

# 慢-快系统的数值方法

Martin Wechselberger<sup>1</sup>

**摘要** 本节讨论用于计算许多图中所示的二维慢流形以及平衡点的稳定和不稳定流形的数值方法。慢流形计算是使用数值积分和边界值方法来计算沿着慢流形的轨线段，轨道段只是向量场轨线的有限部分；因此，它有两个端点和一个相关的积分时间。在计算慢流形的上下文中，每个这样的轨线段被选择为在临界流形上远离其折的一个端点，其中我们希望临界流形是慢流形的良好近似。实际上，Fenichel 定理暗示临界流形和慢流形之间的距离是  $O(\varepsilon)$ ，并且轨线以指数速率在适当的时间方向上从临界流形流动到吸引或排斥慢流形；参见定理 2.1。因此，除了一端存在从临界流形到慢流形的快速过渡的短  $O(\varepsilon)$  段之外，预计计算的轨线段将尽可能接近慢流形。对于平衡点的稳定流形和不稳定流形，选择轨线段分别位于与稳定或不稳定特征值相关的线性特征空间中。与这种近似相关的计算误差在远离终点时也迅速变弱；参见分析了这些近似误差。

计算作为轨线段族的不变流形的一种简单有效的方法是使用初始值解算器作为具有初始条件的基本算法，初始条件选择在不变流形中横向流的点网格上；我们称之为“扫描”法。尽管该方法简单，但在某些情况下不能产生令人满意的结果。特别地，轨线相互之间的强收敛或发散使得初始网格的选择有问题，并且可能产生期望的流形的非常不均匀的“覆盖”；参见 [1, 2]。在多时间尺度系统中，没有吸引力的 Fenichel 流形的快速指数不稳定性使得初值解算器无法通过正向积分来跟踪这些流形。这些问题促使使用结合了连续性边界值方法作为计算不变流形的备选策略 [32, 33]。在本文中，我们使用了两种策略。本节详细介绍用于计算具有一个快变量和两个慢变量的系统的吸引和排斥慢流形的方法，以及当参数变化时鸭轨线的延续。

## 1.1. 扫描不变流形

具有单一快变量的系统的 Fenichel 流形或是吸引的或是排斥的。因此，在临界流形上具有初始条件的前向轨线将快速的覆盖吸引的 Fenichel 流形并且在临界流形上具有初始条件的后向的轨线将快速的覆盖排斥的 Fenichel 流形。因此，其中一种计算三维流的两维吸引和排斥 Fenichel 流形的方法是在适当的时间方向上将初值求解法应用到初始条件的网格上，该网格沿着临界流形的横向慢流的曲线。我们在图 11 中使用这种扫描方法计算  $S_\varepsilon^r$ ；还参考了 [63] 早期使用这种方法计算二维不变流形的例子，Wechselberger, Guckenheimer 和 Haiduc（还把这种方法应用到）折结点的示例。

当合并到延拓框架中时，如果临界流形不是封闭形式的，并且不能预先选择初始条件的网格，也可以使用扫描方法。延拓方法 [51] 提供了成熟的算法，这些算法在求解欠定方程组时像牛顿方法那样用选择新起点的策略来扩展方程求解方法。更准确地说，假设  $F: R^{m+n} \rightarrow R^m$  是由  $m+n$  个变量的  $m$  个方程确定的光滑函数。隐函数定理指出  $F$  的零点在偏导数矩阵  $DF$  具有满秩  $m$  的点附近形成一个光滑的  $n$  维流形  $M$ ，并且给出了  $M$  的切空间的一个公式。大多数延拓方法是针对处理  $n=1$  时的情况，其解集是一条曲线；对于  $n>1$  的情况，请参见 [4]。一般来说，这些方法是基于预测-校正的过程：给定  $M$  上的一个点，切线（或更高阶）信息被用来为求解器选择一个新的种子，以找到  $M$  上的一个新点。上面描述的扫描方法基于特定坐标或方向的相等增量来选择连续步长，但是也可以使用更复杂的步长调整。我们还使用扫描方法来计算图 1 中的全局不稳定流形  $W^u(p)$ 。在  $W^u(p)$  的切空间中，

初始条件的网格沿射线分布，网格的端点位于线性化系统与该射线轨线的连续交点。扫描法在这里应用的很好，因为所选择的轨线段提供了  $W^u(p)$  的足够的“覆盖”。

## 1.2. 有边界值解算器的轨道段的延拓

AUTO 软件[52]的核心算法是 BVP 解算器和隐式方程解的数值延拓。AUTO 软件的 BVP 解算器使用配置方案，其中解段由在用户指定的网格的网格间隔上定义的分段多项式（用户指定的程度，通常在 3 到 5 之间）表示。在配置点求解 ODE 给出了一个由牛顿法求解的多项式系数的大方程组。AUTO 软件使用所谓的伪弧长延拓来跟踪或延续所选参数中此类方程的解，其中步长是自动调整的，具体细节参考[51]；BVP 解算器和数值延拓的结合允许我们找到并继续形成相关的（部分）不变流形的轨线段的单参数族。前面部分描述的扫描方法也可以在 AUTO 软件[52]中实现，从而通过配置来解决初始值问题。本节中描述的方法对轨线段的两个端点施加边界条件，这使得该方法在更广泛的上下文中更通用和适用；参见[32]。本文描述如何建立两点 BVPs 来计算慢流形和相关的鸭轨线。

