

# 罗斯勒吸引子

Christophe Letellier and Otto E. Rossler (2006), Scholarpedia, 1(10):1721.  
Christophe Letellier, Department of Physics, University of Rouen, France  
Dr. Otto E. Rossler, University of Tübingen, Germany

罗斯勒吸引子是系统的混沌吸引子解

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

由罗斯勒(1976)提出，常称为罗斯勒系统。这里  $(x, y, z) \in R^3$  是定义相空间的动力学变量， $(a, b, c) \in R^3$  是参数。

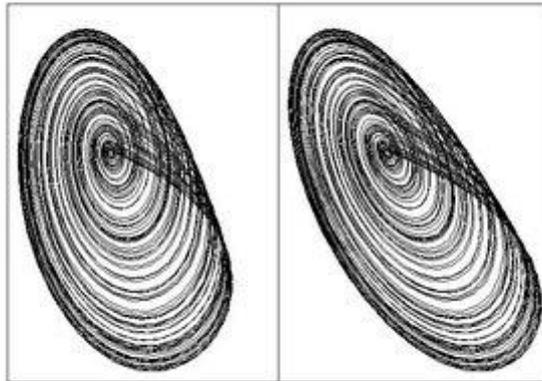


图 1 罗斯勒吸引子的立体视图。参数值： $a=0.432, b=2, c=4$ 。

## 1 性质

### 1.1 不动点

罗斯勒系统有两个不动点(常称为平衡)F 位于

$$(x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm}) = \left( \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)$$

当轨迹落在一个混沌吸引子上时，不动点  $F_-$  位于吸引子的中央，是一个具有不稳定二维流形的鞍形焦点——主要在  $y$  平面上是一个不稳定螺旋。  $F_+$  在吸引子区域之外。当轨迹离开  $y$  平面时，非线性  $z(z-c)$  开始活跃。轨迹因此到达了  $F_+$  的邻域，也是一个鞍点，它的一维不稳定流形使轨迹沿着  $F_-$  的一维稳定流形，一个新的循环就会发生。使用适当的参数值。这样，轨迹描述了一个混沌吸引子。

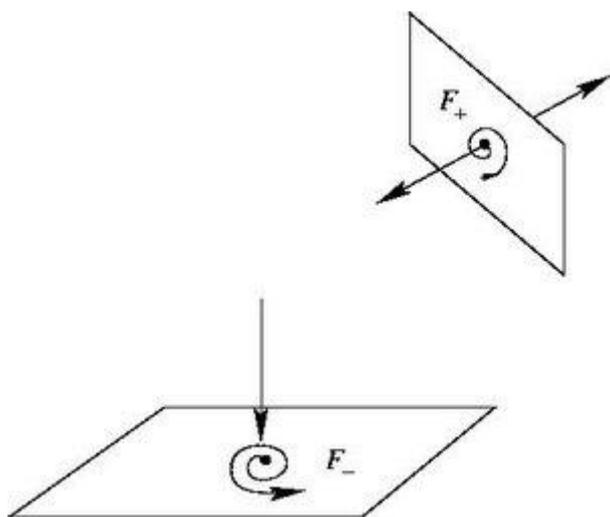


图 2 不动点及其流形示意图。

## 1.2 拓扑描述

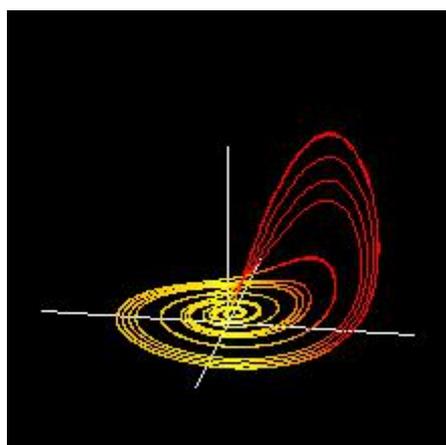


图 3 三维空间中的 Rosler 吸引子。视点绕着吸引子旋转。参数值:  $a=0.432$ ,  $b=2c=4$ 。

罗斯勒吸引子的拓扑结构首先是用一个纸模型描述的。典型地，纸张模型可以分为两条，一条是“正常带”，一条是莫比乌斯带。这两个带定义了两个不同的拓扑域。在 20 世纪 90 年代，这样的拓扑描述导致了分支流形的概念，也称为结

