周期三则混沌

Tien-Yien Li; James A. Yorke

The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (Dec., 1975), pp. 985-992

1. 介绍

现象或过程随时间演化或变化的方式通常用微分方程或差分方程来描述。一种最简单的数学情况是，这种现象可以用一个数字来描述，例如，在一学年开始时，容易感染某种疾病的儿童人数可以纯粹用上一年的数字来估计。也就是说，当数字 x 在 n+1 年(或时间段)的开始可以写入时，

$$(1.1) \qquad x_{n+1} = F(x_n),$$

F 将区间 J 映射到它自己。当然，这种疾病年复一年进展的模式将是非常简单的，只包含更复杂现象的一个影子。对于其他现象，这个模型可能更准确。如文献[8,11]所述，该方程已成功地用于模拟钻井用旋转钻头的冲击点分布。了解这种分布有助于预测钻头的不均匀磨损。再举个例子，如果一个昆虫种群的世代是离散的，那么第 n+1 次的大小将是第 n 次的函数。一个合理的模型将是一个广义的逻辑斯方程

$$(1.2) \qquad x_{n+1} = rx_n[1 - x_n / K].$$

利用[10]中的 Utida 对昆虫种群的相关模型进行了讨论。参见 Oster 等人[14,15]。

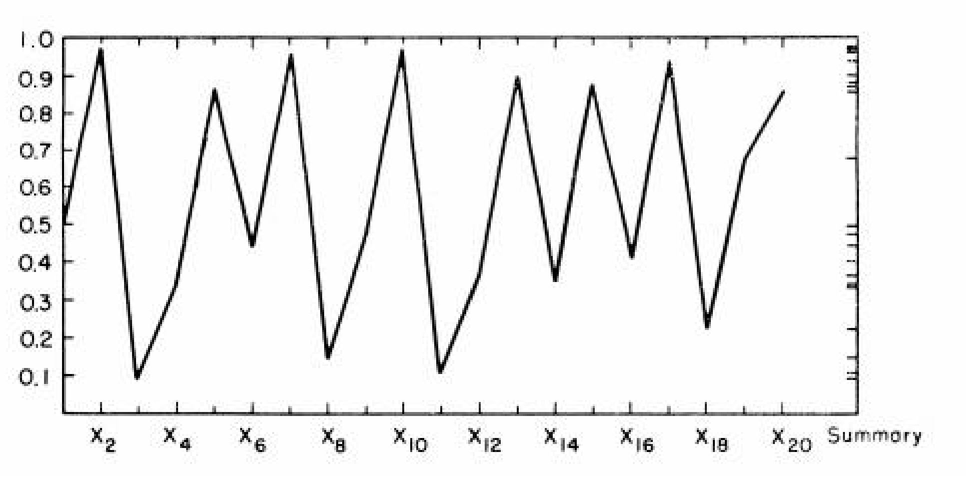

图 1 K =1 时，r=3.9，其中 x=.5,将 Eq.(1.2)迭代 19 次得到上图。在右边的 20 个值是重复的。值不会出现两次。虽然 x_2 =.975 和 x_{10}=.973。因为 x_{18}=.222，所以它的周期不是 8。

这些模型是高度简化的，然而，即使这个表面上简单的方程(1.2)也可能具有令人惊讶的复杂动态行为（见图 1）。我们用这样的观点来处理这些方程，即复杂现象的不规则性和混沌振荡有时可以用简单模型来理解，即使该模型不够复

杂，不能做出精确的数值预测。Lorenz[1-4]在一系列引人入胜的论文中研究紊流行为时采用了这一观点。他证明了某种复杂的流体流动通过这样一个序列 $x, F(x), F^2(x), \cdots,$ 可以模拟，它保留了初始流的一些混乱的方面。参见图 2。在本文中，我们分析了一种情况，即序列 $\{F^n(x)\}$ 是非周期的，可以称为“混沌”。定理 I 表明(1.1)的混沌行为将导致大小为 x 的“种群”连续增长两代或更多代，然后达到不可持续的高度，人口紧随 x 或以下水平崩溃。

在第 3 节中，我们给出了一个众所周知的简单条件，它保证了一个周期点是稳定的，然后在第 4 节中我们引用了一个适用于 F 类似于图 2 的结果。它意味着存在一个区间 $J_\infty \subset J$，使得几乎所有序列的极限点的集合 $\{F^n(x)\}$ 是 J_∞。