我们考虑缩放形式 (1.1) 式的两点 BVPs,

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dot{u} = Tg(u, \lambda) \\ u(0) \in L \\ u(1) \in \Sigma \end{cases}$$

其中  $g: R^n \times R^p \rightarrow R^n$  是足够光滑的， $T \in R$ ， $\lambda \in R^p$  是参数， $L$  和  $\Sigma$  是  $R^n$  的子流形。参数  $T$  重新缩放时间变量，使得轨线段始终对应于时间间隔  $[0,1]$  中的轨线。因此，两个端点的边界条件总是适用于  $u(0)$  和  $u(1)$ ，并且  $T$  是相关联的(未缩放的)总积分时间。为了得到一个具有孤立解的适定问题，边界条件的数目应该等于方程的数目( $n$ ，因为  $\dot{u} \in R^n$ )加上自由参数的数目(对于参数  $\lambda$  和总积分时间  $T$ ，最多  $p+1$ )。我们对 (1.1) 式的单参数解族感兴趣，这意味着我们允许一个更少的边界条件(或者一个额外的自由参数)。注意，总积分时间  $T$  通常是未知的，并且可以被视为额外的自由参数。

我们首先考虑二维吸引和排斥慢流形  $S_\epsilon^a$  和  $S_\epsilon^r$  的计算。为了简化解释，我们假设我们有一个具有两个慢变量和一个折结点的三维慢系统。在此背景下，参数  $\lambda$  保持不变，并且通过施加总共三个边界条件，我们得到了轨线段的一个参数族（具有未知的总积分时间  $T$ ）。这意味着，(1.1) 式中的  $L$  和  $\Sigma$  的维数总计为  $n=3$ 。我们的方法是选择  $L$  作为临界流形上的曲线（例如，一条直线），这需要两个边界条件，而  $\Sigma$  作为面（例如，平面），这需要一个边界条件，使得相关的轨线段的单参数族覆盖慢流形的所需部分。例如，为了进入折结点区域，我们设  $L$  是横截于慢流的临界流形吸引分岔的曲线， $\Sigma$  是在折结点处正交于折曲线  $F$  的面。同样的方法也适用于  $S_\epsilon^r$ ，其中我们在临界流形的排斥分岔上选择  $L$ ，注意，对于当  $T < 0$  时的这样一组轨线段。我们注意到，这些选择也可以与扫描方法或者检测由函数的水平集定义的“停止条件”的初值解算器一起使用。慢流形可以通过选择横截面  $\Sigma$  来扩展，横截面在位于折结点之外的点上与  $F$  正交。图 6、20 和 29 给出了这种可视化的示例；还可以参见[42、43、45]。

与所有延拓部分一样，找到初值解是一个重要的问题。当延拓 BVP 的解时，显式解可能可以从其中被构造初值解中获得；参见[43]中的例子。然而，一般来说，没有显式解是已知的，并且必须以不同的方式找到初值解。我们使用同伦方法产生一个初始轨线段；主要思想是通过两个辅助 BVPs 来延续中间轨线段，第一个 BVP 从折曲线  $F$  上的点到该段获得轨道段，第二个 BVP 将  $F$  上的端点沿着临界流形移动到离  $F$  适当的距离；详见[42]。

现在我们用 Koper 模型 (4.1) 来阐明这种方法, 它也在第 4 节中用于案例研究。我们设参数  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.1, 1, 7, -10)$ , 注意到在 [123] 中  $\lambda > 0$ , 这与第 4 节中考虑的  $\lambda = -7$  的对称情况相关。如第 4 节所描述的那样, 在这个模型中有一个折结点, 它在一些被观测到的 MMOs 中导致 SAOs 产生; 在原始坐标中, 它的坐标如下:

$$(1.2) \quad P_{\text{in}} = \left( -1, \frac{2 + \lambda}{k}, \frac{2\lambda + 4 + k}{k} \right) = (-1, -0.9, -0.8).$$

我们计算  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_2}^r$  作为由系统 (8.1) 给出的 BVPs 的解, 其中  $g$  由系统 (4.1) 的右侧所定义。作为边界条件, 我们对  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_2}^r$  使用相同的截面  $\Sigma$ , 分别用线  $L = L^a$  和  $L = L^r$  表示, 定义如下:

$$(1.3) \quad \Sigma_{\text{in}} := \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid z = -0.8 \right\}$$

$$(1.4) \quad L^a := S \cap \{x = -1.5\}$$

$$(1.5) \quad L^r := S \cap \{x = -0.2\}$$

图 33 展示了计算结果。我们分两个同伦步骤在  $S_{\varepsilon_1}^a$  上找到第一个轨线段, 如图 33(a) 所示。从平凡解  $u = \{P_{\text{in}} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ , 出发, 利用总积分时间  $T = 0$ , 我们延拓从 (4.1) 中求解出的并满足  $u(1) \in \Sigma_{\text{in}}$  和  $u(0) \in F$  的轨线段族。我们停止计算, 在 AUTO 软件中由自定义的函数检测, 而且

$$u(0) \in \tilde{\Sigma}^a := \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid z = -0.76 \right\}$$

