

蝴蝶效应

Catherine Rouvas-Nicolis and Gregoire Nicolis (2009), Scholarpedia, 4(5):1720.

Catherine Rouvas-Nicolis, Royal Meteorological Institute of Belgium, Brussels, Belgium

Gregoire Nicolis, Universite Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium

蝴蝶效应是美国气象学家爱德华·n·洛伦茨(1917-2008)发明的一个概念，用来强调微小的原因可能会产生重大影响的可能性。最初，它与天气预报的问题有关，最终，它成为了一个用于各种上下文的隐喻，其中许多超出了严格的科学领域。

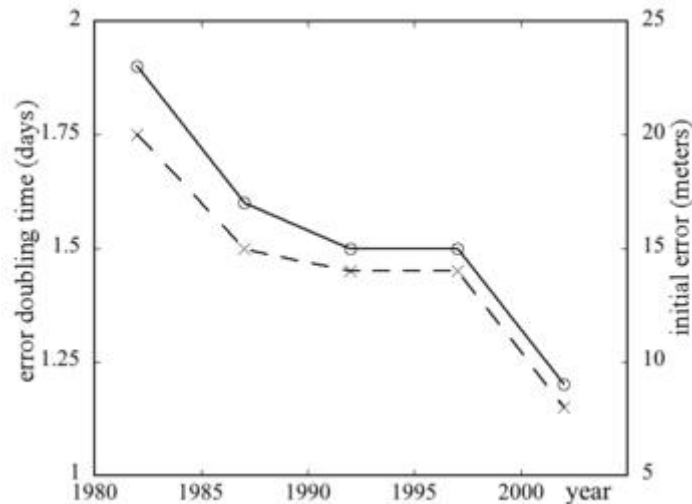


图1 一天的演进(以5年为单位)5从ECMWE业务天气预报模型中获得的北半球冬季重力势高度(大气状态的代表量度)的初始误差(实线)

1 一个简短的历史

1972年12月29日，洛伦茨在华盛顿举行的美国科学促进会第139次会议上发表了题为“美国科学促进会”的演讲可预测性:巴西的流感扇动翅膀会引发德克萨斯州的龙卷风吗?这次谈话的主要信息是大气的行为对于小振幅的扰动是不稳定的。脆弱的蝴蝶——实际上引入标题通过会议的召集人,无法抵达洛伦茨时程序的版本似乎提供了理想的小插图,而不是压倒性的现象像龙卷风中遇到我们的自然环境和干扰果断地与我们的日常经验。

从一开始，洛伦茨就充分意识到，鉴于蝴蝶和龙卷风之间的不相称，这样一个标题可能会带来混淆的危险。他强调，标题中提出的问题，从字面上看，决不是声称得到肯定的答案。问题是。两种不同的天气情况，哪怕只是一只蝴蝶扇动翅膀的影响，长期来看，是否会经历一种特定类型的两种不同的事件序列(比如龙卷风):最终，什么才是重要的。这就是大气的不稳定性。洛伦兹还警告说，他

在 1963 年研究描述拉夫利贝纳德流和热对流阈值的布西涅斯克方程的三模截断时发现了蝴蝶效应和看起来很奇怪的蝴蝶[吸引子](#)的混淆。

在洛伦茨之前，从亨利·庞加莱到诺伯特·维纳，许多研究人员都预测过小的原因通常会产生大的影响，尤其是在天气的背景下。洛伦茨工作的优点是把大气不稳定的概念放在固体上。定量的基础，并把它与经历非线性[动力学](#)和确定性混沌的大类别系统的性质联系起来。

2 误差增长与复杂系统的预测

像大气这样的物理系统在初始条件中不可避免地受到小的不确定因素的影响，在运行提供其未来演变信息的模型时需要具体说明这些不确定因素。这种不确定度是实验测量过程中固有的。即使是最复杂的形式，也受到有限精度的限制。观察在给定的环境条件下需要因此而不是一个系统由一个孤立点[状态空间](#)(相空间,在动力系统理论的术语)的一个现实中处理一个系统包含在一个不确定性球占据这个空间的有限体积。我们感兴趣的系统位于这个球的某个位置，但我们不能确定它的确切位置，因为对于观察者来说，它的所有点代表一个相同的状态。简而言之，物理系统受到与初始误差有关的普遍扰动源的影响。那么，问题是，它们是会通过控制错误来做出反应(在这种情况下，它们会被认为是稳定的)，还是相反，它们会在进化过程中放大错误(在这种情况下，它们会被认为是不稳定的)。

