

## 符号动力学

Brian Marcus and Susan Williams (2008), Scholarpedia, 3(11):2923.

Dr. Brian Marcus, Mathematics Department, Univ. British Columbia

Susan Williams, Department of Mathematics and Statistics, University of South Alabama

符号动力学是对移位空间的研究，它由无限或双无限序列组成，由有限长度子词上的移位不变约束定义。两个这样的空间之间的映射可以看作是代码或编码。利用组合不变量、代数不变量、拓扑不变量和测度理论不变量对移位空间进行了分类，并根据不同的可逆编码对其进行了分类。这门学科与[动力系统](#)、遍历理论、自动机理论和信息论密切相关。

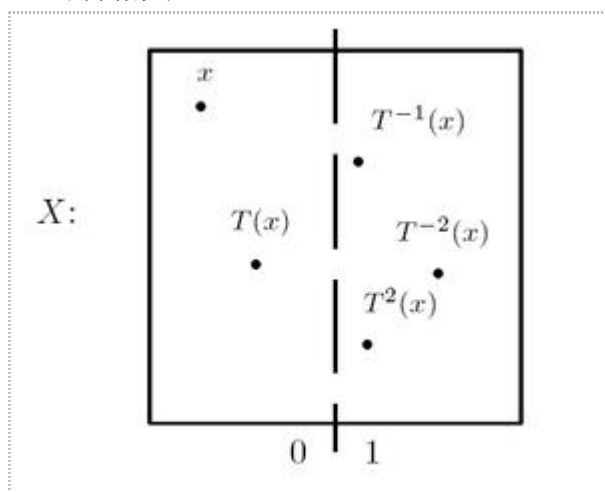


图 1:用符号表示点

### 起源

广义上讲，可逆动力系统是一个集合  $X$ ，加上一个可逆映射  $T:X \rightarrow X$ 。 $x \in X$  的轨道轨迹  $\{\dots, T^{-2}(x), T^{-1}(x), x, T(x), T^2(x), \dots\}$  (在这里,  $T^2(x) = T \circ T(x)$ , 等等)。符号动力学是一种通过离散空间来分析动力系统的工具。想象一个点沿着空间的轨迹运动。将空间分割成有限的许多块，每一块都用不同的符号标记。通过写出该点在其轨道上访问的连续划分单元所对应的符号序列，得到符号轨道。人们可以通过研究系统的符号轨道来了解系统的动力学。

例如，考虑图 1 中的动力系统。这里， $X$  是单位平方， $T$  是  $X$  的一个变换。绘制点  $x \in X$  的部分轨道。 $X$  被划分为两个单元格:左半部分标记为“0”，右半部分标记为“1”。则点  $x$  表示为双无限序列  $s(x) = \dots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2 \dots$ , 其中  $s_n$  为  $T^n(x)$  所属单

元的标签;小数点将坐标  $s_i, i < 0$  和  $s_i, i \geq 0$  分开。对于图 1 所示的  $x$ ,  $s_0 = 0$  因为  $x$  属于正方形的左半部分,  $s_2 = 1$  因为  $T^2(x)$  属于正方形的右半部分, 以此类推:

$$s(x) = \dots 11.001 \dots$$

现在, 如果  $x$  用序列  $s(x)$  表示, 那么  $T(x)$  用  $s(x)$  左坐标位移表示:

$$s(T(x)) = \dots 110.01, \dots$$

因此,  $T$  被“符号化”地表示为序列空间上的移位变换。

上图描述了轨道的一部分面包师的转换

$$T(x, y) = \left( 2x \bmod 1, \frac{y + \lfloor x/2 \rfloor}{2} \right).$$

将单元格视为在公共边界上重叠的封闭集合, 使得落在该边界上的点具有非唯一的符号轨道; 在本例中, 单元格在中央水平线上重叠(因此, 单元格可能不会形成真正的分区)。有了这样的理解, 所有的二进制序列都得到了符号轨道。一般来说, 给定  $T$ , 我们寻找的划分, 其中的符号轨道集是有明确的规则约束。为例。双曲海滨自同构的马尔可夫划分引起有限型的移位, 定义如下(Adler and Weiss [1970])

对于可逆动力系统, 如上所述, 同时考虑了前向和后向迭代。符号动力学同样适用于非可逆动力系统, 尽管在这种情况下只考虑正向迭代, 并且符号轨迹是单边无限序列。映射  $x \mapsto \lambda x \bmod 1$  单位间隔, 片面的集合序列获得在很大程度上依赖于  $\lambda$  和分区选择。举个例子, 如果  $\lambda = 2$ , 并且分区是  $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$ , 那么你将得到所有单侧二进制序列; 如果使用的是平均分割, 分区为  $\{[0, 1/\lambda], [1/\lambda, 1]\}$ , 则获得所有不包含两个连续 1 的单边序列。

