

具有奇异吸引子的二维映射

M. Henon

Observatoire de Nice, F-06300 Nice, France

摘要 Lorenz(1963)研究了一个三阶微分方程系统,其解趋向于一个“奇异吸引子”。我们证明,同样的性质可以在定义为: $x_{i+1}=y_i+1-ax_i^2$, $y_{i+1}=bx_i$ 的平面的简单映射中观察到。在 $a=1.4$, $b=0.3$ 时进行了数值实验。根据初始点 (x_0, y_0) 的不同,由映射迭代得到的点序列要么发散到无穷大,要么趋向于一个奇异的吸引子,它似乎是一个一维流形与一个康托尔集的乘积。

1. 介绍

Lorenz(1963)提出并研究了一个了不起的三耦合一阶微分方程系统,它代表三维空间中的流动。流动的散度有一个恒定的负值,因此任何体积都随时间呈指数级收缩。此外,存在一个边界区域 R ,所有的陈词都最终转化为该区域。因此,所有的引力趋向于一组度量为零的集合,称为吸引子。在某些情况下,吸引子只是一个点(然后一个稳定平衡点或闭合曲线(称为极限环),但在其他情况下,吸引子有一个更复杂的结构:它似乎在本地产品二维流形的一个康托尔集。这被称为奇怪的吸引子。在吸引器内部,垃圾以明显不稳定的方式游荡。此外,它们对初始条件高度敏感。这些现象对天气预报(Lorenz, 1963)和湍流理论(Ruelle 和 Takens, 1971; 窄小的街道, 1975)。Lanford(1975)和 Pomeau(1976)对洛伦兹系统作了进一步的数值研究。

我们向她提出了一种“简化”的方法,在这种方法中,我们试图找到一个尽可能简单的模型问题,同时又表现出与洛伦茨系统相同的基本属性。我们的目的是()使数值探索更快,更准确,从而可以更长的时间,更多地跟踪解可以进行详细的探索等;提供一种更容易进行数学分析的模式。

2. 模型

我们的第一步是古典(比尔科夫,1917),由在考虑不是整个轨迹在三维空间中,但只有他们连续十字路口的二维表面部分 S 。我们定义了一个映射本身如下:鉴于一点 S 我们遵循的轨迹 A 直到它再次相交 S ;这个新点是 $T(A)$ 这种映射有时被称为庞加莱映射。通过映射 T 的反复应用,得到了 S 中无穷多个点的集合来代替轨迹,轨迹的本质性质反映在这些点的相应性质中。因此,我们正式地把这个问题简化为对双线性映射的研究。

然而,在这一点上,唯一的优势是能够清晰地展示结果,映射的实际计算仍然需要微分方程的数值积分。现在是决定性的第二步:我们忘掉微分系统,通过显式方程定义映射 T ,当 A 已知时直接给出 $T(A)$ 。这当然大大简化了计算。新的映射 T 不再符合洛伦茨系统:然而,通过仔细选择它,我们可能希望保留我们想要研究的基本性质。在保留措施的情况下的过去经验(见 Henon, 1969, 和其中

的参考文献)确实表明, 在由微分方程定义的动力系统和这样定义的映射中也发现了同样的特征。

第三步是指定 t 。在此, 我们受到了 Pomeau(1976)在洛伦茨系统中的数值结果的启发, 它清楚地展示了一个体积是如何在一个方向上拉伸, 同时在一个革命的过程中折叠它自己。Ruelle(1975, 图 5 和图 6)也描述了这种折叠效果。我们通过以下 (x, y) 平面到自身的三个映射链来模拟它。考虑一个沿 x 轴伸长的区域(图 1a)。我们开始折叠

$$T': x' = x, \quad y' = y + 1 - ax^2, \quad (1)$$

生成图 1b, a 为可调参数。我们通过沿着 x 轴收缩来完成折叠:

$$T'': x'' = bx', \quad y'' = y', \quad (2)$$

生成图 1c, b 是另一个参数, 它的绝对值应该小于 1。最后我们回到沿着 x 轴的方向

$$T''': x''' = y'', \quad y''' = x'', \quad (3)$$

结果如图 1d 所示。我们的映射将被定义为乘积 $T = T''T'T$ 。对于 (x, y) 我们写 (x_i, y_i) 对于 (x'', y'') , 我们写 (x_{i+1}, y_{i+1}) (提醒映射将被迭代), 我们有

$$T^{-1}: x_{i+1} = y_{i+1} + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i. \quad (4)$$