对于大气来说，这个问题可以通过诉诸于描述相关大气场在时间上的演变的现实模型来回答。欧洲中期天气预报中心(ECMWF)开发的模式是这类操作模式中最著名和最广泛使用的一种，该模式用于制作从几个达夫到几个星期的天气预报。这包括每天准备 N 天的全球大气状况预报(通常是这样的)。N = 10 天)。使用当前的状态作为初始条件。由于方程是由逐步积分解决的，中间范围(1,2, ...) 日预报也经常实现。利用这个模型可以做出相当不错的 1 天预测。人们期望状态预测一个给定的日子。提前 1 天，可视为等于随后当天观察到的状态，加上一个相对较小的误差。通过比较第二天 1 天和 2 天的天气预报。2 天和 3 天以后的天气预报等等。一个人然后可以决定[平均](#)几个连续的戴维如何平均误差演变的时间。

图 1 总结了 1982-2002 年期间的结果(以 5 年为分阶段)，确定了误差增长的存在，这是由于对大气的初始条件敏感地依赖。更重要的是，这种依赖导致了最强大的增长形式，即指数增长。图中的整条线描述了 1982 年初始误差翻倍的时间，这个值大约是 2 天，这是 Lorenz 自己在一项开创性的工作中确定的，在这项工作中，欧洲中期天气预报中心的数据首次从这个角度进行分析。可以看出，这个数值在 2002 年已经下降到大约 1.2 天。乍一看，这种下降似乎是自相矛盾的，因为在这 20 年期间，我们见证了重大的技术进步，如空间分辨率的提高。大幅改进的参数化方案和一个几乎是三倍的减少初始(天预报)错误(图 1 中虚线)。它反映了一个事实,尽管几天前预估的准确性大大增加详细的天气预报状态足够长的距离与日益成熟的模型可能行不通,由于固有的[复杂性](#)的动态气氛。这种复杂性的部分原因是大范围的空间和时间尺度上展开的过程的[共存](#):天气模式中较粗糙结构中的错误往往比较精细结构中的错误翻倍要慢得多(例如,)。个别云

的位置), 如果不是因为后者的事实。当达到一个可感知的尺寸时, 也容易在粗粒结构中引起误差。

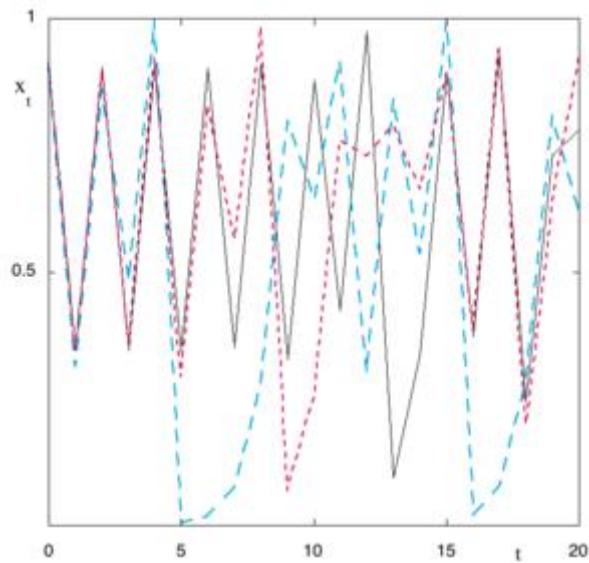


图 2 现象说明 5 模型系统中引起确定性混沌的对初始条件的敏感性。黑线为参照系轨迹。红线和蓝线表示源自两个初始条件的轨迹, 不同于 $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ (红线) 和 $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ 的参考轨迹 (蓝色曲线)。

显然, 一旦两个瞬时状态之间的距离最初被一个非常小的误差分开, 将超过实验分辨率, 状态将不再是观察者无法区分的。因此, 在这个时间范围之外, 将不可能预测手头系统的未来演化。这就提出了一个基本问题, 即大气行为背后的现象的可预测性。