许多问题仍未得到解答。例如，周期点的闭包是一个区间还是至少是一个区间的有限并?其他问题后面会提到。

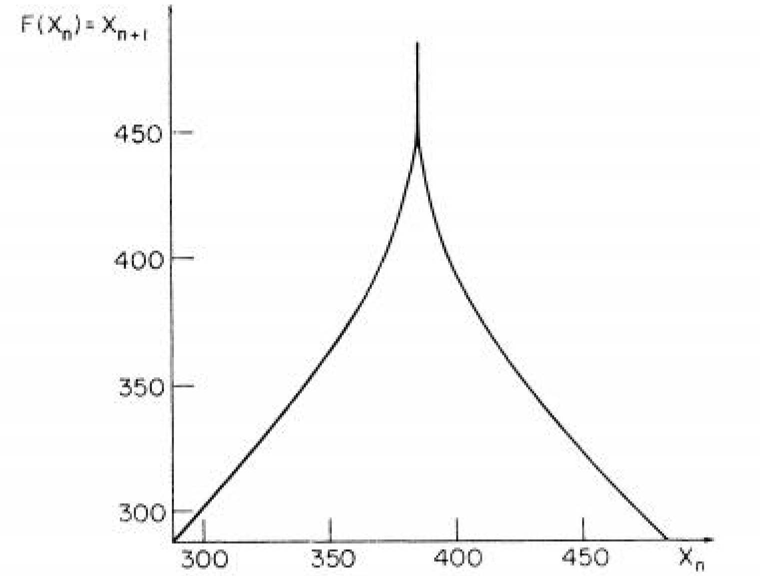

图 2 洛伦兹研究了旋转充水容器的方程，该容器的垂直轴是圆对称的。容器在边缘处加热，在中心处冷却。当容器呈环形且旋转速率高时。波浪不规则地发展和改变它们的形状。从一组数值求解的简化方程中，洛伦茨让 X，本质上是连续波的最大动能，画出 x_{n+1} 关于 x_n 并连接这些点，得到了上述图形。

添加证明：May 最近在他的独立研究中发现了这些地图的其他强特性，即当一个参数[17]变化时行为是如何变化的。

2. 主要定理

令 $F: J \to J$ $\forall x \in J,$ 当 n=0,1，…时，$F^\circ(x)$ 表示 x, $F^{n+1}(x)$ 表示 $F(F(x))$ 如果

$p \in J$ 和 $p = F^n(p)$ 且 $p \neq F^k(p)$ $\forall 1 \le k < n$，则称 p 为周期 n 的周期点。p 是周期性的，或者说 p 是一个周期点如果 $n \ge 1$。我们说 a 最终是周期性的如果对于某个正整数 m p =F"(a)是周期性的。因为 F 不一定是一对一的。可能有一些点最终是周期性的，但不是周期性的。我们的目的是要了解一个点的迭代是非常不规则的情况。我们的主要结果的一个特殊情况是，如果有一个周期为 3 的周期点，那么对于每个整数 n = 1,2,3. .，在 J 中都有一个周期为 n 的周期点 x 甚至不是“渐近周期的”。

定理 1 设 J 是一个区间，$F: J \to J$ 连续。假设有一个点 $a \in J$，使点 b=$F(a)$，$c = F^2(a)$, $d = F^3(a)$ 满足：

$d \le a < b < c$(或 $d \ge a > b > c$)

然后，

T1: 对于每 k=1，2，...，。在 J 中有一个周期点，周期为 k。

此外，

T2: 存在一个不可数集 $S \subset J$ (不包含周期点)，满足以下条件:

（A） 对于每 $p, q \in S$ 个且 $p \neq q$，有

$$(2.1) \qquad \limsup_{n\to\infty} \left| F^n(p) - F^n(q) \right| > 0$$

与

$$(2.2) \qquad \limsup_{n\to\infty} \left| F^n(p) - F^n(q) \right| = 0$$

（B） 对于每个 $p \in S$ 和周期点 $q \in J$，

$$\limsup_{n\to\infty} \left| F^n(p) - F^n(q) \right| > 0$$

注意，如果有一个周期为 3 的周期点。然后，给出了定理的结论。满足定理假设的一个函数的例子是 $F(x) = rx[1 - x/K]$，如(1.2)中的 $r \in (3.84, 4], J = [0, K]$ 和 r>4。$F(x) = \max\{0, rx[1 - x/K]\}, J = [0, K]$.。关于 $r \in (0,4]$ 函数迭代的详细描述，请参见[21]。$r = 4$ 的情况在[6,7,12]中讨论。