这样, 我们就用符号动力学来研究动力系统。原始动力系统的轨道性质反映在序列的性质上。例如, 一个点的轨道是周期性的, 给出一个周期序列,  $x$  中一个点  $x$  的轨道分布反映在  $s(x)$  的有限连续子串的分布上。符号动力学也可以用于分类动力系统; 在这里, 决定一个动力系统何时与另一个动力系统“等价”的问题, 通过符号动力学, 变成了一个编码问题。

阿达马[1898]通常被认为是第一个在分析负曲率表面上的测地线流时使用符号动力学技术的人。40年后, 摩尔斯和赫德伦[1938, 1940]和赫德伦[1944]的基础论文首次对这一课题进行了系统的研究, 并将其命名。在这里, 符号系统第一次被抽象地对待, 作为它们本身的对象。这项抽象的研究是由符号系统内在的数学兴趣和需要更好地理解它们, 以便将符号技术应用到连续系统。Shannon[1948]开创的信息论和通信数学理论, 以及动力系统的全局理论(斯梅尔[1967])的出现, 进一步推动了这一理论的发展。符号动力学在动态系统(如双曲和[部分双曲](#)的微分同构和流、区间映射、台球和复杂动力学)和动态系统(如信息论、自动机理论和矩阵理论)外部不断扩大的领域中得到应用。

## 完全移位和移位空间

有限字母  $A$  上的(双面)全  $A$  移位是由所有双无限符号序列的集合以及将所有序列向左移位的移位映射序列组成的动力系统。更正式的, 完全移位  $A^Z = \{x = (x_i)_{i \in Z} : x_i \in A, \forall i \in Z\}$ , 映射序列:  $A^Z \rightarrow A^Z$  由  $(\sigma x)_i = x_{i+1}$  定义。如果  $A = \{0, 1, \dots, r-1\}$ ,  $A^Z$  称为全  $r$  移位。符号  $x_m \cdots x_n$  的有限字符串(也称为字或块)通常表示为  $x_{[m,n]}$ 。

使用双无限序列的优点是移位映射是可逆的。然而, 人们也可以考虑单方面的  $A$ -移位和  $A^Z$ 。为简单起见, 本文中的概念是在双边上下文中描述的。大多数定义自然地适应于片面的设置, 尽管在结果上有一些显著的差异。

在  $A^Z$  上, 全移位被赋予了产品拓扑。在该拓扑中, 两点  $x, y \in A^Z$ , 如果它们在一个较大的中心块上一致, 则认为它们是“接近的”: 即对于某个较大的  $n$ ,  $x_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}$ 。度量的具体选择并不重要, 只要它反映了“紧密性”的概念。请注意, 移位映射曲线和它的逆是连续的: 如果  $x$  和  $y$  在它们的中心  $2n+1$  坐标上一致, 那么  $\sigma x$  和  $\sigma y$  至少在它们的中心  $2n-1$  坐标上一致。

移位空间(或移位或子移位)是完整移位的一个封闭的、移位不变的子集。等价地: 设  $F$  为块的任意集合(有限或无限); 不包含  $F$  的任何元素的序列的集合  $X = X_F$  是一个移位空间, 任何移位空间都可以用这种形式表示。下面是一些简单的例子。

#### 黄金分割的转变

$X$  是所有没有两个连续 1 的二进制序列的集合。这里是  $X = X_F, F = \{11\}$ 。

#### 偶数转变

$X$  是所有二进制序列的集合所以在任意两个 1 之间有偶数  $\{10^{2n+1}1 : n \geq 0\}$ 。

#### 正常转变

$X$  是所有二进制序列的集合使得在任意两个连续的 1 之间, 0 的个数是质数。人们可以认为集合  $F$  为  $\{10^n 1 : n \text{ 不是素数}\}$

设  $X$  是一个全移位的子集, 设  $B_N(X)$  表示  $X$  元素中所有长度为  $N$  的块的集合。

$X$  的**语言**是  $B(X) = \cup_N B_N(X)$ 。这表明, 移位空间的语言唯一地决定了移位空间,

因此可以通过指定“发生的”或“允许的”块，而不是禁止的块，同样地很好地描述移位空间。例如，黄金平均偏移是由块的语言指定的，其中 1 是孤立的。另一个突出的例子是：

莫尔斯的转变

设  $A_0=0$ ，归纳地定义块

$A_{n+1} = A_n \overline{A_n}$ ，其中  $\overline{A_n}$  是指位的补。移位空间，其允许的块就是所包含的那些块有些叫做莫尔斯位移。

给定一个移位空间  $X$  和一个正整数  $N$ ，我们可以构造两个相关的移位空间，它们定义在字母表  $B_N(X)$  上。更高次幂的移位  $X^N$  是将  $X$  的每个元素视为的序列，