现在, 对初始条件的指数敏感性被证明是确定性混沌的主要特征, 这是一种众所周知的行为, 隐藏在由非线性演化规律控制的大类确定性动力系统之下。这为使用混沌理论的工具分析误差增长和理解大气中的蝴蝶效应开辟了道路。此外, 由于已知确定性混沌不仅发生在涉及大量复杂耦合变量的系统中, 而且发生在服从少数变量的普通系统中, 误差增长和蝴蝶效应实际上似乎是普遍有效的概念。这就彻底排除了蝴蝶效应可能反映出对大气的不完全了解与大量变量 (ECMWF 预测模型高达 10^7 个左右) 和掩盖某些潜在规律的参数的存在有关的想法: 系统服从演化规律, 这些规律最不为人知, 受制于完美控制的参数, 在一定的范围之外仍然是不可预测的。

图 2 中的黑线描述了一个典型的 1 变量离散时间动力系统产生的时间序列, 该系统产生混沌行为。图中红色和蓝色的线对应的是变量 a 在时间上的连续, 来自于两个不同于参考轨迹的初始条件(黑线), 其振幅分别为 $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ 和 $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ 。

可以看到, 参考和扰动的轨迹实际上是相互跟随的, 直到某一时刻 t^* , 该时刻 t 随着 $\varepsilon_i (i=1,2)$ 而减小, 随后其发散程度与 x 的整个变化范围相当。

利用图中的数据，可以推断出误差的瞬时值

$$u_i(\varepsilon, x_0) = x(t, x_0 + \varepsilon) - x(t, x_0)$$

对于给定的 x_0 ，这个量表现出非常明显的变异性。与动力学相容的所有可能初始状态的平均(保持 ε_i 如上所示的值)导致了图 1 的类似逻辑的平均二次误差增长曲线。可以区分为三个不同的阶段:初始(短时间)诱导阶段，在此阶段，误差呈指数级增长，但仍保持(当 ε 足够小时)较小;一种中间爆炸阶段，其拐点位于对数依赖于 ε 的 t^* 的值， $t^* \approx \ln 1/\varepsilon$ ，误差突然达到可感知的值;以及最后一个阶段，其中平均误差达到吸引子大小顺序的饱和水平，并在此之后保持不变。确保这种饱和的机制是将最初由于运动的不稳定性而倾向于逃逸的轨迹重新注入相空间的子集，这是吸引子的一部分。

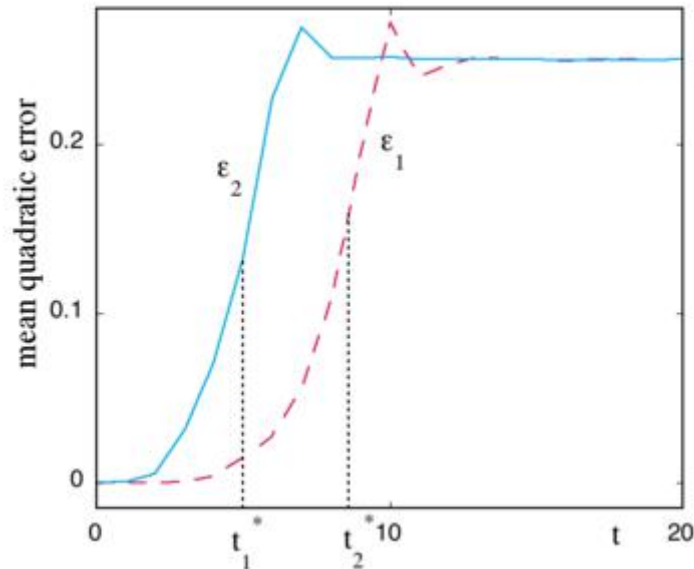


图 2 从 100 开始，初始条件分散在吸引子上，两个不同的初始二次误差， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ 和 $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ 。 t_1^* 和 t_2^* 表示表示误差增长“爆炸”阶段的拐点位置。

请注意，图 2 和图 1 中考虑的初始状态(参考状态和扰动状态)位于同一个吸引子上，一旦指定了演化规律和参数值，该吸引子就被唯一定义。因此，图 2 中描绘的轨迹描述了相同类型的行为，只是事件在时间上的成功方式不同。这证实了洛伦茨关于如何理解蝴蝶效应的警告(参见前一节)。另一个重要特征是误差爆发时间 t^* 对初始值 ε 的弱(对数)依赖性:将 ε 从例如 10^{-2} 减小到类似 10^{-12} 的值，

接近相对于平均值的典型热波动，只会将 t^* 从大约 5 增加到大约 30。自然地，一旦尺度小到热噪声开始显现的程度，其他效应可能会取代并掩盖蝴蝶效应。

上述所概述的动力系统连接也允许一个人确定一个完全由演化规律和参数值决定的三氟林量的数字，提供蝴蝶效应的定量测量。其中最突出的是(最大值)李亚普诺夫指数，定义为

$$\sigma_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{u_t(\varepsilon, x_0)}{\varepsilon}$$