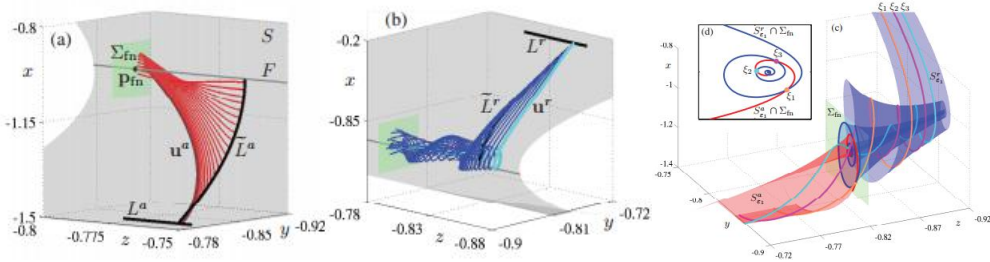


图 3: 参数为  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda, k) = (0.1, 1, 7, -10)$  的 Koper 模型 (4.1) 的慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_2}^r$  的计算。(a) 显示了红轨线段的同伦族, 该同伦族将截面  $\Sigma_{\text{in}}$  与临界流形  $S$  (灰色) 连接。该族中的第一条 (最上面) 曲线是由一个单独的同伦计算得到的, 该同伦发现轨线段在距  $P_{\text{in}}$  的适当距离处沿  $F$  结束。第二个同伦步扫遍了红色曲线族, 在最后一个 (最低, 暗红色) 轨线段结束, 该轨线段的终点位于曲线  $L^a$  处。(b) 显示了将  $\Sigma_{\text{in}}$  与临界流形的排斥分支连接的轨线段 (蓝色) 的类似同伦族。最后一个 (最右边, 青色) 轨线段从  $L^r$  开始。(c) 显示了  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_2}^r$  以及三个次鸭解  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  和  $\xi_3$ 。(d) 显示了  $\Sigma_{\text{in}}$  中用于探测鸭轨线的  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_2}^r$  的交点曲线。

图 3(a) 中的  $F$  上具有它自身端点的轨线段是这个轨线段族的最后一个计算结果。同伦的第二步使  $u(0) \in S$  远离  $F$  且 (近似) 平行于  $\Sigma$ , 即我们接着延拓从 (4.1) 中求解出的且满足  $u(1) \in \Sigma_{\text{in}}$  和  $u(0) \in \tilde{L}^a = S \cap \tilde{\Sigma}^a$  的轨线段族。当到达  $L^a$  时, 延拓停止, 这在 AUTO 软件中由自定义的函数再次检测到。该族中的轨线段如图 3(a) (红色曲线) 所示; 只有最后一个轨线段  $u^a$  (最低部的, 暗红色的) 位于  $S_{\varepsilon_1}^a$  上, 以便于很好地近似; 这个轨线段是开始流形计算的那个。为了在  $S_{\varepsilon_2}^r$  上获得第一轨线段, 我们进行了类似的计算, 其中使用中间段  $\tilde{\Sigma}^r := \{z = -0.87\}$ ; 这在图 3(b) 中已示出, 其中轨线段  $u^r$  (青色) 作为  $S_{\varepsilon_2}^r$  上的初始解。

一旦发现第一轨道段  $u^a$  和  $u^r$ , 我们开始对吸引慢流形  $S_{\varepsilon_1}^a$  进行 (8.1) 和 (8.3), (8.4) 的延拓, 对排斥慢流形  $S_{\varepsilon_2}^r$  进行 (8.3) 和 (8.5) 的延拓。结果如图 33(c) 所示,  $S_{\varepsilon_1}^a$  和  $S_{\varepsilon_2}^r$  与  $\Sigma_{\text{in}}$  的交曲线如图 33(d) 所示。在子图 (d) 中的  $S_{\varepsilon_1}^a \cap \Sigma_{\text{in}}$  和  $S_{\varepsilon_2}^r \cap \Sigma_{\text{in}}$  的横向交点对应于次要鸭轨线; 子图 (c) 中的三维视图显示了其中三个, 标记为  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  和  $\xi_3$ 。