得到的移位空间大于  $B_N(X)$

长度为  $N$  的非重叠块：

$$X^N = \{\dots x_{[-N,-1]}x_{[0,N-1]}x_{[N,2N-1]}\dots : x \in X\}$$

较高的块移位  $X[N]$  是将  $X$  的每个元素作为重叠块序列得到的大于  $B_N(X)$  的移位空间：

$$X^N = \{\dots x_{[-1,N-2]}x_{[0,N-1]}x_{[1,N]}\dots : x \in X\}$$

## 编码和共轭性

让  $x = \dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots \in X$ ， $a$  上的移位空间  $A$ 。我们可以把  $x$  转换成一个新的序列

$y = \dots y_{-1} \cdot y_0 y_1 \dots$ 。在另一个字母  $C$  上，如下所示。固定整数  $m$  和  $n$ ，且  $-m \leq n$ 。

计算第  $i$  个坐标转换序列的彝族，使用一个函数  $\Phi$  取决于“窗口”的  $x$  坐标位置  $i-m$  位置  $+n$ 。这里  $\Phi: B_{m+n+1}(X) \rightarrow C$  是一个固定块地图，从允许  $(m+n+1)$  块在  $CX$  符号，所以

$$y_i = \Phi(x_{i-m} x_{i-m+1} \dots x_{i+m}) = \Phi(x_{\langle i-m, i+n \rangle})$$

映射  $\Phi: X \rightarrow C^Z$  定义为  $y = \phi(X)$  与易由  $\Phi$  以上，称为滑块代码与 [记忆](#)  $m$  和  $n$   $\Phi$  引起的预期。如图 2 所示， $m=1$  和  $n=2$ 。

如果  $Y$  是一个转变空间包含在  $C^Z$ ， $\phi(X) \subseteq Y$ ，一个也写  $\phi: X \rightarrow Y$ 。

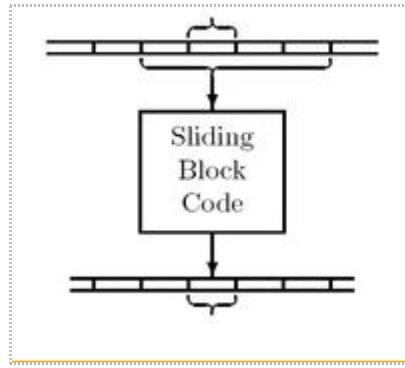


图 2:滑动块代码

通过将域移位  $X$  替换为其更高的块移位  $X^{[n+m+1]}$ , 任何滑动块代码都可以被“编码”为 1 块代码(即窗口长度为 1)。

与将移位空间描述为封闭的移位不变量集类似, 滑动块码可以用一种拓扑方式来描述:即, 作为连续的、与移位可交换的移位空间之间的映射。这个结果被称为柯蒂斯-赫德伦-林登定理(Hedlund[1969])。

移位映射及其逆是滑动块码最简单的例子。下面是一些其他简单的例子。

## 2 比 1

设  $A = \{0,1\} = C^Z$ ,  $X = A^{mZ^n}$ ,  $m=0, n=1$ ,

和  $\Phi(a_0 a_1) = a_0 + a_1 \pmod{2}$ 。诱导滑块代码  $\phi$  是 2-1 映射从  $X$  到本身。

滑块的代码由  $\Phi(00) = 1, \Phi(01) = 0 = \Phi(10) (m + n = 1)$  将黄金均值偏移映射到偶数偏移上微不足道的。有一个小滑块从全 2-shift 到全 3-shift 代码, 由  $\Phi(0) = 0, \Phi(1) = 1$  与  $m = n = 0$ 。如果一个滑块代码  $\phi: X \rightarrow Y$ , 那么它被称为因子代码或因子地图,  $Y$  是  $X$  的一个因素。如果  $\phi$  是一对一的, 那么它被称为  $X$  到  $Y$  的嵌入。如果它是一对一的并且映上的, 那么它被称为(拓扑)共轭(这等价于它有一个滑动块代码的逆)。平凡示例是嵌入代码而不是因子代码, 而示例 2 到 1 和 golden to even 是因子代码, 但不是嵌入代码。移位图的任何能力都是从移位空间到自身的共轭, 但典型的共轭要复杂得多。

给定  $X$  和  $Y$  的移位空间, 我们想知道  $X$  是否可以被分解到  $Y$  上, 或者嵌入到  $Y$  中, 或者是  $Y$  的共轭。这些问题, 特别是 SFT 和 sofic 转换(在下一节中介绍), 是符号动力学的中心问题。

## 有限类型的移位和有限类型的移位

有限类型的移位(SFT)是一种移位空间, 它可以由一个有限的禁止块列表来描述。等价于一个平米可以描述而言, 允许块如下: 对于一些整数  $M$ , 只要你是一个允许块长度至少  $M$ ,  $u'$  是你的后缀长度  $M$  和  $a$  是一个符号, 然后允许  $u'a$  当且仅当  $u$