在(指定的顺序)的双重限制无限小的初始误差 ε 和无限长时间 t 。在此设置错误的增长和蝴蝶效应后果 σ_{\max}^{-1} 的积极性,和奥马尔(连同上面的 t^*)定义了时间范围超出预测成为本质上是随机的。

典型的物理系统生活在多维相空间中，因而具有几个李亚普诺夫指数，其中一些是负的。在短时间内，所有这些指数都要参与误差动力学。由于混沌系统的典型吸引子是分形的，将系统从吸引子的初始状态移到吸引子上的一个小误差很可能将其投射到吸引子之外。在重新建立吸引子之前，误差动力学可能会有一个短暂的阶段，在这个阶段误差会随时间衰减。

一类重要的多元系统是空间扩展系统，在这里，根据感兴趣的现象可能发展的不同空间尺度，特别是初始误差可能发生的不同尺度，扩展感兴趣的数量通常是方便的。上面概述的观点表明，一种现象的可预测性取决于它的空间尺度。综上所述，误差增长的动力学是受强。可变性，因为不是所有的初始误差都以相同的速度增长。结果，不同的可预测性指标，如 σ_{\max} 、饱和水平和到达拐点的时间 t^* ，只提供了部分图像，因为在现实中，详细的演变取决于不同可能的错误位置和方向的加权方式。

一个值得一提的情况是，误差以次幂的方式增加，例如， t 的能量。在混沌数学系统中，这种情况沿与其消失的李亚普诺夫指数相关的方向短暂发生。在与正指数相关的方向占据主导的阶段之前。对于非混沌支持向量机，如接受非均匀周期或拟周期运动的支持向量机，幂律是暂态增长的规律。与参考系统和摄动系统之间的相移越来越大有关。当处理蝴蝶效应时，这样的误差不计算在内:平均而言，它们的大小将保持接近初始值 ε ，尽管在某些特定的认识中，人们可能会暂时目睹一个突然的成长阶段。

3 初始误差，模型误差和环境变异性

和实验一样，物理现象的建模也有其局限性。首先，一旦选择了一定程度的描述，小尺度过程(如大气动力学范围内的局部湍流)就会自动被忽略。因为它超过了所采用的(有限)分辨率。此外，模型中内置的许多参数可能无法精确地知道。因此，除了初始误差之外，预测还必须处理模型误差，这反映了一个模型只是现实的近

似表示这一事实。那么，关键问题是，模型误差会在何种程度上被放大，从而影响预测的质量。这就提出了参数蝴蝶效应的问题，它与系统对基本演化规律变化的敏感性有关，在非线性动力学中称为[结构稳定性](#)。我们强调，如果动力学是简单的，初始或模型误差将无关紧要。但在大类别的系统中，情况显然不是这样。因此，初始和模型误差可以看作是揭示当前系统潜在的不稳定性和复杂性的探子。

像大气这样的自然复杂系统可以合理地预期是结构稳定的，因为它们进化的结果，在进化过程中，它们已经适应了环境条件，从可预测性的观点来看，这意味着参考的吸引子。真实系统和近似模型的系统具有相似的结构，相空间上相对接近，不同的只是数量性质。这里的相关问题是，在到达最终吸引子之前，随着时间的推移，摄动系统(模型)将如何偏离其在未摄动吸引子(真实系统)上的初始状态。随着对模型系统的仿真，理论发展得出以下结论：

*在短时间内，平均二次模型误差开始于零水平，并以 t^2 增加，其比例系数取决于参数误差的大小或所采用的分辨率所忽略的项的误差。与初始误差(在 $t=0$ 时从非零值开始)相反。运动的不稳定性和最大的李亚普诺夫指数在这里并没有发挥关键作用。

*随着时间的推移，模型误差的增长非常类似于图 1 的曲线。有趣的是，达到的饱和水平又是有限的，实际上与模型的质量无关。随着相移时间的增加，参考吸引子任意两点之间的典型二次距离的平均值的一阶近似。