当周期为 3 的一个点的存在意味着周期为 5 的一个点的存在时，反过来是错误的。(见附录 1)。

我们说 $x \in J$ 是渐近周期的如果有一个周期点 p

$$(2.3) \qquad F^n(x) - F^n(p) \to 0, n \to \infty$$

由(B)可知集合 S 不包含渐近周期点。我们注意到，对于方程(1.2)具有非渐近周期点的 r 的极限是未知的。

定理 1 的证明 T1 的证明介绍了 T1 和 T2 的主要思想。我们现在用必要的引理给出 TI 的证明，而把冗长的 T2 的证明放到附录 2。

引理 0 设 G: I→R 连续，其中 I 为区间。对于任何紧区间 $I_1 \subset G(I)$ 存在一个紧区间 $Q \subset I$，使 $G(Q) = I$

证明 令 $I_1 = [G(p), G(q)]$，其中 $p, q \in I$ 。如果 *p* <*q*，设 *r* 为[*p*, *g*]的最后一点，其中 $G(r) = G(p)$，设 *s* 为 *r* 后第 1 个点，其中 $G(s) = G(q)$ 。然后 $G([r, s]) = I_1$。类似的推理也适用于 *p*>*q*。

引理 1 令 $F: J \to J$ 连续，令 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为所有 n 的紧区间，$I_n \subset J$ 和 $I_{n+1} \subset F(I_n)$ 的集合，则有一个紧区间 Q_n 的序列，使得对于 $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ 和 $F^n(Q_n) = I_n, \forall n \geq 0$ 。对于 $x \in Q = \cap Q_n$，我们对于所有 n 有 $F^n(x) \in I_n$ 。

证明 定义 $Q_0 = I_0$ 。然后 $F^0(Q_0) = I_0$，如果 Q_{n-1} 被定义为 $F^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$，然后 $I_n \subset F(I_{n-1}) = F^n(Q_{n-1})$. 通过引理 0 应用到 Q_{n-1} 上的 $G = F^n$ 上，存在一个紧区间 $Q_n \subset Q_{n-1}$，使 $F^n(Q_n) = I_n$ 。归纳就完成了。

研究某些集合序列如何相互映射的技术经常用于研究动力系统。例如。斯梅尔在他著名的“马蹄形例子”中使用了这种方法，在这个例子中，他展示了平面上的一个同胚如何可以有无穷多个周期点[13]。

引理 2 令 $G: J \to R$ 是连续的。设 $I \subset J$ 为紧区间，假设 $I \subset G(I)$ 。那么有一个点 $p \in I$ 使得 G(p)=p。

证明 设 $I = [\beta_0, \beta_1]$ 。在 I 中选择 $\alpha_i (i = 0,1)$，使 $G(\alpha_i) = \beta_i$ 。它遵循 $\alpha_1 - G(\alpha_1) \leq 0$，因此连续性意味着 $G(\beta) - \beta$ 对于 I 中的某个 β 一定是 0。

假设 $d \leq a < b < c$ 如定理所示。对于 $d \geq a > b > c$ 的证明是相似的，因此被省略。写 K=[*a*, *b*]和 L=[*b*,*c*]。

T1 的证明：设 *k* 为正整数。对于 *k*>1，令 I_n 为区间 I 的序列，对 $n = 0, \cdots, k-2, k-1, I_{n+k} = I_n$，定义 I_n 为周期的，归纳，$n = 0,1,2 \cdots, I_{n+k} = I_n$，…

如果 *k*=1，对所有 *n* 令 $I_n = L$ 。

设Q_n为引理 1 证明中的集合。然后注意$Q_k \subset Q_0, F^k(Q_k)=Q_0$，因此根据引理 2,G=F*在$Q_k$中有一个不动点$p_k$。很明显，$p_k$对于 F 的周期不能小于 k:否则我们需要$F^{k-1}(p_k)=b$，与$F^{k-1}(p_k)\in L$相反。点p_k对于 F 来说是一个周期为 k 的周期点。