这个映射有一些有趣的属性。它的雅可比矩阵是一个常数:

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = -b. \quad (5)$$

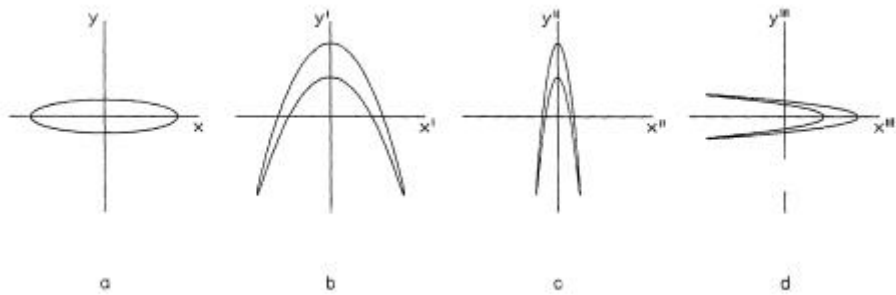


图 1 初始区域 a 通过 T 映射到 b , 然后通过 T 映射到 c , 最后通过 T 映射到 d 。

几何解释很简单: T' “保留面积”; T'' 也保留面积, 但颠倒符号; T''' “收缩面积”, 乘以常数因子 b 。特性(5)是受欢迎的, 因为它是洛伦茨系统中常数负散度的自然对应。满足(5)的多项式映射称为整个克雷莫纳变换, 其逆映射也由多项式给出(Engel, 1955)。1958)。我们确实有

$$T^{-1}: x_i = b^{-1}y_{i+1}, \quad y_i = x_{i+1} - 1 + ab^{-2}y_{i+1}^2. \quad (6)$$

因此 T 是平面到自身的一对一映射。这也是一个韦尔锥性质，因为它是洛伦茨系统中通过任意一点的唯一轨迹的自然对应。

T 的选择可以用另一种方式来处理，即寻找“最简单”的非平凡映射。因此，考虑逐步递增的多项式映射是很自然的。线性映射是平凡的，所以多项式至少是 2 次的。最一般的二次映射是

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f + ax_i + by_i + cx_i^2 + dx_iy_i + ey_i^2, \\ y_{i+1} &= f' + a'x_i + b'y_i + c'x_i^2 + d'x_iy_i + e'y_i^2 \end{aligned} \quad (7)$$

取决于 12 个参数。但如果我们施加雅可比矩阵为常数的条件，这些参数必须满足某些关系。通过对平面上的坐标进行适当的线性变换，可以进一步减少参数的数量。这样，稍微扩展恩格尔(1958)的结果，就可以证明一般形式(7)仅依靠两个参数可简化为一个“标准形式”。这是对我们先前的结果(Henon, 1969)的推广，即二次保区映射可以被带入只依赖于一个参数的形式。标准形式可以用几种不同的方式书写，其中一个和(4)是相同走向是一条完全不同的映射(4)，最初是用经验的方式构造的，实际上是最一般的常数雅可比矩阵二次映射。

与洛伦兹问题的一个不同之处在于，通过重复应用 T 得到的连续点并不一定收敛于一个吸引子：有时它们“逃逸”到无穷大。这是因为当到原点的距离变大时(4)中的二次项占优势。然而，对于特定的值 a 和 b 仍然有可能证明存在一个有界的“捕获区域” R ，从那里的点永远不能逃脱一旦他们进入它(见下面第 5 节)。 T 有两个不变点，由

$$x = (2a)^{-1}[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}], \quad y = bx. \quad (8)$$