综上所述，由于模型误差初始为零，全局(初始加模型)误差的动力学初始阶段必然受初始误差增长的支配。长期以来，初始误差和模型误差都达到一个有限的水平，这取决于参考系统吸引子的性质。作为这两个极端之间的一个规则，我们可以看到两种类型的误差增长之间的交叉，如图 3 所示。在跨越时间 t 之后，经典的蝴蝶效应被反映进化规律本身对小误差的敏感性的效应所取代。因为模型在大多数预测方案中起着至关重要的作用。这在复杂系统的预测中构成了一个附加的不可约的限制。

在前面的讨论中，我们了解到特征参数(真实的或模型的)的值是固定的。人们对复杂系统的一般反应越来越感兴趣，特别是对大气对外部强迫和变化参数的反应——例如，人为影响的结果。在这些条件下对蝴蝶效应状况的初步研究结果总结如下：

*即使是微弱振幅的外部强迫也可能以增强灵敏度([随机共振](#)等)的形式，或状态间的转换(否则将保持分离)的形式，诱发定性上的新效应，这进一步复杂化了预测任务。

*参数在时间上的系统缓慢变化可以增强一个状态的稳定性，否则该状态将倾向于经历不稳定性，并且甚至可以导致系统出于所有实际目的而冻结在一个否则无法持续的状态中的情况。然而，与此同时，围绕平均值的波动趋于增加，因此极端事件的发生增加。

*在很短的时间内，随机作用力(无论多小，包括热噪声)的影响超过了(确定性)演化规律的影响。结果，确定性混沌的指数增长阶段仅在某个取决于噪声强度的特征时间之后出现，因为最初的二次误差仅在时间上线性增长。在这个时间范围内，蝴蝶效应减弱了。

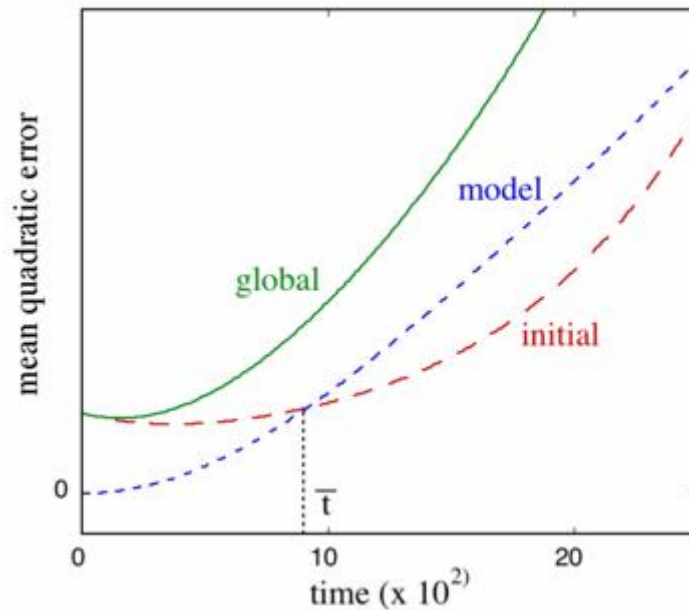


图 4 模型动力系统平均二次误差的典型时间依赖性导致确定性混沌从 10000 开始，初始条件在初始条件误差存在的情况下分散在吸引子上(红线)。模型误差(蓝线)和初始条件和模型误差(绿线)， \bar{t} 表示两个误差源达到可比量级的交叉时间。

4 驯服蝴蝶:预测的概率方法

以蝴蝶效应为象征的复杂系统的敏感性和内在随机性表明了传统确定性描述的局限性，在这种描述中，人们关注的是单个轨迹的详细、点状演化。正如前面所见，由于测量过程在本质上的有限精度，瞬时状态实际上可以理解为相空间中的一个小区域。在蝴蝶效应的存在下，这一区域随后将会变形，其中的个别点将会越来越离域。对于观察者来说，这将表明他们无法根据目前的情况来预测某一过渡时期的未来趋势。这些元素构成了一个令人信服的**动机**，去寻找一种能够以自然方式应对不规则事件序列、状态空间离域和内建的不确定性的替代描述。概率方法提供了这种自然的选择。

一个基本的观点是，由几个子单元组成并经历复杂动态的系统的演化可以以自一致的方式映射成概率描述，而不受启发式近似的影响。概率和确定性的观点因此成为同一现实的两个方面，这允许一个人整理出一种新的规律。