3. 在周期点附近的行为

对于某些函数 F，点迭代的渐近性质可以通过研究周期点来简单地理解为

$$(3.1) \qquad F(x)=ax(1-x)$$

关于周期 1 和周期 2 的详细讨论可以在[1]中找到，$a\in[0,4]$，现在我们总结一些结果。对于$a\in[0,4], F:[0,1]\to[0,1]$。

对于$a\in[0,1]$， x=0 是周期 1 的唯一点;实际上，对于$x\in[0,1]$，当$n\to\infty$，序列 F"(x)→0。

对于 a>3，周期 2 中也有两个点我们称之为p和q当然，F(p)=q 和 F(q)=p。对$a\in(3,1+\sqrt{6}\approx 3.449), x\in(0,1)$。$F^{2n}(x)$收敛于$p$或$q$,而$F^{2n+1}(x)$收敛于另一个，除了那些有 n 的 x, $F^n(x)$等于周期 1 的点$1-a^{-1}$。这样的点只有可数的数目，使行为$\{F^n(x)\}$可以通过研究周期点来理解。

对于$a>1+\sqrt{6}$，周期 4 有 4 个点，对于略大于$1+\sqrt{6}$的，F"(x)趋向于这 4 个点中的一个，除非对于某些 n, $F^n(x)$等于周期 1 或 2 的一个点。因此，我们可以说[0,1]中的每一个点都是渐近周期的。

对于每个点都是渐近周期的 a 值，只研究周期点及其“稳定性”性质就足够了。对于任何周期为 k 的函数 F 点$y\in J$，如果在某个区间$I=(y-\delta, y+\delta)$我们可以说是渐近稳定的

$$\left|F^k(x)-y\right|<\left|x-y\right|, \quad \forall x\in I$$

如果 F 在点 y 上是可微的，$F(x),\cdots,F^{k-1}(x)$有一个简单的条件可以保证他的行为，即

$$\left|\frac{d}{dx}F^k(x)\right|<1$$

根据链式法则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F^k(y) &= \frac{d}{dx}F(F^{k-1}(y))\cdot\frac{d}{dx}F^{k-1}(y)\\ &= \frac{d}{dx}F(F^{k-1}(y))\times\frac{d}{dx}F(F^{k-1}2(y))\times\cdots\times\frac{d}{dx}F(y)\\ &= \prod_{n=0}^{k-1}\frac{d}{dx}F\ \ (y_n)\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 y 是第 n 次迭代，$F^n(x)$ 因此 y 是渐近稳定的

$$\left|\prod_{i=0}^{k-1}\frac{d}{dx}F(y_i)\right|<1,\ \ y=F^i(y)$$

当然，这个条件不能保证不从周期点或其迭代的"附近"开始的点的极限行为。图 2 中由洛伦茨研究的函数有相反的行为，也就是说，当导数存在的时候

$$\left|\frac{d}{dx}F(x)\right|>1$$

对于这样一个函数，每个周期点都是"不稳定的"，因为 x 在周期为 k 的周期点 y 附近。第 k 次迭代 $F^n(x)$比 x 离 y 更远。看看这个，近似 $F^k(x)$

$$F^k(y)+\frac{d}{dx}F^k(x)[y-x]=y+\frac{d}{dx}F^k(x)[y-x].$$

因此，对于 x 在 y 附近，$\left|F^k(x)-y\right|$ 近似于 $\left|x-y\right|\left|d/dxF^k(y)\right|$。$\left|d/dxF^k(y)\right|$ 大于 1。

因此 $F^n(x)$ 比 x 离 y 更远。

我们不知道当 a 的值开始出现时，F(3.1)中的点不是渐近周期的。对于 a =3.627, F 有一个周期为 6 的周期点(约为 x = .498)。因此 x 是 F 的周期为 3 的点，因此定理 1 适用于 F^2。因为 F^2 的点不是渐近周期性的，所以 F 也是如此。