这些点是真实的

$$a > a_0 = (1-b)^2 / 4. \quad (9)$$

当这种情况下，其中一个点总是线性不稳定，而另一个点总是线性不稳定

$$a > a_1 = 3(1-b)^2 / 4. \quad (10)$$

3.选择的参数

我们现在选择 a 和 b 的特定值进行数值研究。 b 应该足够小，以使图 1 所描述的折叠真正发生，但如果希望观察吸引子的精细结构，也不能太小。 $b=0.3$ 被认为是足够的。经过一些实验才发现 a 的一个好值。对于 $a < a_0$ 或 $a > a_3$ ，其中 a_3 为(9)， $b=0.3$ 为 1.55 阶，点总是逃逸到无穷大：显然在这些情况下不存在吸引。对于 $a_0 < a < a_3$ ，依赖于初始值 (x_0, y_0) ，要么这些点逃逸到无穷大，要么它们收敛到一个吸引子，对于给定的 a ，这个吸引子看起来是唯一的。我们现在集中在这个吸引子上。对于 $a_0 < a < a_1$ ，其中 a_1 由(10)给出，吸引子为稳定不变点。当 a 大于 a_1 时，首先吸引子仍然是简单的，并且由 p 点的周期集组成。(洛伦兹问题中的等效吸引子是与截面表面相交 p 次的极限环)。随着 a 的增加， p 的值通过连续

的“分叉”而增加，当 a 接近一个临界值 a_2 时， p 的值趋于无穷大，在 $b=0.3$ 时，其数量级为 1.06。对于 $a_2 < a < a_3$ ，吸引子不再简单，点的行为变得不稳定。这是我们感兴趣的情况。我们取以下值：

$$a = 0.63135448\dots, b = 0.18940634\dots \quad (11)$$

4. 数值结果

图 2 显示了从任意选择的初始点 $x_0=0, y_0=0$ 开始，通过 T 迭代得到连续绘制 10000 个点的结果；垂直尺度被放大以提供更好的图像。图 3 显示了 10000 迭代 T 的结果，从不同的点开始： $x_0=0.63135448, y_0=0.18940634$ （这个选择将在下面解释）。这两个数字看起来几乎一模一样。这强烈地表明，我们在两个图形中看到的本质上是吸引子本身：连续的点迅速地接近吸引子；并且很快在图形的规模上变得与它不可区分。如果查看图 2 的前几个点，就可以确认这一点。初始点 $x_0=0, y_0=0$ 和第一次迭代 $x_1=1, y_1=0$ 清晰可见；第二次迭代 x 仍然可见 $x_2=-0.4, y_2=0.3$ ；第三次迭代很难区分 $x_3=1.076, y_3=-0.12$ ；在图 2 的分辨率下， $x_4=-0.7408864, y_4=0.3228$ 的第四次迭代已经丢失在吸引子内部。下面的点然后以一种明显不稳定的方式飘过吸引子，其中一个不稳定不变点的坐标为(8)

$$x = 0.63135448\dots, y = 0.18940634\dots \quad (12)$$

这一点似乎属于吸引子。两个特征值 λ_1, λ_2 ，和斜率 p_1, p_2 对应的特征向量是

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.15594632\dots, p_1 = 1.92373886\dots, \\ \lambda_2 &= -1.92373886\dots, p_2 = -0.15594632\dots, \end{aligned} \quad (13)$$