保持器或模板(见 Gilmore & Lefranc, 2002)。可以看出, 这种纸片模型编码了嵌入在吸引子中的不稳定周期轨道的所有拓扑性质。罗斯勒吸引子从拓扑角度来看是最简单的混沌吸引子, 即简单的拉伸折叠带状。

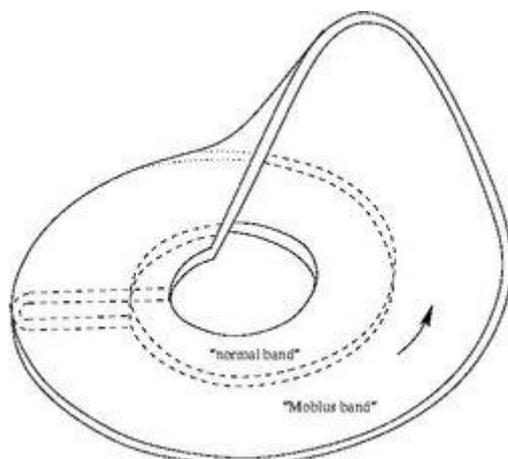


图 4 纸张模型(夸张)显示“正常带”。还有“莫比乌斯带”。

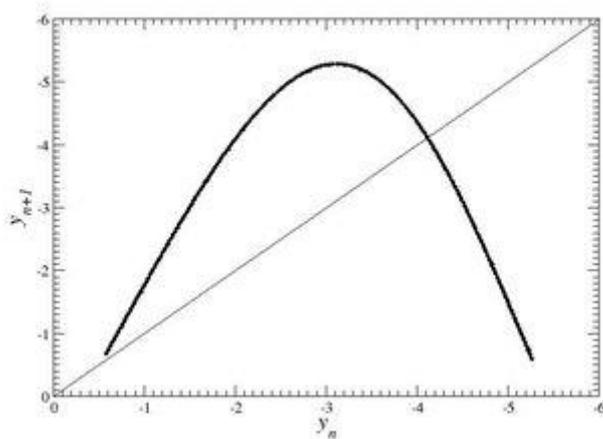


图 5 罗斯勒吸引子参数值的首次返回图: $a=0.432, b=2, c=4$ 。

罗斯勒吸引子的庞加莱部分方便地定义为

$$P \equiv \{(y_n, z_n) \in R \mid x_n = x_-, \dot{x}_n > 0\}.$$

$(y_n, z_n)$  在平面上组成一条非常细的曲线  $\mathcal{B}$ , 这条曲线是通过吸引子的拉伸和折叠过程生成的。这种拉伸和折叠过程可以通过返回图观察到  $y_n$  到这个 Poincare 部分的第一个返回映射是一个简单的抛物线, 用于上图所示的参数值。因此, 这是一个单峰映射(即, 有一个单一的极值)由两个单调分支组成, 由一个定义法线之间边界的最大值分隔。带-增加的分支和莫比乌斯带-减少的分支。因此, 罗斯

勒吸引子可以看作是平凡的悬架——给定一个  $n$  维流形  $m$  的离散映射  $f$ ——在一个  $n+1$  维流形上构造逻辑映射流是可能的(两者都服从 Sharkovsky 顺序)。

### 1.3 分岔图

当参数值变化时, 可能会出现分叉。事实上,  $a \in [0.125; 0.43295]$ ,  $b=2$  与  $c=4$ , 在罗斯勒系统的分岔图与相关联的逻辑图之间(几乎)存在一一对应关系  $\mu \in [1; 4]$ 。因此, 在经过一段时间的倍增后, 如逻辑图中那样, 混沌状态出现。

当  $a$  大于 0.43295 时, 在纸张模型中出现第二个极值和第三个带, 导致多峰混沌, 最初被罗斯勒称为“螺旋型混沌”。完整的拓扑描述可以在莱特利尔等人(1995)中找到。

