洛伦兹吸引子的存在性

Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK
Ian Stewart
Stewart, I. The Lorenz attractor exists. Nature 406, 948–949 (2000). https://doi.org/10.1038/35023206

近 40 年来，现代非线性动力学的经典标志之一就是洛伦茨吸引子。以其有趣的双叶形状和混沌动力学，洛伦兹吸引子象征了混沌中的秩序。唯一的问题是:它存在吗?数学家们缺乏一个严格的证据来证明洛伦茨方程的精确解与计算机通过数值逼近产生的形状相似，而且他们也不能证明它的动力学是真正混沌的。也许，计算结果显示了一些仅仅看起来像超萨数字错觉的东西。聪明的投资者一直认为洛伦茨系统中的混沌是真实的，但严格的动力学数学技术无法证明这一点。直到去年，也就是乌普萨拉大学的沃里克·塔克完成了一篇博士论文，表明洛伦茨方程确实定义了一个鲁棒的混沌吸引子。证明已经发表了(W. Tucker, C. R. Acad. Sci. 328, 1197–1202; 1999)，马塞洛·维亚纳 (Math. Intell. 22, 6–19; 2000)。

塔克的工作意义重大，不仅因为它为洛伦兹吸引子提供了坚实的基础，还因为他的技术将广泛应用。最后，我们认为我们从数值模拟中了解的非线性动力系统和我们实际上完全逻辑严密的了解之间的尴尬差距开始缩小。目前，这些方法仅限于三维动力学，但在塔克的突破之后，这种情况很可能会改变。大于 3 的维数是相当有趣的，因为动力系统的维数不是普通空间的维数，而是方程中变量的数目。例如，由地球、火星和空间探测器组成的三体系统的运动要求每个物体有六个变量——三个位置变量和三个速度变量——18 维动力系统也是如此。

何必纠结于严谨的证明？当然，这些方程的任何实际含义都已经体现在数值结果中——我们需要痴迷于逻辑严密性吗？是的，我们有。对非线性微分方程的数值解持保留态度有几个原因。数值方法是近似的，混沌系统对近似高度敏感；众所周知，数学有时会给出严重误导的结果。但最深层的原因是，在我们能够证明我们的计算机似乎在告诉我们什么之前，我们忽略了我们数学技术中的一个巨大差距。通常这样的差距是一个重要的概念想法潜伏在附近的线索，就像这里的情况一样。

洛伦兹吸引子可以追溯到 1963 年，当时气象学家爱德华·洛伦兹发表了一篇分析文章，分析了他从大气对流模型中提取的一个简单的三重微分方程系统。他指出，它们具有一些令人惊讶的特征。特别是，这些方程“对初始条件很敏感”，也就是说，一开始的微小差异会随着时间的推移而成倍放大。这种不可预测性是混沌的一个特征。相反地，在系统中也有“顺序”:在三维中绘制的方程的数值解，由曲线绕着一个奇怪的双层表面绕来绕去，这个表面后来被称为洛伦兹吸引子。

吸引子的几何形状与“方程的流动”密切相关，即对应于微分方程解的曲线。

原点处有一个不稳定平衡，鞍点。蜂群不断地从这一点经过，然后被推向左边或右边，最后只能绕着马鞍往回走。当它们回圈时，相邻的曲线被拉开——这就是不可预测性的产生方式，它可以在马鞍的任何一边结束。结果是一个从左到右的明显随机的循环序列。

证明洛伦茨系统是一个混沌吸引子的核心技术问题是把这些表述转换成适当精确的数学。塔克的证明结合了两个主要观点。一个是引入了混沌吸引子的奇异双曲性特征的概念。C. Morales, M. J. Pacifico 和 E. Pujals (c.r. Acad. Sci. 326, 81-86;1998)。以前关于动力系统的工作都集中在“双曲”系统上，在这种系统中，方程组的流动总是可以分为一组收缩方向和一组扩展方向。但是洛伦茨系统不是双曲的。奇异双曲性以部分流动应在体积上膨胀的条件取代了流动中膨胀方向的概念。如果盒子的一些边膨胀，另一些边收缩，但如果膨胀的量大于收缩的量，那么盒子的体积也会膨胀，所以单一性双重性的限制要小于双重性。

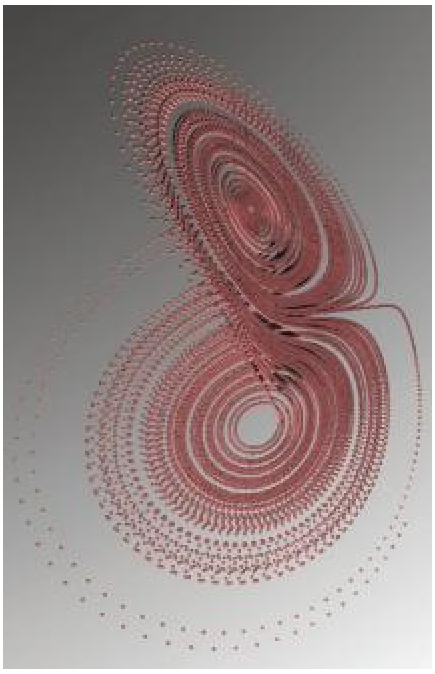

图 1 洛伦兹吸引子最初是由地球大气对流的一个简单模型推导出来的。在此之前，洛伦兹吸引子只能通过计算机上的数值近似来产生，如图所示。现在我们有了一个严格的证明来证实它的存在。

塔克的另一个重要想法是以严格的方式使用计算机计算来建立微分方程解的几何特征——正规数值加上精确的误差估计。塔克通过跟踪许多小盒子(多达10，000 个)的时间演变，获得了曲线向原点循环的严格近似。但是微分方程的数值解在鞍点附近会遇到问题，因为流动以指数速度减慢。为了克服这个困难，塔克使用了公认的“范式”技术。在一个平衡附近，任何微分方程都可以转化成一个方程，这个方程可以用一个精确的公式来求解，高度近似。当流动过于接近平衡时，可以用这个公式代替数值程序。

接下来的任务就是找到一组盒子，这样曲线从一个盒子开始，最终返回到一个盒子(通常是一个不同的盒子)，这实际上说明盒子的集合形成了一个吸引器。

还需要一些与奇异双曲性有关的进一步的技术条件来确定流动是混沌的。寻找合适的盒子开始于基于原始数字的有根据的猜测;任何因生长过快而造成麻烦的盒子都被细分，直到它们不再造成麻烦为止。当所有盒子的细分过程停止时，证明就完成了。在电脑上快花了 30 个小时才能找到合适的箱子。

撇开技术细节不谈，这里的主要思想是，小心，天真的数字可以与精确的误差估计一起使用，以建立 sig。一个非线性微分方程流动的重要特征。当这些特征与适当的概念见解相结合时，混沌吸引子的存在就变得无可辩驳。因此，多亏了塔克，动力系统理论家们终于可以不再担心他们最具影响力的偶像是否会突然崩溃。洛伦茨最初的见解，即他的方程式的奇怪行为不是一个偶然的产物，不再有争议。

Ian Stewart is at the Mathematics Institute,
University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK.
e-mail: ins@maths.warwick.ac.uk

Issue Date

31 August 2000