### 1.3. 找出并追踪鸭轨线

折结点附近的最大鸭解是二维吸引和排斥慢流形  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$  的横向交叉曲线。我们这里简要地讨论如何检测鸭形轨线，并随后在系统参数中延拓它们；参见[42, 43, 45]。为了表示出最大鸭解，我们必须使用折结点处或在其附近的折曲线的公共截面来计算  $S_\varepsilon^a$  和  $S_\varepsilon^r$ 。公共截面使得我们获得鸭轨线的表达式，即为与轨线段  $u^a \subset S_\varepsilon^a$  (具有相关的总积分时间  $T^a$ ) 与轨线段  $u^r \subset S_\varepsilon^r$  (具有相关的总积分时间  $T^r$ ) 都相关的部分  $u^c$ ，其中  $u^a$  和  $u^r$  满足  $u^a \cap \Sigma = u^r \cap \Sigma$ 。用这种方法定位的相互关联的轨线  $u^c$  可以在系统参数中延拓，且而无需在每一步重新计算慢流形。回想一下，AUTO 软件总是将 BVP 缩放到时间间隔[0,1]内，所以我们适当地重新缩放  $u^c$  上的时间，并在系统(8.1)中令  $T = T^a + T^r$ 。然后我们可以在满足边界条件(8.6)、(8.7)的情况下开始延拓(在系统参数中)，边界条件决定了  $u^c$  为孤立解。事实上，只要  $u^a \cap \Sigma \approx u^r \cap \Sigma$  这种延拓通常就会开始， $\Sigma$  中的任何小间隙在首次牛顿步长迭代后被迫靠近。(1.6)和(1.7)这两个边界条件迫使轨线段  $u^c$  保持非常接近临界流形  $S$  的吸引分支的状态，直到接近折曲线  $F$ ，然后接近于  $S$  的排斥分支直至  $L^r$ 。图 34 显示了 Koper 模型 (4.1) 的鸭式延拓，其中我们记  $\varepsilon_1$  为第二个自由参数 (连同  $T$ )，并且保持  $(\varepsilon_2, \lambda, k) = (1, 7, -10)$  固定。图 34(a)显示了在面  $\Sigma = \Sigma_m$  部分中具有(几乎)相等端点的两个轨线段  $u^a$  和  $u^r$ ；它们已经被检测为最大次要鸭轨线  $\xi_4$  的良好近似，然后由连接轨线  $u^c$  表示。为了增加或减少  $\varepsilon_1$ ，我们延拓  $\xi_4$ ，以及其他六个最大次鸭解，参见图 33。图 34(b)显示了这七个分岔，标记为  $\xi_1 - \xi_7$ ；在图中垂直轴表示总积分时间  $T$ ，它清楚地区分了分岔。当  $\xi_1 - \xi_7$  沿着  $\varepsilon_1$  增加的方向延拓时，每个分岔都检测到了  $\varepsilon_1$  中的折；我们已经在第 5 节中弄清楚了这一点，在其他系统中[45]也观察到了。图 34(c)是一个“瀑布图”，显示了当  $\varepsilon_1$  变化时，最大次要鸭轨线  $\xi_4$  如何沿分岔发展；具体地说，用适当的偏移宽度  $\delta_i$  绘制了沿分岔  $\xi_4$  连续计算的轨线段的快速变量  $x$  的时间分布图。对应于  $\xi_4$  的折的轨线段用粗黑突出显示。观察折左侧的轨线段产生了四个 SAOs，而经过折的只产生了三个 SAOs 跟着一个快速段。因此，经过折的鸭轨线不再是最大鸭轨线；参见第 5 节。