为了对比的情况下在这一节中讨论与其他可能的情况在下一节中,我们定义限制的一个点集 x, y 是一个序列的极限点 $\{x_n\}\subset J$ 如果有子序列 x_{n_i} 收敛于 y。极限集 L (x)定义的组极限点 $\{F^n(x)\}$。如果 x 是渐近周期的，那么 L (x)是某个周期为 k 的周期点 y 的集合 $\{y, F(y), \cdots, F^{k-1}(y)\}$。

4. $\{F^n(x)\}$ 的统计属性。

定理 1 建立了点迭代行为的不规则性。当 F 是分段连续可微的(如图 2 中的

洛伦茨函数)时，还需要对序列$\{F^n(x)\}$的规则行为进行描述

$$(4.1) \qquad \inf_{x\in J_i}\left|\frac{dF}{dx}\right|>1, \quad j_i=\{x:\frac{dF}{dx}\text{存在}\}$$

描述这些函数渐近性态的一种方法是描述 $L(x)$，如果可能的话。第二种方法是检验 F"(x)的平均行为，这被证明是相关的。迭代的部分$\{x,\cdots,F^{N-1}(x)\}$的 x [a,

艾尔将用中$\phi(x,N,[a_1,a_2])$。极限分数将用符号表示

$$\phi(x,[a_1,a_2])=\lim_{N\to\infty}\phi(x,N,[a_1,a_2])$$

当极限存在时。遍历理论的子方面，研究一般空间上的变换，激发以下定义。我们说 g 是 x 的密度(对于 F)如果极限分数满足的话

$$\phi(x,[a_1,a_2])=\int_{a_1}^{a_2}g(x)dx \quad \forall a_1,a_2\in J,a_1<a_2.$$

研究密度的方法使用测度理论和泛函分析的非基本方法，因此我们只总结结果。但它们的值在于，几乎所有的，$x\in J$，都有相同的密度。直到最近，除了最简单的函数 F 之外，这种密度的存在还没有被证明。

定理 2 [5] 令$F:J\to J$满足以下条件:
1) F 是连续的。
2) 除了一点$t\in J$， F 是二阶连续可微
3) F 满足(4.1)。

然后存在一个函数$g:J\to[0,\infty)$，这样对于几乎所有的$x\in J$，g 是 x 的密度。对于大多数$x\in J,L(x)=\{y:g(y)>0\}$这是一个区间。此外，集合$J_m=\{y:g(y)>0\}$是一个区间，，对于几乎所有的 x，$L(x)=J_\infty$。

该证明利用了[8]中的结果，在[9]中解决了计算求密度的问题。
[16]中给出了关于(3.1)的详细讨论，描述了 L (x)如何随着(3.1)中的参数 A 在 3.0 和 4.0 之间变化。

一个未解决的主要问题是(对于一些很好的函数 F)稳定周期点的存在是否意味着几乎每个点都是渐近周期的。
附录 1:期限 5 并不意味着期限 3。在本附录中，我们给出一个周期为 5 的不动点，但周期为 3 的不动点的例子。

设$F:[1,5]\to[1,5]$，定义 F(1)=3, F(2)=5, F(3)=4, F(4) =2, F(5)= 1，在每个区间[n,n+1], $1\le 4$上，假设 F 是线性的。然后

$$F^3([1,2])=F^2([3,5])=F([1,4])=[2,5].$$

因此，F^3在[1,2]中没有不动点。同理，F(12,3)= [3,5]，$F^3([4,5])=[1,4]$，因此这两个区间都不包含 F 的不动点。

$$F^3([3,4])=F^2([2,4])=F([2,5])=[1,5]\supset[3,4].$$

因此，F^3必须在[3,4]处有一个不动点。现在我们将证明F^3的不动点是唯一的，也是 F 的不动点。

设$p\in[3,4]$为F^3的不动点。那么$F(p)\in[2,4]$。如果$F(p)\in[2,3]$，则 F'(p)将在[1,2]，这是不可能的，因为此时p不可能是不动点。因此，$F(p)\in[3,4]$，$F^2(p)\in[2,4]$。如果$F^2(p)\in[2,3]$我们会有$F^3(p)\in[4,5]$，不可能。因此，$p,F(p),F^2(p)$均在[3,4]中。在区间[3,4]上，F 是线性定义的，因此 F(x) = 10-2x。它有一个不动点 10/3，很容易看出F^3有一个唯一的不动点，它必须是 10/3。因此没有第三阶段的点。