是允许的。换句话说，为了判断一个符号是否可以被允许连接到一个允许的单词  $u$  的末尾，我们只需要查看  $u$  的最后  $M$  个符号。这种 SFT 称为  $m$  步 SFT，类似于  $m$  步马尔可夫链的“有限记忆”性质。一步 SFT 也称为拓扑马尔可夫链。黄金平均偏移  $X$  是一个 1 步 SFT，因为它只是一个允许块的最后一个符号，决定了一个给定符号是否可以在最后被连接。相反，偶数移位不是 SFT: 对于任何  $M$ ，符号 1 可以被连接到(允许的)块  $10^M$  和  $10^{M+1}$  的末尾。质点位移和莫尔斯位移都不是 SFT。

任意  $m$  阶 SFT  $X$  是 1 阶 SFT 的共轭。描述一个共轭性, 我们把我们的新字母  $C$  组允许  $M$ -blocks  $u(X)$ , 让  $\Phi$  块地图, 以一个  $M$ -block  $X$  到相应的符号  $C$ 。不难看出, 诱导滑动块代码是一个一对一的因子映射, 其图像为 1 步 SFT。

1 步 SFT 可以具体地描述为一个有限有向图(或简称图), 它由顶点(或状态)集  $V$  和边集  $E$  组成; 每条边都有一个初始顶点和一个终顶点。通常假设每个顶点至少有一条出边和至少一条进边。对于符号动力学而言, 这一假设不会造成一般性的损失。为了表示给定的 SFT  $X$ , 我们设  $V$  是  $X$  的字母; 对于  $X$  的每个允许的 2 块  $ab$ , 都有一条初始顶点  $a$  和末端顶点  $b$  的边。

例如, 黄金均值偏移是通过读取图 3 中所示的图中顶点序列的路径而获得的所有序列的集合。更一般地说, 给定任何图, 通过遵循有效路径得到的所有双无限顶点序列的集合构成一个 SFT。这种 SFT 称为顶点移位。顶点移位实际上与 1 步 SFT 是相同的, 并且直到共轭度, 所有的 SFT 都可以实现为顶点移位。

有时使用边(而不是顶点)作为符号是有用的; 序列是沿有效路径得到的边序列。这种 SFT 称为边移。使用边而不是顶点通常允许使用较小的图, 代价是允许多个边都具有相同的起始点和结束点。如果  $X$  和  $Y$  是顶点和边变化基于图  $G$  最多一个边缘从任何其他顶点的顶点, 然后滑块代码  $\phi: X \rightarrow Y$  定义的映射  $\Phi(IJ) = e$ ,  $e$  是一个从  $I$  到  $J$ , 是一个共轭性。

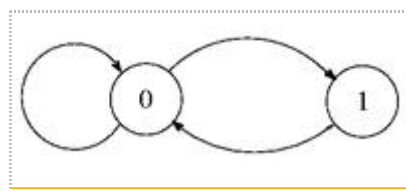


图 3: 作为顶点偏移的黄金均值偏移  $a$

一个移位空间  $X$  是  $\{\text{不可约}\}$ , 如果当  $u$  和  $w$  是允许的块, 有一个 '连接块  $v$ , 这样  $uvw$  是允许的。同理, 点  $x \in X$ , 其前向轨道  $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\}$  在  $X$  中是稠密的。不可约 SFT 比一般 SFT 更容易理解, 研究一般 SFT 可以通过研究其最大不可约子移位(称为不可约分量)来实现。

sofic 位移是 SFT 的一个因素(Weiss[1973])的位移空间。同样地, 给定图  $G$  的每条边(或顶点)都用字母表中的符号进行标记, 那么图  $G$  中路径的双无限标记序列集就是一种特定的移位。而每一次太平洋的转变都以这种方式呈现出来。而偶移不是 SFT。这是一个 sofic 的转移, 如图 4 所示。注意, 这里允许不同的边(或顶点)有相同的标签。



Sofic 移位可以看作是“有限状态系统”:在一个标记图中,顶点可以看作是连接过去序列和未来序列的状态信息。SFT 是泛太平洋转移的一种特殊类型;任何  $m$  步 SFT 都可以用其状态为允许  $m$  块的边标记图来表示。自动机理论的泵激引理的一个版本表明,质数的转移不是 sofic 的(Aho, Hopcroft, and Ullman[1974])。不难看出莫尔斯的移动是不准确的。