事实上, 不存在单一的罗斯勒系统, 而是具有不同拓扑结构的不同常微分方程组的完整集合。下面给出了一些可以找到这些模型的参考文献。

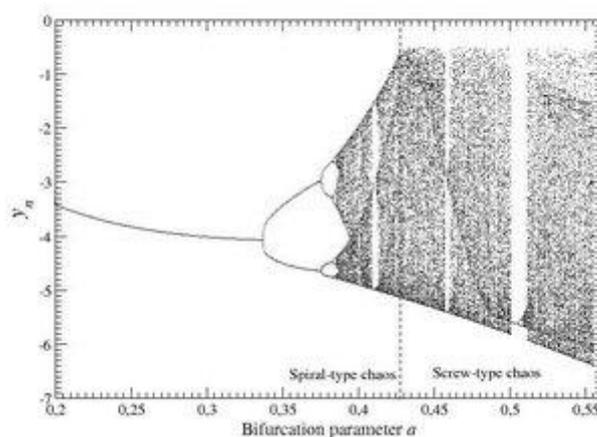


图 6 分岔图与参数  $a$  的罗斯勒系统。其他参数值:  $b=2, c=4$ 。

### 1.4 李雅普诺夫光谱

当混沌吸引子稳定时, 三个李亚普诺夫谱  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ) 满足  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ , 和  $\lambda_3 < 0$ 。平均而言,  $\lambda_1$  为吸引子拉伸过程的展开率,  $\lambda_3$  为折叠过程的还原率。由于  $\lambda_3$  的绝对值远大于  $\lambda_1$  的绝对值, 吸引器中的正常带和莫比乌斯带变得非常薄。

## 2 关于系统发现的回忆

奥托·罗斯勒在 2006 年说：“我是一个非常视觉化的人，我为此道歉。三维空间的曲线让我着迷。1975 年，当阿特·温弗里告诉我混沌的存在时，我曾计划产生一个“打结的极限环”；因此，当阿特向我介绍洛伦兹吸引子，让我建立一个具有相同行为的化学反应系统时，我的大脑被它的美丽所淹没。不成功的时候(只是后来我和彼得·奥图诺娃共同成功了)，我决定退而求其次。我想知道围绕鼻子的绳子，在末端脱落之前绕几圈，然后弯曲回到起点或它的邻居，是否不会在 3D 空间中产生类似的缠结。然后，这个狭窄的隧道状的滑梯在我的脑海中神奇地变平成一个螺旋，奇怪的是，在弯曲成一个朝向其原点附近的回注回路之前，它是在膨胀而不是收缩。(相反的壮举，由内向外回注，后来被诺曼·凯鹏华盈和塞巴斯蒂安·菲舍尔发现。正如我后来所了解的，这很大程度上是十年前在另一个时间方向上 Shilnikov 在拓扑上所做的。)因此，一个字母-Z 样的慢流形(用克里斯托弗·塞曼的话来说)，但横向扩展成一张纸，足以在我的脑海中作为一个主机提供自己。人们可以用 1D 回归地图来证明混沌的存在。但是后来被克里斯蒂安·米拉重新发现的方程很混乱。大约在同一时间，芙罗莉丝·塔肯斯也有类似的想法。模拟了 1975 年 12 月工作的字母-Z 纸下层的膨胀螺旋。记住鼻子周围的绳子有助于离开奇异摄动的安全地带。”在速度较慢的惠普 9820A 台式机上运行速度更快的“肮脏”等式因此变得有吸引力。逐步简化原始奇异摄动方程，最终在字母 Z 中省略上膝，似乎是合理的。罗伯特·罗森第一次看到“螺旋混沌”简化吸引子在缓慢的台式绘图仪上慢慢形成，内置接近机器语言的计算机，他喜欢他的模拟系统定理的这个例子(一条长线)，正如他在 1968 年发表在《数学生物物理学公报》上的论文中所说的。