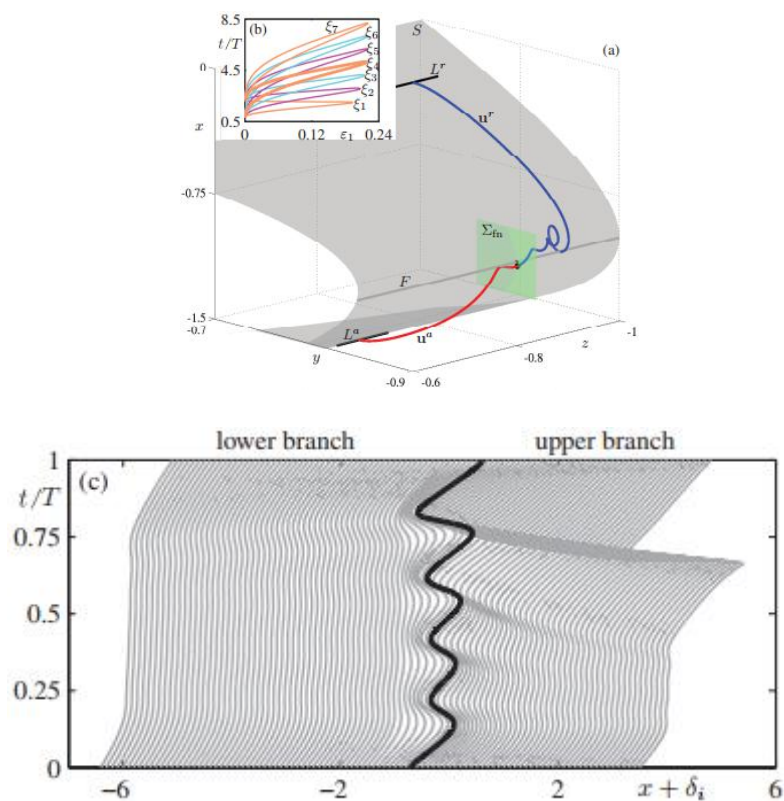


图 4: 延拓参数为  $(\epsilon_2, \lambda, k) = (1, 7, -10)$  的 Koper 模型 (4.1) 的次鸭解, 从  $\epsilon_1 = 0.1$  开始。(a) 显示由两个轨线段  $u^l$  和  $u^r$  的连接  $u^c$  表示的鸭轨线  $\xi_4$ , 这两个轨线段  $u^l$  和  $u^r$  在  $\Sigma_{in}$  中连接。(b) 显示了  $\epsilon_1$  中鸭轨线  $\xi_1 - \xi_3$  的延拓, 绘制了总积分时间  $T - \epsilon_1$  图。(c) 显示了沿着分支  $\xi_4$  计算的轨线段的快速变量  $x$  (受偏移  $\delta_i$  影响) 的时间分布的二维“瀑布图”。(c) 中的粗黑曲线是 (b) 中 (粗面) 分支的折点处的鸭轨线  $\xi_4$ 。

## 参考文献

- [1] C. D. ACKER, N. KOPELL, AND J. A. WHITE, Synchronization of strongly coupled excitatory neurons: Relating network behaviour to biophysics, *J. Comput. Neurosci.*, 15:71 – 90, 2003.
- [2] B. D. AGUDA, AND B. L. CLARKE, Bistability in chemical reaction networks: theory and application to the peroxidase-oxidase reaction, *J. Chem. Phys.*, 87(6):3461 – 3470, 1987.
- [3] B. D. AGUDA, AND R. LARTER, Periodic-chaotic sequences in a detailed mechanism of the peroxidase-oxidase reaction, *J. Am. Chem. Soc.*, 113:7913 – 7916, 1991.
- [4] B. D. AGUDA, R. LARTER, AND B. L. CLARKE, Dynamic elements of mixed-mode oscillations and chaos in a peroxidase-oxidase network, *J. Chem. Phys.*, 90(8):4168 – 4175, 1989.
- [5] F. M. DE AGUIAR, S. ROSENBLATT, A. AZEVEDO, AND S. M. REZENDE, Observation of mixed-mode oscillations in spin-wave experiments, *J. Appl. Phys.*, 85(8):5086 – 5087, 1999.
- [6] F. N. ALBAHADILY, J. RINGLAND, AND M. SCHELL, Mixed-mode oscillations in an electrochemical system. I. A Farey sequence which does not occur on a torus, *J. Chem. Phys.*, 90:813 – 821, 1989.
- [7] K. AL-NAIMEE, F. MARINO, M. CISZAK, R. MEUCCI, AND F. T. ARECCHI, Chaotic spiking and incomplete homoclinic scenarios in semiconductor lasers with optoelectric feedback, *New Journal of Physics*.
- [8] F. ARGOUL, A. ARNEODO, P. RICHETTI, AND J. C. ROUX, From quasiperiodicity to chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction. I. Experiment, *J. Chem. Phys.*, 86(6):3325 – 3338, 1987.
- [9] F. ARGOUL AND J. C. ROUX, Quasiperiodicity in chemistry: An experimental path in the neighbourhood of a codimension-two bifurcation, *Phys. Lett. A*, 108(8):426 – 430, 1985.
- [10] V. I. ARNOLD (ED.), *Encyclopedia of mathematical sciences: Dynamical systems V*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1994.
- [11] N. BABA AND K. KRISCHER, Mixed-mode oscillations and cluster patterns in an electrochemical relaxation oscillator under galvanostatic control, *Chaos*, 18(1):015103, 2008.
- [12] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations I, *SIAM J. Appl. Math.*, 46(5):721 – 739, 1986.
- [13] S. M. BAER AND T. ERNEUX, Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations II, *SIAM J. Appl. Math.*, 52(6):1651 – 1664, 1992.
- [14] S. M. BAER, T. ERNEUX, AND J. RINZEL, The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance, *SIAM J. Appl. Math.* 49(1):55 – 71, 1989.