概率描述带来的新奇之处之一是，基础概率分布(由刘维尔、马斯特尔或福克-普朗克方程描述)的演化是线性的，并显示出很强的稳定性和唯一性。这与非线性和不稳定性突出的确定性描述形成鲜明对比。正如我们目前所看到的，这为一种新的预测方法提供了基础。当在代表具体系统(例如大气环流)的数学模型上实现时，概率方法相当于选择一组与可用数据兼容的初始条件；对每个初始条件的模型方程进行积分；并且评估这些单独实现上的感兴趣的量的平均值(或更高的矩)。在大气动力学的背景下，这个过程被称为集合预报。它的主要优点是缓和与单一实现相关的强烈波动，并整理与手头系统内在动态指标相关的定量趋

势。图 1 示意性地说明了集合预报的性质。初始相空间区域 $\delta\Gamma_0$ 中的完整圆代表可用的最佳初始值。它在相空间中的演变，首先是在短暂的时间流逝之后(区域 $\delta\Gamma_1$)，然后是在最终预测投影时(区域 $\delta\Gamma_2$)，由红线表示。现在，考虑到分析中固有的误差，初始位置只是大气的几种可能的初始状态之一。在它的周围还有其他看似合理的状态，在图中用圆圈表示。可以看出，从这些系综成员(蓝线)发出的轨迹最初只是略有不同。但在中间时间和最终时间之间，它们有明显的差异，可能是因为可预测性时间被超过了:有一个初始集合的子集，包括产生类似预测的最佳猜测，但其余的预测相当不同的大气状态。这种差异表明了预测的不确定性。它是一个重要的信息来源，如果只有最佳的初始条件得到整合，就无法获得这一信息，特别是当极端情况被怀疑在不久的将来发生时。应当指出，这种不确定性经常反映动力学的局部性质，例如局部膨胀率和相关相空间方向的取向。

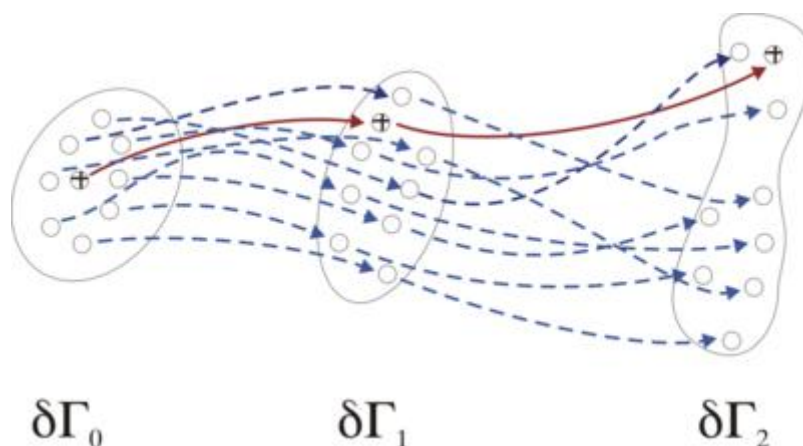


图 5 说明综合预报的性质。相位凸空间区域, $\delta\Gamma_0$, $\delta\Gamma_1$ 或 $\delta\Gamma_2$ 代表三个连续快照的一个附近的初始条件(左)随着预测时间的增加。红线代表传统的确定性单轨迹预测, 利用先进的统计和数据分析技术获得的最佳初始状态。蓝色的线代表其他集合成员的轨迹, 在中间时间(中间)它们彼此保持接近, 但随后分裂成两个子集合(右边), 表明确定性的预测变得不具有代表性。注意伴随潜在不稳定性的相空间体积的变形。

概率方法也可以应用于开发仅基于数据的预测模型。如何实现这一点的一个例子是大气状态之间的转换, 如干旱的发生。其主要思想是, 为了与这些数据兼容, 底层系统应该拥有(就其水文特性而言)两个共存的吸引子, 分别对应于准正常降水和干旱。在确定性设置中, 系统将根据初始条件选择这些吸引子中的一个或另一个, 并且随后将保持被困在其中。实际上, 在由本地传输和辐射机制自发产生的波动的影响下, 或者在外部来源的扰动的影响下, 例如表面温度异常, 系统可以在吸引子之间切换并改变其气候状态。这是间歇性进化的起源, 其形式是围绕一个明确定义的状态的小规模变化, 然后向一个新的状态跳跃, 这再现了记录的基本特征。这个想法当然可以应用于许多其他问题, 包括众所周知的纬向气流和阻塞气流之间的转换。在它们的定量形式中, 属于这一族的模型以潜在概率

