Smale 马蹄

Steve Smale and Michael Shub (2007), Scholarpedia, 2(11):3012.

Dr. Steve Smale, Toyota Technological Institute at Chicago, IL

Dr. Michael Shub, University of Toronto, CANADA

斯梅尔马蹄是混沌的标志。它以惊人的几何和解析的多样性，有力地描述了庞加莱遇到、伯克霍夫、卡特赖特-利特伍德和莱文森研究过的同型动力学。我们先给出示例，然后给出定义。

考虑图中显示的圆盘Δ的 f 嵌入自身。缩并半圆盘 A ，E 的半幂函数 $f(A)$ ，$f(E)$在 A 中;它将矩形 B ，D 线性地发送到矩形 $f(B)$，$f(D)$，在垂直上拉伸它们，在水平上收缩它们。对于 D，它也旋转了 180 度。我们并不在乎 C 的图像 $f(C)$ 是什么，只要它不与矩形 $B \cup C \cup D$ 相交。在图中，它的位置使整个图像像一个马蹄形，由此命名。

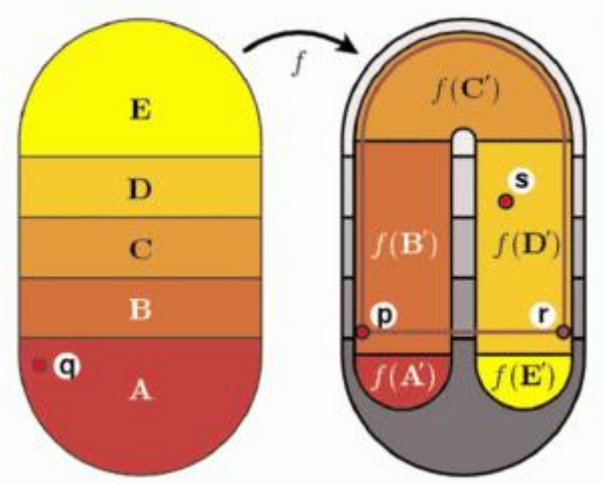

图 1 斯梅尔马蹄。(这张图片是由《美国数学学会公告》的图形编辑比尔·卡塞尔曼制作的。最早见于舒柏先生于二五年五月号刊登于医疗辅助队公告的一篇文章。)

很容易看到 f 扩展到 2-球自身的一个微分同态。我们也将其扩展称为 f，并计算其在Δ中的动力学，即其对 $n \in Z$ 的迭代为 f^n 。

必然存在三个不动点 p, q, s，点 q 为汇聚点，即所有点 $z \in A \cup E \cup C$ 在前向迭代下均收敛于 $f^n(z) \to q \ as \ n \to \infty$ 。

点 p，s 是鞍点。如果 x 位于水平通过 p， f^n 随着 $n \to \infty$ 手链到 p,而如果 y 位于垂直通过 p 的逆迭代 f ，手链到 p。对线性坐标集中在 p，$f(x,y) = (kx, my), (x,y) \in B, 0 < k < 1 < m$ 。同样地， $f(x,y) = (-kx, -my)$ 对应 D 在 s 上的线性坐标下。

集合

$$W^s = \{z : f^n(z) \to p \quad as \quad n \to \infty\}$$

$$W^u = \{z : f^n(z) \to p \quad as \quad n \to -\infty\}$$

为 p 的稳定和不稳定流形时，它们相交于 r 点，即庞加莱所说的同宿点。这里的同斜点是横向的，因为稳定流形和不稳定流形在 r 处不相切。图中只局部显示了这些不变流形。迭代在全局上扩展了它们。
f 的动力学的关键部分发生在马蹄铁上

$$\Lambda = \{z : f^n(z) \in B \cup D, \forall n \in Z\}$$

一切事物都被解释为“两个符号空间上的完全转移”。(参见符号动力学)。取两个符号 0 和 1，观察所有的双无限序列 $a = (a_n)$ 的集合 $\sum$ ，其中 $n \in Z$ 对应每个 n, a_n 为 0 或 1。将 $a = (a_n)$ 发送到 $\sigma(a) = (a_{n+1})$ 的映射 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ 是一个称为移位映射的同态映射。它把小数点向右移了一位。位移图的每一个物理性质都被 $f|_\Lambda$ 平等地拥有，因为有一个同胚 $h : \Sigma \to \Lambda$ 使得这个映射 σ 有 2"周期 n 的周期轨道，所以 $f|_\Lambda$ ，σ 的周期轨道集中，$\sum$ 也一定是 $f|_\Lambda$ 的周期轨道。$\sum$ 中初始条件的小变化就会引起 σ 轨道的大变化，所以 $f|_\Lambda$ 也是如此。简而言之，由于共轭，σ 的混乱在马蹄铁中得到了准确的再现。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

通路。这种结合是很容易描述的。给定任何 $a \in \Sigma$，都有一个唯一的 $z \in \Lambda$，使得对任意的 $a_n = 1$ 都有 $f^n(z) \in B$，对任意的 $a_n = 0$ 都有 $f^n(z) \in D$。这样就实现了马蹄形动力学。例如。(...11.111...)对应点 p，(...00.000...)对应 s，而(...111 . 0111 ...) 对应 r。

斯梅尔分析的效用是:每一个具有横向同宿点(如 r)的动力系统，其某些幂 f^T 也具有包含 r 的马蹄形，从而产生位移混沌。如今，即使在高维空间中，这个事实也不难发现。周期轨道的稳定流形和不稳定流形之间仅存在横向交叉就意味着马蹄形。对于流，对应的断言适用于庞加莱映射。来概括