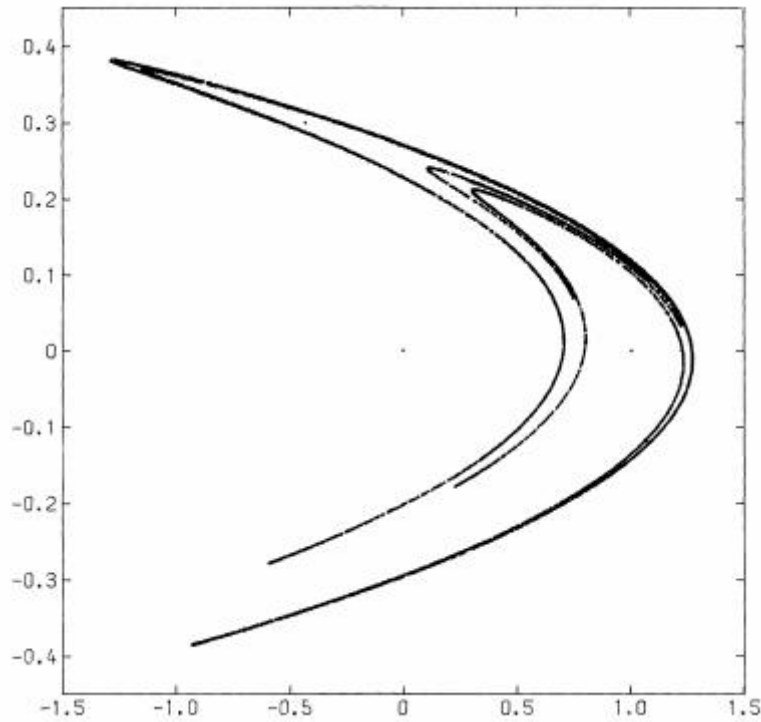


图 2 从 $x_0=0, y_0=0$ 开始迭代映射 T 得到连续 10000 个点。

失稳的原因是 λ_2 ，对应的斜率 p_2 似乎与图2中的“曲线”相切。

这些性质允许我们消除“瞬态状态”，其中点接近吸引子，这不是很有趣:我们只是从不稳定点(12)的邻近开始，通过四舍五入使其坐标变为8位。这在图3和下面的图中完成。由于 $|\lambda_2|$ 明显大于1，这些点沿着斜率 p_2 的线迅速移动。

吸引子似乎是由许多或多或少平行的“曲线”组成的。这些点趋向于在这些曲线上密集地分布。在图2和图3中仍然可以看到的少数间隙可能没有特别的意义。它们在两个数字上的位置不一样。它们只是由于点的准随机分布的统计波动，如果绘制更多的点，它们就会消失。因此，吸引子的纵向结构(沿着曲线)似乎是简单的，每条曲线本质上是一维流形。

跨骨结构(穿过曲线)似乎完全不同，而且复杂得多。在图2和图3中已经可以看到一些曲线，其中一些曲线的可见厚度表明它们实际上是一个地下结构。图4是图3的小方块的放大视图:以前的一些“曲线”现在确实分解成两个或更多的组件。将迭代次数 n 增加到 10^5 次，以便在检测的小区域内有足够数量的点。将图4中的小方块再次放大，得到图5， n 增加到 10^6 :可见的“曲线”数量再次增加。再放大一次，结果如图6所示。当 $n=5\times 10^6$ 时:点变得稀疏，但是新的曲线仍然可以很容易地被追踪。

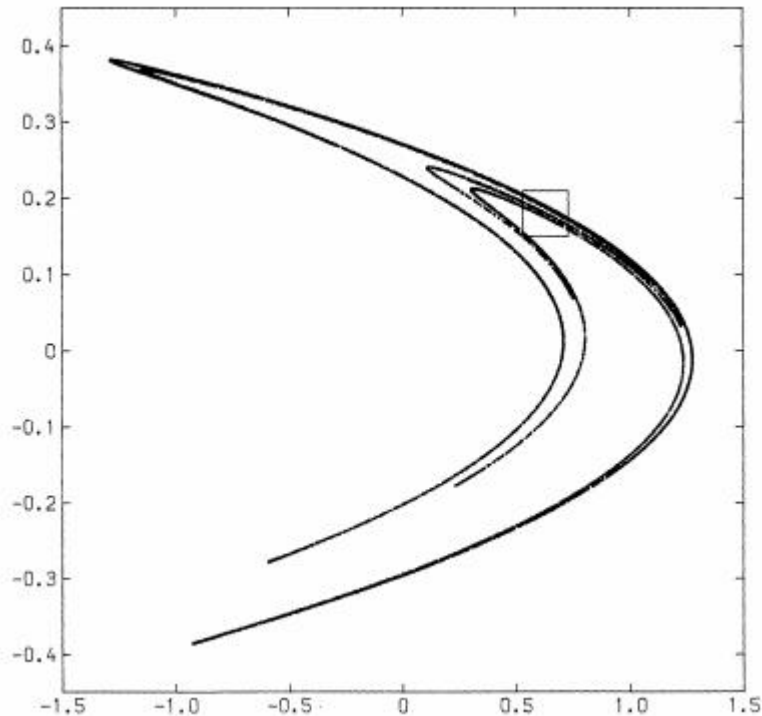


图3 与图2相同，但是从 $x_0=0.63135448, y_0=0.189406341$ 开始。

这些数字强烈地表明，“曲线”的乘法过程将无限期地持续下去，而每一条明显的“曲线”实际上都是由无穷多的准平行曲线构成的。此外，图4至6显示了“各

级”的等级顺序，除了一个比例因子外，每一级的结构实际上是相同的。这就是康托集的结构。

图 4 到 6 的帧已经被选择，以便包含不变点(12)。这一点似乎位于吸引子的上边界。令人惊讶的是，它的存在在图形上是完全看不见的:这与区域保持的情况相比，被稳定和不稳定的不变点发挥了非常明显的作用(如 Henon, 1969)。另一方面，不变点的存在至少在局部上解释了类似结构的层次:在每次应用映射时，横向结构的比例乘以 λ_1 ，由式(13)给出。与此同时，根据 λ_2 的值，这些点沿着曲线展开。