分布的演化方程的形式出现，从中可以评估许多相关的量，例如给定大气状态的寿命。

5 蝴蝶效应，因果关系和偶然性

蝴蝶效应在大类别的复杂系统中普遍存在，这促使人们反思两个概念之间的联系，即因果关系和偶然性，这两个概念在整个科学史和一般观念中都被视为截然不同。

经典因果关系涉及两种性质上不同的事件。原因和结果，它在时间上强加一个普遍的顺序。从早期的希腊哲学家到现代科学的奠基者，因果关系一直被视为一块基石，保证了自然是由客观规律支配的，并对旨在解释自然现象的理论的形成施加了严格的限制。技术上，原因可能与描述系统的变量的初始条件有关，或者与施加在系统上的约束条件(更一般地说，是参数)有关。在决定论的设定中，这固定了一个特定的轨迹(更普遍地说，是一个特定的行为)，而正是这种独特的因果关系构成了因果关系的表达，通常被解释为一种物理定律。

但是假设一个人正在处理一个复杂的系统，该系统对初始条件表现出敏感性，因为它发生在确定性混沌中，或者对参数和建模误差表现出敏感性。从确定性的角度来看，原因的微小变化现在产生了完全不同的效果，从而提出了手头系统的可预测性问题。显然，在这种情况下，原因获得了新的地位。在不对因果关系提出质疑的情况下，人们会认识到，从进行预测的角度来看，因果关系的有用性需要重新考虑。正是在这里，统计法提供了一个自然的选择。虽然在形式上与机会的概念相关，但上一节强调的一点是，它们不需要额外的统计假设：当动力学的适当条件得到满足时，统计规律是新出现的属性，它不仅构成了潜在(确定性)动力学的精确映射，而且揭示了它的关键特征，而这些特征在传统的轨迹描述中是模糊的。从某种意义上说，我们在这里处理的是某种确定性的随机性。事实上，控制与复杂系统相关的概率分布的方程，就其数学结构而言，是确定性和因果性的：它们以独特的方式将初始概率(原因)与时间相关或渐近概率(效果)联系起来。通过其固有的线性和稳定性，概率描述重新建立了因果关系，并允许人们仍然做出预测，尽管从根本上不同于传统的角度。

6 从事实到虚构

蝴蝶效应的概念是指一个真实的世界普遍轴承的现象，远远超出了它最初提出的大气物理学的框架。它强调了这样一个事实：由于存在内在的局限性，一旦收集到足够的信息，科学就无法预测一切。在这方面，它为新的出现作出了贡献。后牛顿科学范式被称为复杂性范式。

马尔科姆·格拉德威尔(Malcolm Gladwell)在一本有趣的书中谈到，当想法和趋势跨越一个门槛、提示和传播时，过去的小事情也能在日常生活中产生巨大的不同。作者。正确地说，他没有试图把这种现象和洛伦茨的蝴蝶效应联系起来。同样，生物进化和达尔文的适应可以看作是长期小变化的积累。在某些阶段会产生无法预先预测的重大影响。同样，不要将此与蝴蝶效应混淆。相反，正如一些作者指出的那样，我们在这里实际上是不可能提前知道进化生物圈的状态空间。

在严格的物理科学领域，如社会学和金融学等各个领域，大系统的敏感性以及随之而来的发布长期预测的困难是一个公认的事实。蝴蝶效应在这里构成了一个强有力的类比，可以卓有成效地用来提出问题和转换技术，否则是不可能想象的。这幅画开始。不幸的是，从一开始就模糊不清的人从事实切换到以一种不可控制的方式调用的隐喻。这是过去几十年反复发生的事情，蝴蝶效应在大众文化中被颠倒过来，用来解释一连串显然不重要的事件可以改变历史，锻造命运。这些调换，如果不是全部的话，大部分都是不可靠的科学，而且对他们所处理的公众是高度误导。事实上，蝴蝶效应的本质恰恰相反。考虑到分离参考和修改路径的高度复杂和错综复杂的相关事件序列，在过去的小变化之后，人们将永远无法完全评估当前的结果。

7 总结

古典科学强调稳定和永恒。发展跨越了最后的海克展。相反，这种不稳定性、敏感性和不可预测性构成了大量(如果不是大部分的话)现象的基础，这些现象发生在宏观的时间和空间尺度上——也就是我们日常经验的尺度。决策者、公众、甚至部分科学界都需要适应这种情况和它所要求的推理模式。人们的担忧，从气氛到股市都需要观察。以符合其内在复杂性的方式进行监测、建模和预测，否则基本特征很可能被忽略。蝴蝶效应就是这种新理性的例证。