横向均匀性 $\Rightarrow$ 马蹄形 $\Rightarrow$ 混沌。

由于横截性在摄动下持续存在，由此可见马蹄形也是如此，它的混沌也是如此。

马蹄的解析特征是双曲性-通过导数表示的挤压/拉伸现象。f的导数拉伸平行于垂直方向的切向量收缩平行于水平方向的切向量。不是在鞍点处，而是在Λ处均匀。在一般情况下，紧不变集(如Λ)在任意维上的双曲性是通过对切丛子丛的导数的展开和收缩来表示的。在负曲率流形上的马蹄形流和测地线流这样的例子，小尺度统一，定义了现在称为均匀双曲动力系统的东西。在这些系统中，非游荡集是一个均匀的超曲集，它的稳定和不稳定流形在所有点上是横向的，或者至少没有显示出循环(见，例如。以下是书书的精确定义)。对这些系统的研究导致了现代动力系统理论中许多富有成果的发现。

David Ruelle 称斯梅尔 1967 年的文章是“数学文学的杰作”。今天它仍然值得一读。双曲线动力学在 1960 年代和 1970 年代蓬勃发展。阿诺索夫证明了现在以他的名字命名的全球双曲系统的结构稳定性和遍历性。西奈对双曲型计算机系统的遍历理论进行了更广泛的研究，并特别证明了对双曲型不变量集可以构造。

Adler 和 Weiss 的马尔可夫划分，从而给出了一种类似马蹄形系统的双移位编码。这项工作由鲁尔和鲍恩继续推进。他们发现的不变测度，现在称为西奈-鲁尔-鲍文测度(SRB 测度)，描述流形中大多数勒贝格点的渐近动态，甚至对于耗散系统也是如此。一致双曲动力系统是值得注意的。它们表现出混乱的行为。通过 Anosov, Smale, Palis 和 Robbin 的工作，它们是结构稳定的或非游荡集稳定的，即一致双曲系统的摄动在拓扑上与原全局共轭或至少限制在非游荡集。通过西奈，鲁尔，鲍恩的工作他们被统计描述。

在 60 年代的早期，人们希望均匀双曲动力系统在某种意义上是典型的。当它们在所有流形上形成一个大开集时，它们不是稠密的。寻找典型的动力系统仍然是一个大问题。进展参见 Bonatti 等人(2004)的调查。双曲周期点、它们的全局稳定和不稳定流形以及同宿点仍然是理解混沌系统动力学的主要特征和工具。

事实上，从庞加莱首次观测到的天体力学到生态学和贝蒙德，在科学和工程中遇到的许多动力系统中都证明了横向同宿点的存在。

历史

马蹄铁的发现历史和 1960 年的数学状况见斯梅尔详细说明(1998)。

马蹄铁是用几何方法观察卡特赖特-利特伍德和莱文森的美景的自然结果。它有助于理解混沌的机制。并解释动力学中普遍存在的不可预测性。它于 1960 年在里约热内卢被发现。斯梅尔作为博士后得到了美国国家科学基金会(NSF)的支持。斯梅尔博士在妇女研究所(IMPA)受到款待。由巴西政府出资，提供了舒适的办公室和工作环境。(随后有人质疑他使用了美国纳税人的钱在里约热内卢海滩上进行的这项研究。事实上，正是约翰逊总统的科学顾问。唐纳德·霍尼格 1968 年在广为流传的《科学》杂志上就这一问题发表了文章。)

在里约热内卢，斯梅尔正在做一个数学领域的研究，这个领域后来成为了混沌理论。作为拓扑学家。他为自己刚刚在《动力学》上发表的一篇论文感到自豪。他很满意那篇论文中的一个结论(用现代术语来说)“混乱”是不存在的!这种欣快很快就被一封来自 数学家诺曼·莱文森。他与人合著了关于常微分方程的主要论文，是一位值得认真对待的科学家。莱文森描述了他早期的一个结果，有效地包含了一个对斯梅尔的树式结构的反例。莱文森的论文反过来又澄清了英国数学家玛丽·卡特赖特(Mary Cartwright)和 j·l·利特伍德(J. L. Littlewood)在二战期间所做

的大量工作。卡特赖特和利特伍德一直在分析一些方程式，这些方程式是在进行有关无线电波的战争研究时出现的。他们发现了这些方程的解的意外和不寻常的行为。事实上，卡特赖特和利特伍德已经用数学方法证明了混沌的迹象是可以存在的，甚至在工程中自然出现的方程式中也是如此，但是世界还没有准备好去听，甚至托达夫他们对混沌理论的重要贡献也不为人所知。为了理解莱文森的反例，有必要将他的分析论证转化为几何思维方式，从而导致马蹄的发现。

参考文献

- Bonatti, Lorenzo J. Diaz, Marcelo Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: A Global Geometric and Probabilistic Approach,* Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer, 2004.
- Michael Shub, *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer, 1986.
- Michael Shub, *What is a Horseshoe?*, Notices of the AMS, v.52, p.530-532
- Stephen Smale, *Differentiable dynamical systems,* Bull. Amer. Math. Soc.73(1967), 747-817.
- Steve Smale, *Finding a horseshoe on the beaches of Rio,* Mathematical Intelligencer 20 (1998), 39-44.

内部参考文献

- Yuri A. Kuznetsov (2007) Conjugate maps. Scholarpedia, 2(12):5420.
- James Meiss (2007) Dynamical systems. Scholarpedia, 2(2):1629.
- Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358.
- Leonid Pavlovich Shilnikov and Andrey Shilnikov (2007) Shilnikov bifurcation. Scholarpedia, 2(8):1891.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838.