附录 2 定理 1 的 T2 证明：设 M 为区间的序列$M=\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$的集合与

(A.1) $M_n=K$ 或 $M_n\subset L$, 如果$M_n=K,F(M_n)\supset M_{n+1}$

然后

(A.2) n是整数的平方，$M_{n+1},M_{n+2}\subset L,$

其中 K=[*a*, *b]*，L=[*b*, *c*]。当然，如果*n*是一个整数的平方，那么*n* +1 和*n* +2 不是整数，所以(A.2)中的最后一个要求是多余的。对于$M\subset\mathbb{M}$，设*P(M,n)*表示{1，...，*n*}中的第*i*个数，其中$M_i=K$，对于每个$r\in(3/4,1)$，选择$M'=\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$为$\mathbb{M}$中的一个序列，使得

(A.3) $\lim_{n\to\infty}P(M^r,n^2)/n=r.$

令$M_0=\{M':r\in(3/4,1)\}\subset M$。因为$r_1\neq r_2,M^{r_1}\neq M^{r_2}$，$\mathbb{M}_0$是不可数的，$M'\subset\mathbb{M}_0$，通过引理 1，存在一个点 x, 对于所有的*n*，$F^n(x_r)\in M_n^r$，令$S=\{x:r\in(3/4,1)\}.$，那么 S 也是不可数的。对于$x\in S$，设$P(x,n)$表示{1，...，*n*}中*i*的个数，$F^i(x)\in K$，我们不可能让$F^k(x_r)=b$，因为这样*x*最终会有周期 3，与(A.2)相反。因此对于所有*n*，$P(x,n)=P(M',n)$，因此

$$\rho(x_r)=\lim_{n\to\infty}P(X_n,n^2)=r.$$

对任意*n*成立，我们声称

(A.4) 对于 $p,q\in S$，对于 $p\neq q$，存在无穷多个 n 使得 $F^n(p)\in K$ 和 $F^n(q)\in L$，反之亦然。

我们可以假设 $\rho(p)>\rho(q)$ 那么 $P(p,n)-P(q,n)\to\infty$，那么一定有无穷多的 n 使得 $F^n(p)\in K$ 和 $F^n(q)\in L$。

由于 $F^2(b)=d\le a$ 且 F^2 是连续的，因此存在 $\delta>0$ 使得对于所有 $F^2(x)<(b+d/2),\forall x\in[b-\delta,b]\subset K$。如果 $p\in S$ 和 $F^n(p)\in K$，则(A.2)意味着 $F^{n+1}(p)\in L$ 和 $F^{n+2}(p)\in L$。因此 $F^n(p)<b-\delta$。如果 $F^n(p)\in L$，那么 $F^n(p)\ge b$

$$\left|F^n(p)-F^n(q)\right|>\delta$$

根据命题(A.4)，对于任何 $p,q\in S$， $p\neq q$，它是这样的

$$\limsup_{n\to\infty}\left|F^n(p)-F^n(q)\right|\ge\delta>0$$

由此证明(2.1)。这种方法同样可以用来证明(B)是满意的。

2.2 的证明：由于 $F(b)=c,F(c)=d\le a$，我们可以选择区间 $[b^n,c^n],n=0,1,2,\cdots,$ 使得：

(a) $[b,c]=[b^0,c^0]\supset[b^1,c^1]\supset\cdots\supset[b^n,c^n]\supset\cdots$

(b) $F(x)\in(b^n,c^n),\forall x\in(b^{n+1},c^{n+1}),$

(c) $F(b^{n+1})=c^n,F(c^{n+1})=b^n.$

令 $A=\bigcap_{n=0}^{\infty}[b^n,c^n],b^*=\inf A,c^*=\sup A,$ 由(c)，有 $F(b^*)=c^*,F(c^*)=b^*$

为了证明(2.2)，我们必须更具体地选择序列 M'，除了我们之前对 $M\in M$ 的要求，我们将假设，如果 $k=n^2$ 和 $(n+1)^2$ 的 $M_k=K$，然后对 $k=n^2+(2j-1)$，有 $M_k=[b^{2n-(2j-1)},b^*]$，对 $k=n^2+2j,j=1,\cdots,n.$，有 $M_k=[c^*,c^{2n-2i}]$。对于其余不是整数平方的 k，我们假设 $M_k=L$。