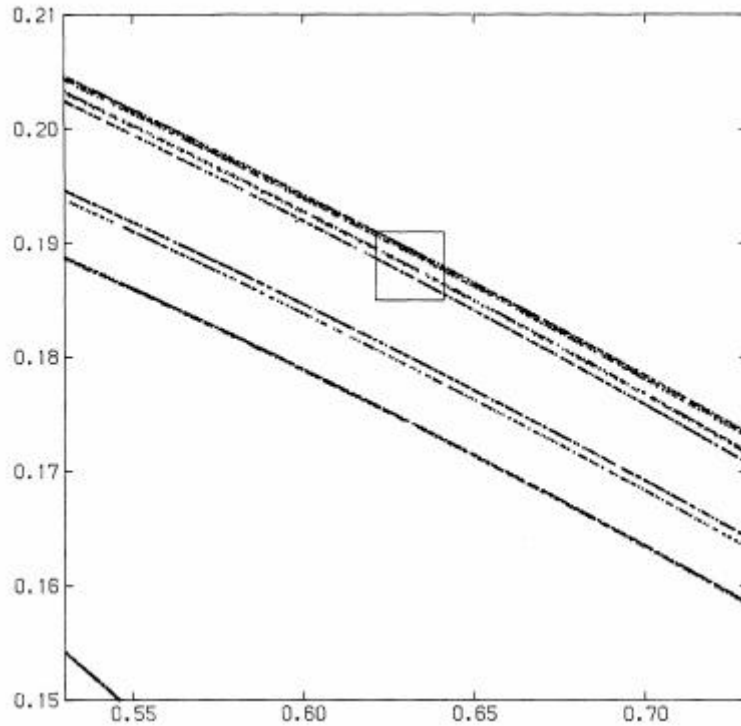


图 4 图 3 的平方区域的放大。计算的点数增加到 $n=10^5$ 。

5. 捕获区域

事实是，即使经过 5^{10} 度的迭代，这些点仍然没有发散到无穷大，这表明在平面上有一个区域，这些点无法逃脱。这实际上可以通过找到一个区域 R 来证明它是映射在自身内部的。这样一个区域的一个例子是定义的四边形 $ABCD$

$$\begin{aligned} x_A &= -1.33, y_A = 0.42, x_B = 1.32, y_B = 0.133, \\ x_C &= -1.33, y_C = 0.42, x_D = -1.06, y_D = -0.5. \end{aligned} \quad (14)$$

$ABCD$ 的像是一个由四条抛物线弧围成的区域，用初等代数可以证明该像位于 $ABCD$ 内部。在图 2 或图 3 上绘制四边形，可以证实它包围了观察到的吸引子。

