开折

詹姆斯 • 默多克 (爱荷华州立大学)

介绍

实际问题的数学模型通常基于理想化的假设。如果模型证明不充分，则可以通过添加最初被忽略的小项来进行改进。通过向给定系统添加小参数而获得的模型称为原始系统的开折。(当参数设置为零时，可以将扩展系统的各种行为描述为隐藏或“折叠”。)

例如，可以通过在每个振荡器中添加代表阻尼和谐振失谐的三个小参数，来改善首先被建模为精确谐振的保守系统的一对耦合振荡器。然后，可以使用摄动方法来获得在小参数中扩展的近似解，并且可以使用分岔分析来确定系统在原始模型的邻域中的行为的定性变化。

开折的数学理论起源于映射的奇异性理论和突变理论。(有关此观点的介绍，请参阅 Bruce 和 Giblin1992。) 在动力系统中，开折表示通过添加来显示接近给定原始系统(有时称为开折的组织中心)的系统的所有可能行为。有限个 k 的小参数 $\mu_1,\ldots, \mu_k$。数字 k 被称为组织中心的维数。首先，必须指定一些允许的系统空间(至少是拓扑空间，通常是光滑流形)，并在该空间上指定一些等价关系，以表示两个等效系统“具有相同的行为”。在这种情况下，指定原始系统(或组织中心)并询问是否存在与该组织中心附近的每个等价类相交的 k 参数族(对于某些 k)是有意义的。如果是这样，则可以实现该理论的目标。如果没有，则据说组织中心具有“无限余维”。

矩阵开折

许多有限维线性系统都可以用平方矩阵表示，无论它是线性变换的矩阵还是微分方程 $\dot{x} = Ax$ 的线性系统的矩阵。无论哪种情况，自然等价关系都是相似性。假设 A_0 是给定的 n×n 矩阵，作为组织中心。我们希望构造一个矩阵族 $A(\mu_1,\ldots, \mu_k)$ 连续(或更佳，平稳地)取决于 $\mu_1,\ldots, \mu_k$，当 $\mu_1=\ldots=\mu_k=0$ 时减小为 A_0，并与附近的每个相似性类相交 A_0 我们可以假设 A_0 为 Jordan 标准型，但对于所有接近零

的 $\mu_1,\ldots,\ \mu_k$，$A(\mu_1,\ldots,\ \mu_k)$ 并非总是 Jordan 形式的情况，因为矩阵的 Jordan 形式并不(总是)连续依赖于矩阵。由于 A_0 的相似度 M 是 R^{n^2} 的光滑子流形(n×n 矩阵的空间)，我们要求 $A(\mu_1,\ldots,\ \mu_k)$，对于 $\mu_1,\ldots,\ \mu_k$ 接近零，必须是光滑嵌入的子流形横向到 M。A_0 的这种开折称为 versal (横向的缩写)，并自动与 A_0 附近的所有相似性类相交(即使这些类具有不同的维度)。参数的最小可能数 k 将等于 R^{n^2} 中 M 的余次(在通常的流形意义上)；这解释了如上定义的“余量”的使用。这种全方位的开折被称为最小开折。

如果 n = 2 并且 $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则余维为 2，则两个不同的最小开折为

$$\begin{pmatrix} \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}。$$

第一种形式称为条纹矩阵。我们可以观察到，该条纹矩阵与 A_0^* 交换(A_0 的伴随或共轭转置)，并且始终可以通过获得与 A_0^* 交换的最通用矩阵来找到矩阵的最小开折。第二种形式说明，如果将“最简单”解释为“具有最多零个条目”，则条矩阵不是开折的最简单选择。(条纹矩阵的优势在于，这种开折不仅垂直于 M，而且相对于内积⟨P，Q⟩= trPQ ∗是正交的。)这些开折(对于任何大小的矩阵)都是由于 Arnold 所致，并且在 Arnold(1988，第 30 节)，Wiggins(2003，第 20.5 节)和 Murdock(2003，第 3 章)中进行了解释。