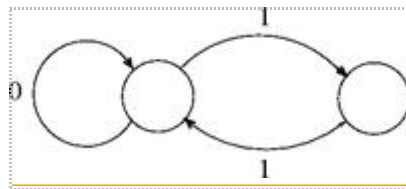


图 4:偶数移位的表示

表示特定变化的标记图称为演示图。通常容易使用演示正确的解决,这意味着在任何给定的状态,所有即将离任的边缘有明显的标签(如张挂 4)。事实上,每一个 sofic 转变可以以这样一种方式,和每一个不可约 sofic 转变都有独特的最小的正确的解决。这些结果与自动机理论的结果密切相关(Beal [1993], Berstel 和 Perrin[1985])。

SFT 和 sofic 变换在动态系统建模和数据记录应用中是有用的。然而,这些类仅仅触及了一般移位空间所表现的行为范围的表面。特别有趣的是最小移动空间,即每个点都有一个密集的向前轨道。这是典型的莫尔斯位移。除了一些微不足道的情况外, SFT 和 sofic 的变化并不小。

## 共轭不变量和共轭问题的变式

共轭问题是确定两个给定的位移空间是共轭的问题。共轭不变量是指在共轭下保留的与移位空间相关的任何属性或对象。不可约性是不变的,有限类型的移位或有限移位的性质也是不变的。

SFT 的共轭问题简化为顶点移位(或边移位)的共轭问题,因为每个 SFT 都与这样的移位共轭。SFT 和 sofic 位移的不变量自然是通过图来描述的。例如,一个顶点移位或边移位是不可约的,当且仅当它的基础图是不可约的,这意味着对于每一对顶点  $I$  和  $J$ , 在  $\sim G$  中都有一条从  $I$  到  $J$  的路径。

给定图  $G$ , 邻接矩阵  $a = a(G)$  是由顶点  $V$  索引的矩阵; $A_{IJ}$  是  $G$  中从  $I$  到  $J$  的边数。由于图及其邻接矩阵本质上决定了相同的信息, 当指定一个顶点移位或边移位时, 习惯上在图及其邻接矩阵之间自由地来回传递。

其中最重要的不变量是[拓扑熵](#), 其定义为:

$$h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |B_N(x)|}{N};$$

在这里,  $| \cdot |$  表示基数。

显然,  $h(X)$  是  $X$  的“大小”或“复杂性”的度量, 因为它仅仅是出现在  $X$  中的块数量的渐近增长率。粗略地说, 如果  $\log$  以 2 为底,  $h(X)$  就是  $|B_N(x)| \sim 2^{Nh}$  的数字  $h$ 。

连续动力系统的拓扑熵, 特别是移位空间的拓扑熵, 是由阿德勒、Konheim 和麦克安德鲁[1965]提出的。熵是共轭不变量, 在因子作用下不增加, 在嵌入作用下不减少。

在许多情况下, 人们可以明确地计算熵。对于整个  $r$  移  $X$ ,  $|B_N(x)| = r^N$ , 所以  $h(X) = \log r$ 。如果  $X$  是基于图  $G$  的顶点移位或边移位, 则  $h(X) = \log \lambda_{A(G)}$ , 其中物项  $\lambda_{A(G)}$  是  $A(G)$  的最大特征值。这一结果依赖于 Perron-Frobenius 理论 (Seneta[1980])。

从图 3 中可以看出, 黄金均值移位是带邻接矩阵的图的顶点移位:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

通过一个简单的计算可以看出, 模型的拟合率  $A$  是黄金均值, 因此黄金均值漂移的熵就是黄金均值的对数。

根据图  $G$  的特定位移  $X$  给出正确的解析表示, 可以看出  $h(X)$  等于图  $G$  的顶点移位或边移位的熵。这就提供了一种计算 sofic 偏移熵的方法。从图 4 可以看出, 偶数移位的熵也是黄金平均数的对数。

熵作为一个不变量的重要性怎么强调都不过分。然而, 它有些粗糙; 一个单一的数值不变量不足以完全捕捉移位空间的许多复杂之处, 甚至是 sofic 移位或 SFT, 这也许并不令人惊讶。另一个在许多情况下更精细的不变量是基于周期序列的, 如下所示。

对于一个移位空间  $\sim X$ , 设  $P_n(x)$  表示周期  $n$  在  $X$  上的点数 (即  $x \in X$  的个数使  $\sigma^n(x) = x$ )。很明显, 每个  $P_n(x)$  都是一个不变量。由于不同周期序列定义不同的块, 因此

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p_n(x) \leq h(x)$$

不等式可以是严格的。事实上, 有正熵的移位空间, 但没有任何周期点。(例如莫尔斯移位与全 2 移位的笛卡尔积, 可视为字母  $\{0,1\}^2$  的移位) 而对于 SFT 和 sofic 移位, 可以从序列  $P_n(x)$  中恢复熵  $h(X)$ :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p_n(x) \leq h(x)$$



周期点信息可以方便地组合成一个单一的不变量,称为 zeta 函数。对于一个移位空间  $X$ , 有

$$\zeta_X(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(X)}{n} t^n\right)$$