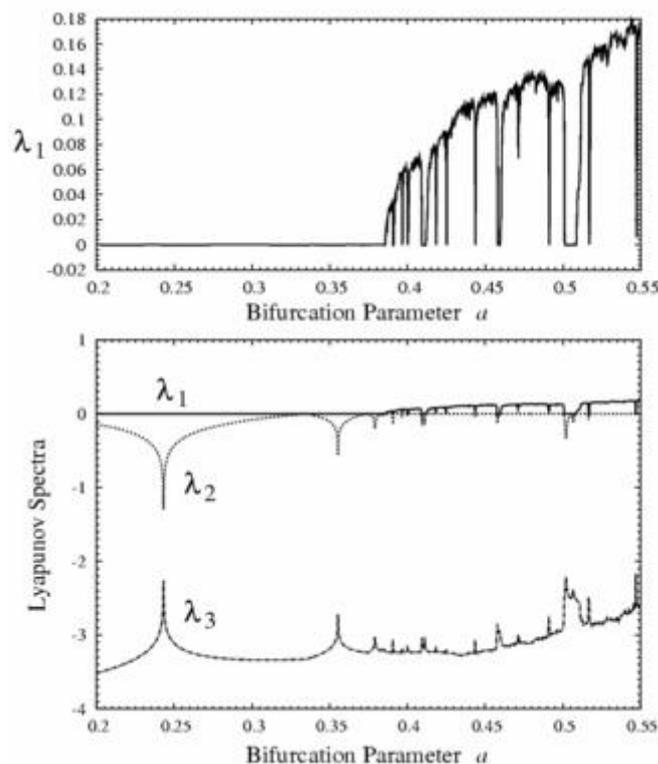


图 7 罗斯勒系统的李亚普诺夫光谱与参数  $a$ 。其他参数值： $b=2, c=4$ 。

展开螺旋分量为负阻尼线性谐振子:

$$\dot{x} = -y$$

$$\dot{y} = x + 0.2y$$

$z$  变量的阈值。  $x = 5.7$ , 有恒定的 0.2 流入,

$$\dot{z} = 0.2 + z(x - 5.7)$$

如果  $z$  被反馈到第一行就足够了:

$$\dot{x} = -y - z$$

后来, 雷内·托马斯对这个反馈电路的拓扑结构有了更深入的了解。超混沌成为了 4D 的自然继承者。不过, 当我心情好的时候, 3D 空间里的“重新注入的绳子”仍然会让我的心怦怦直跳。当绳子回到你的鼻子, 但永远不会回到同一点时, 它有一种温柔的发痒意味。想象一下: 一个无比精确和无限创意的天使正轻轻地抚摸着你的鼻子。愉快的笑声从未停止。”

## 参考文献

- R. Gilmore & M. Lefranc, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
- C. Letellier, P. Dutertre & B. Maheu, [Unstable periodic orbits](#) and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.
- C. Letellier, E. Roulin & O. E. Rössler, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337-360, 2006.
- R. Rosen, Turing's morphogens, two-factor systems and active transport, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **30**, 493-499, 1968.
- O. E. Rössler, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
- O. E. Rössler, Chaotic behavior in simple reaction system, *Zeitschrift für Naturforsch A*, **31**, 259-264, 1976.
- O. E. Rössler, Different types of chaos in two simple differential equations, *Zeitschrift für Naturforsch A*, **31**, 1664-1670, 1976.
- O. E. Rössler, Chaos in abstract kinetics: two prototypes, *Bulletin of Mathematical Biology*, **9**, 275-289, 1977.
- O. E. Rössler, Continuous chaos, in *Synergetics* (Proceedings of an International Workshop on Synergetics at Schloss Elmau, Bavaria (May 2-7, 1997), Ed. H. Haken), Springer-Verlag, 1977.
- O. E. Rössler, Continuous chaos: four prototype equations, *Annals of the New York Academy of Sciences*, **316**, 376-392, 1979.

内部参考文献

- John W. Milnor (2006) [Attractor](#). *Scholarpedia*, 1(11):1815.
- Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) [Periodic orbit](#). *Scholarpedia*, 1(7):1358.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) [Stability](#). *Scholarpedia*, 1(10):1838.