参考文献

蝴蝶效应概念的历史

- P. Duhem, *La Théorie physique: son objet, sa structure*, Marcel Rivière, Paris (1906).
- J. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. Math. Pures et Appl.* 4, 27-73 (1898).
- R. Hilborn, Sea gulls, butterflies and grass shoppers: a brief history of the butterfly effect in nonlinear dynamics, *Amer. J. Phys.* 72, 425-427 (2004).
- E. N. Lorenz, Deterministic non-periodic flow, *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141 (1963).
- E. N. Lorenz, *The essence of chaos*, University of Washington Press (1993).
- H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris (1908).
- N. Wiener, *Nonlinear prediction and dynamics*, in Proc. 3rd Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability, Vol. 3, University of Berkeley Press (1954).

误差增长和可预测性

- E. N. Lorenz, Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues, *J. Atmos. Sci.* 26, 636-646 (1969).
- E. N. Lorenz, Atmospheric predictability experiments with a large numerical model, *Tellus*, 34, 505-513 (1982).

- C. Nicolis, Probabilistic aspects of error growth in atmospheric dynamics, Q.J.R. Meteorol. Soc. 118, 553-568 (1992).
- G. Nicolis and C. Nicolis, *Foundations of complex systems*, World Scientific, Singapore (2007).

模型误差和时间依赖性强迫

- C. Nicolis, Transient climatic response to increasing CO₂ concentration: some dynamical scenarios, *Tellus*, 40A, 50-60 (1988).
- C. Nicolis, Dynamics of model errors: some generic features, *J. Atmos. Sci.*, 60, 2208-2218 (2003).
- C. Nicolis, Dynamics of model errors: the role of unresolved scales, *J. Atmos. Sci.*, 61, 1749-1753 (2004).
- C. Nicolis and G. Nicolis, Passage through a barrier with a slowly increasing control parameter, *Phys. Rev. E* 62, 197-203 (2000).
- G. Nicolis, *Introduction to nonlinear science*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

概率预测

- G. Demarée and C. Nicolis, Onset of Sahelian drought viewed as a fluctuation-induced transition, Q.J.R. Meteorol. Soc. 116, 221-238 (1990).
- E. Kalnay, *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- G. Nicolis and P. Gaspard, Towards a probabilistic approach to complex systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 4, 41-57 (1994).
- Ya Sinai, *Introduction to ergodic theory*, Princeton University Press, Princeton (1977).

物理科学之外

- *The Boston Globe*, taken up in *Le Monde*, *Courrier International* n° 936, October 9 to 15 (2008).
- M. Gladwell, *The tipping point*, Abacus, London (2001).
- S. Kauffman, *Reinventing the sacred*, Basic Books, New York (2008).

内部参考文献

- John W. Milnor (2006) [Attractor](#). *Scholarpedia*, 1(11):1815.
- Edward Ott (2008) [Attractor dimensions](#). *Scholarpedia*, 3(3):2110.
- Jan A. Sanders (2006) [Averaging](#). *Scholarpedia*, 1(11):1760.
- Olaf Sporns (2007) [Complexity](#). *Scholarpedia*, 2(10):1623.
- Gregoire Nicolis and Catherine Rouvas-Nicolis (2007) [Complex systems](#). *Scholarpedia*, 2(11):1473.
- James Meiss (2007) [Dynamical systems](#). *Scholarpedia*, 2(2):1629.
- Giovanni Gallavotti (2008) [Fluctuations](#). *Scholarpedia*, 3(6):5893.

- Anatoly M. Samoilenko (2007) [Quasiperiodic oscillations](#). Scholarpedia, 2(5):1783.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) [Stability](#). Scholarpedia, 1(10):1838.
- David H. Terman and Eugene M. Izhikevich (2008) [State space](#). Scholarpedia, 3(3):1924.
- Catherine Rouvas-Nicolis and Gregoire Nicolis (2007) [Stochastic resonance](#). Scholarpedia, 2(11):1474.
- Charles Pugh and Maurício Matos Peixoto (2008) [Structural stability](#). Scholarpedia, 3(9):4008.
- James Murdock (2006) [Unfoldings](#). Scholarpedia, 1(12):1904.