优势转变或顶点转变基于图形与邻接矩阵,  $\zeta$  函数是一个多项式的倒数:

$$\zeta_X(t) = \frac{1}{t^{\Gamma} X_A(t^{-1})} = \frac{1}{\det(I - tA)},$$

(在这里,  $X_A$  是特征多项式)是完全由非零特征值(多样性)的(鲍恩和 Lanford[1970])。举例来说,黄金均值转移的函数是  $\frac{1}{1-t-t^2}$ 。对于一个特定的移位,函数变成了有理函数,即两个多项式的商。这可以通过分析 sofic 位移的正确解析表示的特性来显示。结果表明,偶移的函数是  $\frac{1-t}{1-t-t^2}$ 。计算 sofic 位移的 zeta 函数的技术是由 Manning[1971]和 Bowen[1978]开发的。因此,对于 sofic 位移(特别是 SFT),所有的周期点信息都是由有限的复数集合决定的,即 zeta 函数的零和极点。

两个非负平方积分矩阵,  $A$  和  $B$ , 据说转变相当于如果有非负整数  $\ell$  和一对  $(R, S)$  的矩形非负积分矩阵满足:

$$AR = RB, SA = BS, A^\ell = RS, B^\ell = SR$$

R. F. Williams[1973]引入了移位等价性,并证明了移位等价类对于 SFT 是不变的:如果两个顶点移位是共轭的,那么相关的邻接矩阵是移位等价的。虽然这不是一个完全不变量(Kim and Roush [1999], Wagoner[2004]),但它封装了许多非常强的不变量,远远超过了熵和 zeta 函数。它还提供了一种通过称为状态分裂的具体图论操作构建共轭的方法(见图 5,其中右边的图是通过分裂左边的图的状态得到的)。然而, SFT 和 sofic 的共轭问题仍然非常开放。

关于共轭问题的各种变体已经取得了很大进展。例如, SFT 的  $X$  和  $Y$  被称为最终共轭,如果对于足够大的  $N$  和所有  $n \geq N$ , 更高的幂移  $X^n$  和  $Y^n$  是共轭的。不可约 SFT 完全由移位等价分类,直到最终共轭(Kim 和 Roush[1979, 1988])。两平米的  $X$  和  $Y$  是几乎共轭如果有三分之一 SFT  $Z$ , 和因素代码从  $Z$  到  $X$  和  $Y$  到  $Z$ , 几乎是一一对一的,也就是说,一一对一的对一个开放的稠密集。熵,在非常温和的条件周期点,完全将几乎不可约 SFT 的[拓扑共轭性](#)(阿德勒和马库斯[1979])。

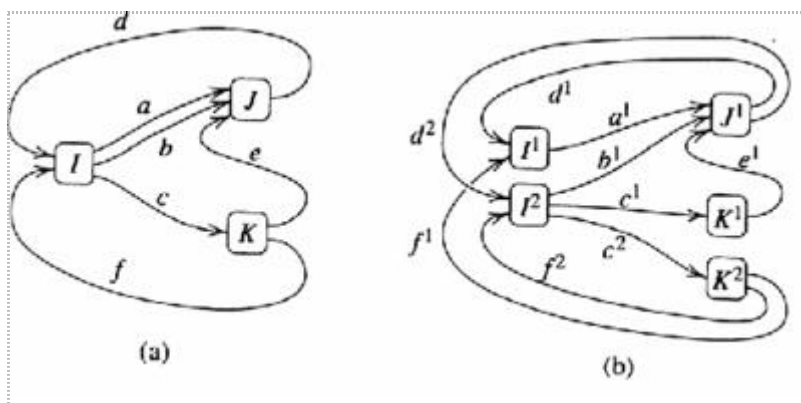


图 5:分裂状态

在 SFT 和 sofic 转变的因素和嵌入问题上也取得了很大进展。其中一些在 Boyle, Marcus 和 Trow[1987]中有描述。特别有趣的是嵌入定理(Krieger[1982]), 它解决了不可约 SFT 的适当嵌入问题, 后来被应用于解决矩阵理论中的一个问题, 即刻画非负实矩阵的非零特征值集(Boyle and Handelman [1991];参见 Kim, Ormes 和 Roush[2000])。