- [15] D. BAKES, L. SCHREIBEROVA, I. SCHREIBER, AND M. J. B. HAUSER, Mixed-mode oscillations in a homogeneous ph-oscillatory chemical reaction system, *Chaos*, 18(1):015102, 2008.
- [16] D. BARKLEY, Slow manifolds and mixed-mode oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *J. Chem.Phys.*, 89(9):5547 – 5559, 1988.
- [17] D. BARKLEY, Linear stability analysis of rotating spiral waves in excitable media, *Phys. Rev. Lett.*, 68(13):2090 – 2093, 1992.
- [18] B. P. BELOUSOV, A periodically acting reaction and its mechanism, in *Collection of short papers on Radiation Medicine for 1958*, Med. Publ., Moscow, 1959, pp 145 – 147.
- [19] E B ENOÏT, Systems lents-rapides dans  $R^3$  et leurs canards, in *Third Schnepfenried geometry conference*, volume 2, pp 159 – 191. Soc. Math. France, 1982.
- [20] E BENOÏT, Enlacements de canards, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 300(8):225 – 230, 1985.
- [21] E BENOÏT, Canards et enlacements, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 72:63 – 91, 1990.
- [22] E ENOÏT, J.-L. CALLOT, F. DIENER, AND M. DIENER, Chasse au canards, *Collect. Math.*, 31:37 – 119.
- [23] E B ENOÏT, AND C. LOBRY, Les canards de  $R^3$ , *C.R. Acad. Sc. Paris*, 294:483–488, 1982.
- [24] N. BERGLUND AND B. GENTZ, *Noise-induced phenomena in slow-fast dynamical systems: a sample-paths approach*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2005.
- [25] N. BERGLUND AND B. GENTZ, *Stochastic dynamic bifurcations and excitability*, in C. Laing and G. Lord, editors, *Stochastic methods in neuroscience*, Oxford University Press, 2008, pp 65–93.
- [26] J. BOISSONADE AND P. DEKEPPER, Transitions from bistability to limit cycle oscillations. Theoretical analysis and experimental evidence in an open chemical system, *J. Phys. Chem.*, 84:501–506, 1980.
- [27] B. BRAAKSMA, Singular Hopf bifurcation in systems with fast and slow variables, *J. Nonlinear Science*, 8(5):457–490, 1998.
- [28] T.S. BRIGGS, AND W.C. RAUSCHER, An oscillating iodine clock, *J. Chem. Educ.*, 50:496, 1973.
- [29] T. V. BRONNIKOVA, V. R. FED’KINA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Period-doubling bifurcations and chaos in a detailed model of the peroxidase-oxidase reaction, *J. Phys. Chem.*, 99(23):9309–9312, 1995.
- [30] T. V. BRONNIKOVA, W. M. SCHAFFER, AND L. F. OLSEN, Nonlinear dynamics of the peroxidase-oxidase reaction. I. Bistability and bursting oscillations at low enzyme concentrations, *J. Phys. Chem. B*, 105:310–321, 2001.
- [31] M. BRUNNS, M. KRUPA, AND M. WECHSELBERGER, Mixed mode oscillations due to the generalized canard phenomenon, *Fields Institute Communications*, 49:39–63, 2006.
- [32] S. A. CAMPBELL, E. STONE, AND T. ERNEUX, Delay induced canards in a model of high speed machining, *Dynamical Systems*, 24(3):373–392, 2009.
- [33] J. CARR, *Applications of centre manifold theory*. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.
- [34] C. CHICONE, Inertial and slow manifolds for delay differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 190:364–406, 2003.
- [35] P. COULLET, Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems, *Int. J. Bif. Chaos*, 12(11):2445–2457, 2002.

- [36] M. F. CROWLEY AND R. J. FIELD, Electrically coupled Belousov-Zhabotinsky oscillators: a potential chaos generator, in C. Vidal and A. Pacault, editors, *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981, pp 147–153.
- [37] H. DEGN, L. F. OLSEN, AND J. W. PERRAM, Bistability, oscillation, and chaos in an enzyme reaction, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 316(1):623–637, 1979.
- [38] W. DE MELO, AND S. VAN STRIEN, *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.
- [39] C. A. DEL NEGRO, C. G. WILSON, R. J. BUTERA, H. RIGATTO, AND J. C. SMITH, Periodicity, mixed-mode oscillations, and quasiperiodicity in a rhythm-generating neural network, *Biophysical Journal*, 82:206–214, 2002.
- [40] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system, *Chaos*, 18(1):015107, 2008.
- [41] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, The geometry of slow manifolds near a folded node, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(4):1131 – 1162, 2008.
- [42] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, The geometry of mixed-mode oscillations in the Olsen model for the peroxidase-oxidase reaction, *Discr. Cont. Dyn. Sys. S*, 2(4): 807 – 827, 2009.
- [43] M. DESROCHES, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Numerical continuation of canard orbits in slow-fast dynamical systems, *Nonlinearity*, 23(3): 739 – 765, 2010.
- [44] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS, AND YU. A. KUZNETSOV, *MatCont: A Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs*, *ACM TOMS* 29(2): 141 – 164, 2003. Available via <http://www.matcont.ugent.be/>.
- [45] C. T. DICKSON, J. MAGISTRETTI, M. H. SHALISNKY, E. FRANSEN, M. E. HASSELMO, AND A. ALONSO, Properties and role of  $I_h$  in the pacing of subthreshold oscillations in entorhinal cortex layer II neurons, *J. Neurophysiol.*, 83:2562 – 2579, 2000.
- [46] C. T. DICKSON, J. MAGISTRETTI, M. H. SHALISNKY, B. HAMAM, AND A. ALONSO, Oscillatory activity in entorhinal neurons and circuits: Mechanisms and function, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 911:127 – 150, 2006.
- [47] F. DIENER, AND M. DIENER, *Nonstandard analysis in practice*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1995.
- [48] M. DIENER, The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate, *The Mathematical Intelligencer*, 6:38 – 48, 1984.
- [49] E. J. DOEDEL, Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations, in B. Krauskopf, H. M. Osinga and J. Galan-Vioque, editors, *Numerical continuation methods for dynamical systems: path following and boundary value problems*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2007, pp 117 – 54.
- [50] E. J. DOEDEL, R. C. PAFFENROTH, A. C. CHAMPNEYS, T. F. FAIRGRIEVE, YU. A. KUZNETSOV, B. E. OLDEMAN, B. SANDSTEDTE AND X. J. WANG, *AUTO-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*; available at <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>.
- [51] E. J. DOEDEL, B. E. OLDEMAN, AND C. L. PANDO L., Bifurcation structures in a model of a CO<sub>2</sub> laser with a fast saturable absorber, *Int. J. Bifurc. Chaos*, in press.
- [52] S. DOI, J. INOUE, AND S. KUMAGAI, Chaotic spiking in the Hodgkin – Huxley nerve model with slow inactivation in the sodium current, *J. Integr. Neurosci.*, 3(2):207–225, 2004.