与标准型的关系

开折与标准型思想之间存在密切的关系。任何具有 $A(0)= A_0$ 的矩阵的光滑一参数族 $A(\varepsilon)$ 都可以嵌入(相似度)到 A_0 的任何最小开折 $A(\mu_1,\ldots,\ \mu_k)$ 中；也就是说，存在一个平滑的矩阵族 $T(\varepsilon)$，其中 $T(0)= I$ 使得

$$T(\varepsilon)^{-1}A(\varepsilon)T(\varepsilon) = A(\mu_1(\varepsilon),\ldots,\mu_k(\varepsilon)) ,$$

函数 $\mu_i(\varepsilon)$ 是平滑的。开折的形式以及 $\mu_i(\varepsilon)$ 的幂级数开折可以通过常规形式方法来计算。 写成 $U(\varepsilon) = I + \varepsilon U_1 + \cdots$ 和 $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \cdots$ 并设置

$T(\varepsilon)^{-1}A(\varepsilon)T(\varepsilon) = B(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon B_1 + \cdots$ ，发现

$$L_{A_0}U_1 = A_1 - B_1 ,$$

其中 LPQ = QP-PQ。相似的等式方程存在较高的阶数。选择 L_{A0} 图像的补码(即选择正常的样式)可以固定 $B(\varepsilon)$ 属于的开折形式，其余计算将确定 $\mu_i(\varepsilon)$。条纹矩阵开折来自内积标准型样式 ker Λ_{A_0*}，而上面说明的第二种开折类型来自简化的标准型样式。

动力系统的开折

对于非线性动力系统，要定义一个合适的系统空间和等价关系开始要困难得多。系统的任何合适空间都是无穷大的，并且在最自然的等价关系(拓扑等价或拓扑共轭)下，大多数系统证明具有无限余维，因此不可能进行全面开折。我们必须将注意力集中在拓扑等价性有限的少数几个(但很重要)系统上，或者采用较粗略的等价关系。一种经常使用的等价关系是静态等价关系，在这种关系中，注意力仅限于平衡解。

静态对等状态下的动力学系统的开折是指显示平衡点(其余)的所有可能分岔，直至平衡集的拓扑对等。最容易将问题定位到组织中心的单个平衡点的分支上。由于没有在双曲方向发生分岔，因此足以在其中心歧管上开折系统。各种情况通过假想轴上的雅可比矩阵的特征值(即处于平衡状态的线性化系统)进行分类。

单个零特征值

最简单的情况是，系统在平衡点处具有一个零本征值，从而导致维度为 1 的中心流形。由于系统的行为应由最低阶项主导，因此，人们考虑了一个 $\dot{x} = x^k$ (k 为正整数)形式的(标量)组织中心。静态等价下的开折是

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + \cdots + \mu_{k-1} x^{k-2} + x^k ,$$

有趣的是没有 x^{k-1}。例如，

- $\dot{x} = x^2$ 的开折是 $\dot{x} = \mu_1 + x^2$，随着 μ_1 的变化，它呈现出鞍-结分岔。
- $\dot{x} = x^3$ 的开折是 $\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + x^3$ 。 如果 $\mu_1 = 0$，则随着 μ_2 的变化，将产生一个叉形分岔。 μ_1 是“不完美参数”，其将叉形分成鞍-结点分岔和连续曲线(即不分岔的平衡曲线)。

这种分析与奇点理论中开折的原始用法非常接近。有关更多信息，请参见 Murdock(2003)的 6.3 节，有关此方法的完整详细信息，请参见 Golubitsky 和 Schaeffer(1985)和 Golubitsky 等(1988)。 (在最后的参考文献中，开折参数之一被视为分岔参数，不计入余维。)

共轭对

组织中心

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} ,$$

它是(半单的)标准型，在二次项处被截断，并具有特征值 $\pm i$ 的共轭对，采用以下形式

$$\dot{r} = \alpha r^3$$

$$\dot{\theta} = 1 + \beta r^2 .$$

如果 $\alpha \neq 0$，则在局部拓扑等价(但不是拓扑共轭)下的开折为

$$\dot{r} = \mu_1 r + \alpha r^3$$

$$\dot{\theta} = 1 + \beta r^2 .$$

当 μ_1 变化时，这表现出 Andronov-Hopf 分岔。

非半单双特征值

对于具有非半单线性部分的双零特征值，组织中心为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha x^2+\beta xy\end{pmatrix},$$

带有(简化)标准形式的二次项。假设$\alpha\neq 0$，则开折为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\mu_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha x^2+\beta xy\end{pmatrix}.$$