## 其他方向

符号动力学与遍历理论密切相关, 遍历理论研究的是保测度变换的动力学, 特别是平稳随机过程(其中度量空间是序列空间, 变换是移位映射)。关于遍历理论的介绍, 可以参考其中一本教科书, 如 Petersen[1983]、Rudolph[1990] 或 Walters[1982]。平稳过程的支持是一个移动空间, 人们可以把移动空间的语言看作是这样一个过程的可能结果的集合。在[遍历理论](#)中, 有一个度量论熵的概念, 在这个概念的支持下, 位移空间的拓扑熵就是平稳过程的度量论熵的上限值。对于不可约 SFT 和 sofic 转移, 最高可由一个称为{bf 帕里措施}的显式进程唯一地实现(该措施由 Shannon 引入, 但帕里[1965]证明了唯一性)。不可约 SFT 的 X 和 Y 之间的共轭将保持测度, 因此可以看作是 X 和 Y 之间一个非常强的、具体测度论的同构。在共轭和度量理论的同构之间的大量同构概念继续被研究(例如, Parry 和 Tuncel [1982], Marcus 和 Tuncel[2001])。

度量理论熵和拓扑熵都是 Shannon[1948]提出的信息理论熵的后代。信息论研究有噪声的传输信道和记录信道, 并试图找到可靠传输和有效、可靠的编码/解码方案的最佳速率(见封面和 Thomas[1991]对信息论的介绍)。对于某些信道, 为了实现可靠的传输, 需要将任意消息编码为满足一定约束条件的序列, 例如在两个 1 之间的连续零个数的上限。符号动力学在提供构造这样的编码器的框架中扮演了重要的角色。Adler, Coppersmith 和 Hassner[1983]构造了一类编码器, 使用为解决 SFT 和 sofic 移位的共轭性和因子问题而开发的结果。这是约束编码严格理论的开端(Marcus, Roth 和 Siegel[1998])。

符号动力学的主要概念自然可以推广到更高的维度, 即(多维的)数组空间, 而不是一维的序列空间。在这种背景下, 符号动力学与平铺系统和统计力学有着密切的联系。然而, 本文中讨论的问题在这种设置中更加困难。甚至确定二维 SFT(由数组中禁止模式的有限列表定义)是否是非空的看似无关紧要的问题, 也

被证明是不可确定的。仅对少数二维 SFT 的拓扑熵进行了计算。关于这些难题的早期研究可以在 Berger[1966]、Kastelyn[1967]和 R.M. Robinson[1971]中找到。Lind[2004]给出了多维符号动力学的解释性处理，E. A. Robinson[2004]对平铺系统做了同样的处理。最近一个值得注意的进展是由 Hochman 和 Meyerovitch(2007)对高维 SFT 的熵的描述。

其他重要的方向包括单边移位空间、可数状态符号系统、轨道等价、流等价、移位空间的自同构群、元胞自动机、替代系统和与纽结理论的联系。

### 参考文献

- R. L. Adler, D. Coppersmith, and M. Hassner. *Algorithms for sliding block codes -- an application, of symbolic dynamics to information theory*. IEEE Trans. Inform. Theory, 29 (1983), 5--22.
- R. Adler, A. Konheim, and M. McAndrew. *Topological entropy*. Trans. Amer. Math. Soc., 114 (1965) 309--319.
- R. Adler and B. Marcus. *Topological Entropy and Equivalence of Dynamical Systems*. Mem. Amer. Math. Soc. 219 (1979).
- R. Adler and B. Weiss. *Similarity of Automorphisms of the Torus*. Mem. Amer. Math. Soc., 98 (1970).
- A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, 1974.
- M.-P. Béal. *Codage Symbolique*. Masson, 1993.
- R. Berger. *The Undecidability of the Domino Problem*. Mem. Amer. Math. Soc., 1966.
- J. Berstel and D. Perrin. *Theory of Codes*. Academic Press, 1985.
- F. Blanchard, A. Maass, and A. Nogueira. *Topics in Symbolic Dynamics and Applications*. LMS Lecture Notes 279, Cambridge University Press, 2000.
- R. Bowen. *On Axiom A Diffeomorphisms*. NSF-CBMS Lectures, v. 71, 1978.
- R. Bowen and O. E. Lanford. *Zeta functions of restrictions of the shift transformation*. Proc. Symp. Pure Math. A.M.S., 14 (1970) 43--50
- M. Boyle. *Open Problems in Symbolic Dynamics*. to appear, 2007.
- M. Boyle and D. Handelman. *The spectra of nonnegative matrices via symbolic dynamics*. Annals of Math., 133 (1991) 249--316.
- M. Boyle, B. H. Marcus, and P. Trow. *Resolving Maps and the Dimension Group for Shifts of Finite Type*. Mem. Amer. Math. Soc., 377 (1987).
- T. Cover and J. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley, 1991.
- J. Hadamard. *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 4 (1898) 27--73.
- G. A. Hedlund. *Sturmian minimal sets*. Amer. J. Math., 66 (1944), 605--620.
- G. A. Hedlund. *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*. Math. Systems Theory, 3 (1969), 320--375.
- M. Hochman and T. Meyerovitch. *A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type*. Preprint, 2007.