- [53] J. DROVER, J. RUBIN, J. SU, AND B. ERMENTROUT, Analysis of a canard mechanism by which excitatory synaptic coupling can synchronize neurons at low firing frequencies, *SIAM J. Appl. Math.*, 65(1):69–92, 2004.
- [54] J.L.A. DUBBELDAM, B. KRAUSKOPF AND D. LENSTRA, Excitability and coherence resonance in lasers with saturable absorber, *Phys. Rev. E* 60(6):6580–6588, 1999.
- [55] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE, Canard cycles and center manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 577, 1996.
- [56] W. ECKHAUS, Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks, *Lec. Notes Math.*, 985:449–494, 1983.
- [57] M. EISWIRTH AND G. ERTL Kinetic oscillations in the catalytic CO oxidation on a Pt(110) surface, *Surf. Sci.*, 177(1):90–100, 1986.
- [58] M. EISWIRTH, K. KRISCHER, AND G. ERTL, Nonlinear dynamics in the CO-oxidation on Pt single crystal surfaces, *Appl. Phys. A*, 51:79–90, 1990.
- [59] J. P. ENGLAND, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Computing one-dimensional global manifold of Poincare maps by continuation, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 4(4):1008–1041, 2005.
- [60] J. P. ENGLAND, B. KRAUSKOPF, AND H. M. OSINGA, Computing two-dimensional global invariant manifolds in slow-fast systems, *Int. J. Bif. Chaos*, 17(3): 805–822, 2007.
- [61] I. ERCHOVA AND D. J. MCGONIGLE, Rhythms of the brain: An examination of mixed mode oscillation approaches to the analysis of neurophysiological data, *Chaos*, 18(1):015115, 2008.
- [62] A. ERISIR, D. LAU, B. RUDY, AND C. S. LEONARD, Function of specific K<sup>+</sup> channels in sustained high frequency firing of fast-spiking interneurons, *J. Neurophysiol.*, 82:2476–2489, 1999.
- [63] B. ERMENTROUT AND M. WECHSELBERGER, Canards, clusters and synchronization in a weakly coupled interneuron model, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 8(1):253–278, 2009.
- [64] V. R. FEDOKINA, F. I. ATAULLAKHANOV, AND T. V. BRONNIKOVA, Computer simulations of sustained oscillations in the peroxidase-oxidase reaction, *Biophysical Chemistry*, 19:259–264, 1984.
- [65] V. R. FEDOKINA, F. I. ATAULLAKHANOV, AND T. V. BRONNIKOVA, Stimulated regimens in the peroxidase oxidase reaction, *Theor. Exp. Chem.*, 24(2):172–178, 1988.
- [66] N. FENICHEL, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana University Mathematical Journal*, 21:193–225, 1971.
- [67] N. FENICHEL, Asymptotic stability with rate conditions, *Indiana University Mathematical Journal*, 23:1109–1137, 1974.
- [68] N. FENICHEL, Asymptotic stability with rate conditions II, *Indiana University Mathematical Journal*, 26:81–93, 1977.
- [69] N. FENICHEL, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 31:53–98, 1979.
- [70] R.J. FIELD, E. KOROS, AND R.M. NOYES, Oscillations in chemical systems II. Thorough analysis of temporal oscillations in the Ce – BrO<sub>3</sub>-malonic acid system, *J. Am. Chem. Soc.*, 94:8649–8664, 1972.
- [71] R. J. FIELD AND R. M. NOYES, Oscillations in chemical systems IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction, *J. Chem. Phys.*, 60:1877–1884, 1974.



