiodicity in a rhythm-generating neural network, *Biophysical Journal*, 82:206–214, 2002.
- [40] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system, *Chaos*, 18(1):015107, 2008.