很容易检查这些要求是否与(A.1)和(A.2)一致，我们仍然可以选择 M'来满足(A.3)。从 $\rho(x)$ 可以被认为是 $F^{n^2}(x)\in K$ 在 n 中所占分数的极限这一事实可以得出，对于任何 $r^*,r\in(3/4,1]$。存在无穷多个 n，使得 $k=n^2$ 和 $(n+1)^2$，$M_k^r=M_k^{r^*}=K$。为表示(2.2)，设 $x_r\in S,x_{r^*}\in S$，由于 $n\to\infty,b^n\to b^*,c^n\to c^*$，对

于任意$\varepsilon > 0$成立，存在 N 与$\left|b^n - b^*\right| < \varepsilon/2, \left|c^n - c^*\right| < \varepsilon/2$，对于所有 n> N 成立。

则对于任意$k = n^2$和$(n+1)^2$，$M_k^r = M_k^{r^*} = K$，有

$$F^{n^2+1}(x_r) \in M_k^r = [b^{2n-1}, b^*]$$

其中$k = (n+1)^2$，$F^{n^2+1}(x_r)$和$F^{n^2+1}(x_{r^*})$都属于$[b^{2n-1}, b^*]$。因此，$\left|F^{n^2+1}(x_r) - F^{n^2+1}(x_{r^*})\right| < \varepsilon$。由于有无穷个 n 具有这个性质，

$$\limsup_{n\to\infty}\left|F^n(x_r) - F^n(x_{r^*})\right| = 0\text{。}$$

注意 这个定理可以通过假设$F: J \to R$而不假设$F(J) \subset J$来推广，我们把这个证明留给读者。当然$F(J) \cap J$是非空的因为它包含点 *a, b, c*，假设 *b, c, d* 是有定义的。

研究部分由国家科学基金会资助 GP-31386X。

参考文献

1.E. N. Lorenz, The problem of deducing the climate from the governing equations, Tellus, 16 (1964)1-Il.Google Scholar
2.E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flows, J. Atmospheric Sci., 20 (1963) 130–141.CrossRefGoogle Scholar
3.E. N. Lorenz, The mechanics of vacillation, J. Atmospheric Sci., 20 (1963) 448–464.CrossRefGoogle Scholar
4.E. N. Lorenz, The predictability of hydrodynamic flow, Trans. N.Y. Acad. Sci., Ser. 11, 25(1963) 409–432.CrossRefGoogle Scholar
5.T. Y. Li and J. A. Yorke, Ergodic transformations from an interval into itself, (submitted for publication).Google Scholar
6.P. R. Stein and S. M. Ulam, Nonlinear transformation studies on electronic computers, Los Alamos Sci. Lab. Los Alamos, New Mexico, 1963.Google Scholar
7.S. M. Ulam, A Collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960, p. 150.zbMATHGoogle Scholar
8.A. Lasota and J. A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 186 (1973) 481–488.MathSciNetCrossRefGoogle Scholar
9.T. Y. Li, Finite approximation for the Frobenius-Perron operator—A Solution to Ulam's conjecture, (submitted for publication).Google Scholar
10.Syunro Utida, Population fluctuation, an experimental and theoretical approach, Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, 22 (1957) 139–151.CrossRefGoogle Scholar

11.A. Lasota and P. Rusek, Problems of the stability of the motion in the process of rotary drilling with cogged bits, Archium Gornictua, 15 (1970) 205–216 (Polish with Russian and German Summary).Google Scholar
12.N. Metropolis, M. L. Stein and P. R. Stein, On infinite limit sets for transformations on the unit interval, J. Combinatorial Theory Ser. A 15, (1973) 25–44.Google Scholar
13.S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. A.M.S. 73 (1967) 747–817 (see 51. 5).Google Scholar
14.G. Oster and Y. Takahashi, Models for age specific interactions in a periodic environment, Ecology, in press.Google Scholar
15.D. Auslander, G. Oster and C. Huffaker, Dynamics of interacting populations, a preprint.Google Scholar
16.T. Y. Li and James A. Yorke, The “simplest” dynamics system, (to appear).Google Scholar
17.R. M. May, Biological populations obeying difference equations, stable cycles, and chaos, J. Theor. Biol. (to appear).Google Scholar