- [72] S. J. FRASER, The steady state and equilibrium approximations: A geometrical picture, *J. Chem. Phys.*, 88:4732–4738, 1988.
- [73] S. D. FURROW, Chemical oscillators based on iodate ion and hydrogen peroxide, in R. J. Field and M. Burger, editors, *Oscillations and traveling waves in chemical systems*, Wiley-Interscience, 1985, pp 171–192.
- [74] P. GASPARD AND G. NICOLIS, What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?, *J. Stat. Phys.*, 31(3):499–518, 1983.
- [75] P. GASPARD AND X.-J. WANG, Homoclinic orbits and mixed-mode oscillations in far-from-equilibrium systems, *J. Stat. Phys.*, 48:151–199, 1987.
- [76] T. GEEST, C. G. STEINMETZ, R. LARTER, AND L. F. OLSEN, Period-doubling bifurcations and chaos in an enzyme reaction, *J. Phys. Chem.*, 96:5678–5680, 1992.
- [77] T. G. J. VAN V ENROOIJ AND M.T.M. K OPER , Bursting and mixed-mode oscillations during the hydrogen peroxide reduction on a platinum electrode *Electrochimica Acta*, 40(11):1689–1696, 1995.
- [78] C. VIDAL , J.-C. ROUX , S. BACHELART , AND A. ROSSI , Experimental study of the transition to turbulence in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 357(1):377–396, 1980.
- [79] T. VO , R. BERTRAM , J. TABAK AND M. W ECHSELBERGER , Mixed-mode oscillations as a mechanism for pseudo-plateau bursting, *J. Comp. Neurosci.*, DOI: 10.1007/s10827-010-0226-7, 2010.
- [80] V. V UKOJEVIĆ , S. ANIĆ , AND L. J. KOLAR -ANIĆ , Investigation of dynamic behaviour of the Bray-Liebhafsky reaction in the CSTR. Determination of bifurcation points, *J. Phys. Chem. A*, 104:10731–10739, 2000.
- [81] V. V UKOJEVIĆ , P.G. S ØRENSEN , AND F. HYNNE , Predictive value of a model of the Briggs-Rauscher reaction fitted to quenching experiments, *J. Phys. Chem.*, 100:17175–17185, 1996.
- [82] G. ALLET , Entrée-sortie dans un tourbillon, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 36, 157–184, 1986.
- [83] M. W ECHSELBERGER , Existence and bifurcation of canards in  $R^3$  in the case of a folded node, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 4(1):101–139, 2005.
- [84] M. W ECHSELBERGER AND W. W ECKESSER , Bifurcations of mixed-mode oscillations in a stellate cell model, *Physica D*, 238:1598–1614, 2009.
- [85] M. W ECHSELBERGER AND W. W ECKESSER , Homoclinic clusters and chaos associated with a folded node in a stellate cell model, *Discr. Cont. Dyn. Sys. Ser. S*, 2(4):829–850, 2009.
- [86] S. WIECZOREK AND B. K RAUSKOPF , Bifurcations of  $n$ -homoclinic orbits in optically injected lasers, *Non-linearity* 18(3):1095–1120, 2006.
- [87] A. W INFREE , Spiral Waves of Chemical Activity, *Science* 175, 634–36, 1972.
- [88] K. Y OKOTA AND I. Y AMAZAKI , Analysis and computer simulation of aerobic oxidation of reduced nicotinamide adenine dinucleotide catalyzed by horseradish peroxidase, *Biochemistry*, 16(9):1913–1920, 1977.
- [89] N. YU , R. KUSKE , AND Y. X. LI , Stochastic phase dynamics and noise-induced mixed-mode oscillations in coupled oscillators, *Chaos*, 18(1):15, 2008.
- [90] A. M. ZHABOTINSKII , The early period of systematic studies of oscillations and waves in chemical systems, in R.J. Field and M. Burger, editors, *Oscillations and traveling waves in chemical systems*, Wiley-Interscience, 1985, pp 1–6.

- [91] P. TRACQUI , Mixed-mode oscillation genealogy in a compartmental model of bone mineral metabolism, *J.Nonlinear Science*, 4:69–103, 1994.
- [92] W. C. TROY , Mathematical analysis of the Oregonator model of the Belousov-Zhabotinskii reaction, In R.J.Field and M. Burger, editors, *Oscillations and traveling waves in chemical systems*, Wiley-Interscience, 1985, pp 145–170.
- [93] T. TURANYI , Rate sensitivity analysis of a model of the Briggs-Rauscher reaction, *React. Kinet. Lett.*, 45:235–241, 1991.
- [94] J. J. TYSON , On scaling the Oregonator equations, in C. Vidal and A. Pacault, editors, *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981, pp 222–227.
- [95] J. J. TYSON , A quantitative account of oscillations, bistability, and traveling waves in the Belousov-Zhabotinskii reaction, in R.J. Field and M. Burger, editors, *Oscillations and traveling waves in chemical systems*, Wiley-Interscience, 1985, pp 93–144.
- [96] B. VAN DER POL , A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review*, 1:701–710, 1920.
- [97] B. VAN DER POL , On relaxation oscillations, *Philosophical Magazine*, 7:978–992, 1926.
- [98] B. VAN DER POL , The nonlinear theory of electric oscillations, *Proc. IRE*, 22:1051–1086, 1934.
- [99] F. VAN G OOR , D. ZIVADINOVIC , A. J. MARTINEZ -FUENTES AND S. S. STOJILKOVIC , Dependence of pituitary hormone secretion on the pattern of spontaneous voltage-gated calcium influx, *J. Biol. Chem.*, 276: 33840–33846, 2001.
- [100] O. VAUDEL , N. PÉRAUD , AND P. BESNARD Synchronization on excitable pulses in optically injected semi-conductor lasers *Proc. SPIE*, Vol. 6997:0F, 2008.