- K. A. S. Immink. *Codes for Mass Data Storage*. Shannon Foundation Press, 2nd edition, 2004.
- P. W. Kasteleyn. *The statistics of dimers on a lattice*. Physica A, 27 (1961) 1209--1225.
- K. H. Kim, N. Ormes, F. Roush. *The spectra of nonnegative integer matrices via formal power series*. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000),773--806.
- K. H. Kim and F. W. Roush. *Some results on decidability of shift equivalence*. J. Combinatorics, Info. Sys. Sci., 4 (1979), 123--146.
- K. H. Kim and F. W. Roush. *Decidability of shift equivalence*. Proceedings of Maryland Special Year in Dynamics 1986--87, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., 1342 (1988), 374--424.
- K. H. Kim and F. W. Roush. *Williams Conjecture is false for irreducible subshifts*. Annals of Mathematics, 149 (1999), 545-558
- W. Krieger. *On the subsystems of topological Markov chains*. Ergod.Th. & Dynam. Sys., 2 (1982), 195--202.
- D. Lind. *Multi-dimensional symbolic dynamics*. Symbolic Dynamics and its Applications, ed. S. Williams, Proc. Symp. Appl. Math., 2004, 81 -- 120.
- D. Lind and K. Schmidt. *Symbolic and Algebraic Dynamical Systems*. Handbook of Dynamical Systems, ed. B. Hasselblatt, A. Katok, Elsevier, 2002, 765 -- 812.
- A. Manning. *Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions*. Bull. London Math. Soc., 3 (1971) 215--220.
- B. Marcus and S. Tuncel. *Resolving Markov Chains onto Bernoulli shifts via positive polynomials*. AMS Memoirs, v. 150, n. 710 (2001).
- B. H. Marcus, R. M. Roth, and P. H. Siegel. *Constrained systems and coding for recording*. Chapter in *Handbook on Coding Theory*(ed. by R. Brualdi, C. Huffman and V. Pless), Elsevier, 1998 (updated version ~ [marcus/Handbook/here](#))
- M. Morse and G. A. Hedlund. *Symbolic dynamics*. Amer. J. Math., 60 (1938), 815--866.
- M. Morse and G. A. Hedlund. *Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories*. Amer. J. Math., 62 (1940), 1--42.
- W. Parry. *Intrinsic Markov chains*. Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964), 55--66.
- W. Parry and S. Tuncel. *Classification Problems in Ergodic Theory*. LMS Lecture Note Series 67 (1982), Cambridge Univ. Press.
- K. Petersen. *Ergodic Theory*. Cambridge Univ. Press, 1989.
- R. M. Robinson. *Undecidability and non-periodicity for tilings of the plane*. Inventiones Math., 12 (1971), 177--209.
- E.A. Robinson. *Symbolic dynamics and tilings of  $\mathbb{R}^d$* . Symbolic Dynamics and its Applications, ed. S. Williams, Proc. Symp. Appl. Math., 2004, 81 -- 120.
- D. Rudolph. *Fundamentals of Measurable Dynamics*. Oxford Univ. Press, 1990.

- E. Seneta. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Second Ed., Springer, 1980.
- C. Shannon. *A mathematical theory of communication*. Bell Sys. Tech. J., 27 (1948), 379--423, 623--656.
- S. Smale. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 747--817.
- J. Wagoner. *Strong shift equivalence theory*. Symbolic Dynamics and its Applications, ed. S. Williams, Proc. Symp. Appl. Math., 2004, 121 -- 154.
- P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer Graduate Texts in Math, 79 (1982).
- P. Walters (editor). *Symbolic Dynamics and Its Applications*. Contemporary Mathematics 135 (1992).
- B. Weiss. *Subshifts of finite type and sofic systems*. Monats. Math., 77 (1973), 462--474.
- R. F. Williams. *Classification of subshifts of finite type*. Annals of Math. 98 (1973), 120--153; erratum, Annals of Math. 99 (1974), 380--381.
- S. Williams. *Introduction to Symbolic Dynamics*. Symbolic Dynamics and its Applications, ed. S. Williams, Proc. Symp. Appl. Math. 60, 2004, 1 -- 12.
- S. Williams (editor). *Symbolic Dynamics and its Applications*. Proc. Symp. Appl. Math. 60, 2004.

#### 内部参考文献

- Olaf Sporns (2007) [Complexity](#). Scholarpedia, 2(10):1623.
- Yuri A. Kuznetsov (2007) [Conjugate maps](#). Scholarpedia, 2(12):5420.
- James Meiss (2007) [Dynamical systems](#). Scholarpedia, 2(2):1629.
- Tomasz Downarowicz (2007) [Entropy](#). Scholarpedia, 2(11):3901.
- Howard Eichenbaum (2008) [Memory](#). Scholarpedia, 3(3):1747.
- Roy Adler, Tomasz Downarowicz, Michał Misiurewicz (2008) [Topological entropy](#). Scholarpedia, 3(2):2200.