值得注意的是，这可以证明在拓扑等价性下正在开折。(该证明很困难，并且使用了几种“爆破解”技术中的一种或另一种。) 有关进一步的讨论，请参见 Bogdanov-Takens 分岔。

将该开折与以上给出的$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$的矩阵开折进行比较，可以看到该维数相同，但是一个开折参数出现在常数项而不是矩阵中。这种现象很典型，如下所示，通过渐近开折可以看出。

其他例子

有关以基本方式呈现的开折的其他示例，请参见 Kuznetsov(1998)，Guckenheimer 和 Holmes(1986)和 Wiggins(2003)。有关通过爆破技术证明的与拓扑等效性有关的某些开折的详细处理，请参见 Dumortier 等(1991)。

渐近开折

与矩阵的情况一样，可以从标准形式的角度来研究动力系统的开折。从组织中心开始

$$\dot{x}=Ax+a_1(x)+a_2(x)+\cdots$$

在标准型(某种选定样式)中，请考虑以下形式的任意一参数扰动(其中项的维数为下标加 1)：

$$\dot{x}=Ax+a_1(x)+a_2(x)+\cdots$$

$$+\varepsilon(p+Bx+b_1(x)+b_2(x)+\cdots)+\cdots.$$

最终的…指的是 ε 的高次幂。注意， ε 部分包含一个常数项 p，该常数在不扰动的系统中不存在。可以应用标准型方法来简化 p，B，b_i 等。任何无法消除的系

数都将成为以 ε 表示的开折参数。在 x 中以有限的度数停止计算会给出有限的维数开折，但是(通常)相对于拓扑等价而言不是横向开折。然而，通常有可能证明开折正确地表现出行为的特定特征。在关于二次项 a_2 的一般假设下，以常数和线性项(来自 p 和 B)的开折参数的数量始终等于 A 矩阵开折的余维，在最后一节中说明了这一点。渐近开折已被非正式地使用了多年，没有名称，Elphick 等人(1992)对此进行了计算。 Murdock(2003)第 6.4 节给出了一般处理。(此后已消除了对简化的普通形式样式的限制，请参见 Murdock 和 Malonza。) 这种开折方法使开折的计算非常容易，如参考文献中的示例 14 所示。来自高维数的结论是完全另一回事。)

参考文献

1、Arnold V. I. (1988) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.Springer, New York, second edition.

2、Bruce J. W. and Giblin P. G. (1992) Curves and Singularities. Cambridge University Press, Cambridge, England, second edition.

3、Dumortier, F. and Roussarie, R. and Sotomayor, J. (1991) Generic three-parameter families of planar vector elds, unfoldings of saddle, focus, and elliptic singularities with nilpotent linear parts. Lecture Notes in Mathematics, 1480:1-164.

4、Elphick C., Tirapegui E., Brachet M. E., Coullet P., and Iooss G. (1987) A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. Physica D, 29:95–127.

5、Golubitsky M. and Schaeffer D.G. (1985) Singularities and Groups in Bifurcation Theory, volume 1. Springer, New York.

6、Golubitsky M., Stewart I., and Schaeffer D.G. (1988) Singularities and Groups in Bifurcation Theory, volume 2. Springer, New York.

7、Guckenheimer J. and Holmes P. (1986) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Corrected second printing, Springer, N.Y.

8、Kuznetsov Y.A. (1998) Elements of Applied Bifurcation Theory, Second edition, Springer, N.Y.

9、Murdock J. (2003) Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems. Springer, New York.

10、Murdock J. and Malonza D.M. Improved computation of asymptotic unfoldings. In preparation.

11、Wiggins S. (2003) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, New York, second edition.

内部参考文献

12、Yuri A. Kuznetsov (2006) Andronov-Hopf bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1858.

13、Jack Carr (2006) Center manifold. Scholarpedia, 1(12):1826.

14、James Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902.

15、Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.

16、Yuri A. Kuznetsov (2006) Saddle-node bifurcation. Scholarpedia, 1(10):1859.

外部链接

Author's webpage

也可看

分岔，动力系统，平衡，Jordan 标准型，标准型，常微分方程

赞助者：学者评审的开放式百科全书“学术百科”总编辑 Eugene M. Izhikevich

评论者：匿名

接受日期：2006-12-08 00:53:08 GMT