6. 结论

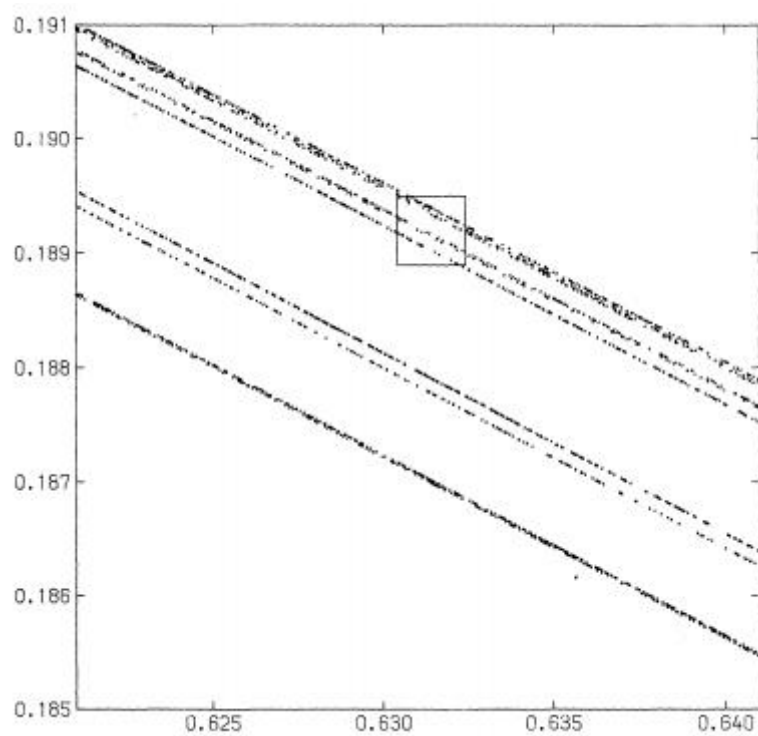


图5 图4的平方区域放大: $n=10^6$

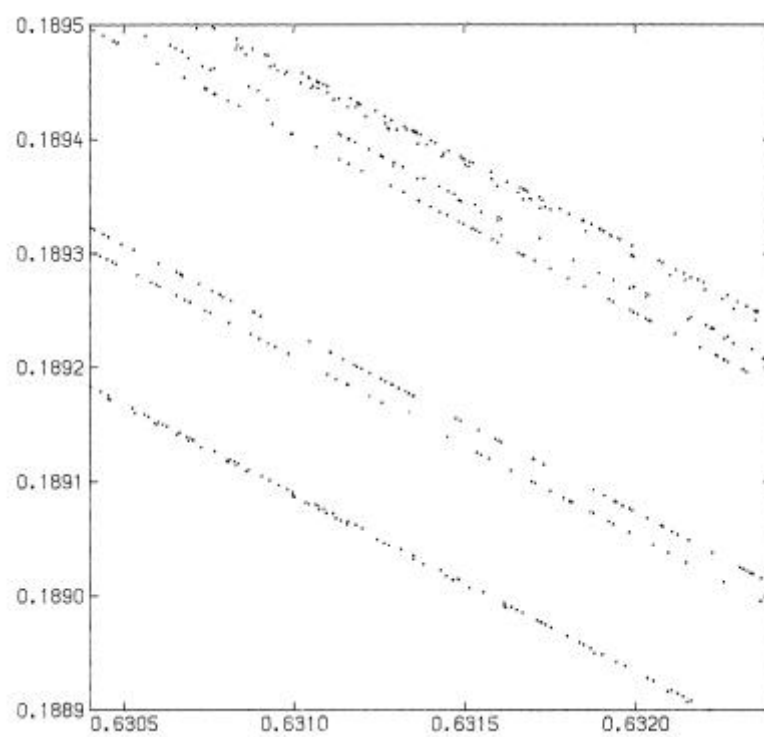


图6 图5的平方区域放大: $n=5 \times 10^6$

简单映射(4)似乎具有与洛伦茨系统相同的基本性质。它的数值探索要简单得多:事实上,本文的大部分探索工作是在可编程的袖珍计算机(HP-65)上进行的。对于图 2 到 6 的更广泛的计算,我们使用 IBM 7040 计算机,其精度为 16 位。与微分方程组的情况相比,它的求解时间要长得多。由于没有积分误差,精度也得到了提高。

Lorenz(1963)通过推理推断了吸引子的康托尔集结构,但由于一个“回路”后的收缩比太小: 7×10^{-5} , 无法直接观察到它。Pomeau(1976)也有类似的经验。在当前的测绘中,一次迭代后的收缩比例是 0.3, 人们可以很容易地观察到层次结构中的一些连续的层次。点数的增加也促进了这一点。

最后,对于数学研究,映射(4)也可能比微分方程系统更容易处理。

参考文献

- Birkhoff, G.D.: Trans. Amer. Math. Soc. 18, 199 (1917)
Engel, W.: Math. Annalen **130**, 11 (1955)
Engel, W.: Math. Annalen **136**, 319 (1958)
Henon, M.: Quart. Appl. Math. 27, 291 (1969)
Lanford, O.: Work cited by Ruelle, 1975
Lorenz, E.N.: J. atmos. Sci. 20, 130 (1963)
Pomeau, Y.: to appear (1976)
Ruelle, D., Takens, F.: Comm. math. Phys. 20, 167; 23, 343 (1971)
Ruelle, D.: Report at the Conference on "Quantum Dynamics Models and Mathematics" in Bielefeld, September 1975