

## 倍周期

Charles Tresser et al. (2014), Scholarpedia, 9(6):3958.

**Dr. Charles Tresser**, IBM Thomas J. Watson Research Center, New York

**Dr. Pierre Couillet**, Institut Non Lineaire De Nice Sophia-Antipolis, France

**Dr. Edson de Faria**, Universidade de Sao Paulo (IME-USP), Sao Paulo, SP, Brazil

倍周期分岔对应于周期轨道的创建或破坏, 周期轨道的周期是原始轨道的两倍。这些分叉在一维不可逆映射理论中尤为突出, 即动力学系统是单位区间上半群  $Z^+$  的作用, 其中倍周期分叉的无限级联是典型的, 并且表现出某些普遍性质。

### 倍周期分岔, 与普遍级联的观点

#### 简而言之, 局部倍周期分岔

框架的正式表示

我们在这里只考虑对应于群  $Z$  和  $R$ , 或半群  $Z^+$  和  $R^+$  在某个相空间上的作用的动力系统。对于任何这样的半群或群  $G$  和相空间中的任何  $x$ ,  $O(x) = \{\phi_t(x)\}_{t \in G}$  是  $x$  的轨道。那么, 对于任何点  $x \in O$ ,  $O$  都是  $O(x)$ , 这是隐含的, 对于群作用的任何轨道都是如此, 但对于半群作用的周期轨道(下面将讨论)(对于群和半群作用的轨道都是特殊的)。

我们经常处理我们特别感兴趣的轨道序列  $O_0, O_1, O_2, \dots, O_k, \dots$ 。我们还考虑了依赖于参数的轨道  $O_\mu$  (或者  $O_{k,\mu}, k=0,1,\dots$ , 如果我们处理的是轨道序列), 其中  $\mu$  在某个参数空间或其一部分中变化。由于(半)群  $g$  带有与其结构相容的线性序, 我们可以讨论周期轨道, 即  $O(x) = \{\phi_t(x)\}_{t \in G} = \{\phi_t(x)\}_{t \in K}$  轨道, 其中  $k$  是  $g$  元素的间隔, 可以用它自身的任何平移来代替。这种  $K$  的最小长度是周期轨道(或(所述周期轨道的)周期)的最小周期  $\tau$ ,  $\tau_{\min}$  的任何整数倍称为(所述周期轨道的)周期。

周期轨道的周期的特征在于,  $\phi_\tau(O) = O$  点态, 即  $\phi_\tau(x) = x$  对于所有的点, 在下文中, 我们所说的周期是指周期, 除非另有说明。当处理分叉时, 即轨道组拓扑结构的变化时, 这种约定是有用的。

当  $G$  为  $Z$  或者  $Z^+$  (分别为  $R$  或  $R^+$ ) 时, 周期轨道具有有限数量的点(分别为内嵌圆)。在任何情况下, 它都是一个紧化对象, 在  $G$  的作用下是不变的, 即: 如果  $G$  是  $Z^+$  和  $R^+$  半群中的一个, 那么它就是向前不变的, 并且它是完全不变的(即。前向和后向不变量)如果  $G$  是  $Z$  和  $R$  中的一组。

在研究倍周期分岔时，这四种  $G$  的情况都是令人感兴趣的，但  $G=Z^+$  的情况将发挥主要作用：它对应于不可逆映射的迭代。

## 连续映射的迭代定义的动力学

对于由连续族的迭代定义的动力函数  $f_\mu$ ，倍周期是  $\tau$  周期轨道  $O_{0,\mu}$  的“分叉”。当参数  $\mu$  越过  $\mu$  的临界值  $\mu_c$  时， $\mu$  失去了稳定性（我们假设，w.l.o.g.  $\mu$  从下面穿过），在这一点上。

稳定的  $2\tau$  周期轨道出现（超临界倍周期）；或

一个不稳定的  $2\tau$  周期轨道与  $O_{0,\mu}$  结合并被破坏（亚临界倍周期）。

从这一点上，我们假设动力系统的家族是足够平滑的——见下面的评论 1——以排除一些病理，使画面更复杂。我们还将假设家族及其成员是通用的，除非另有说明。例如，对于一般半流，轨道的周期随参数  $\mu$  连续变化。

## 倍周期分叉的通用级联

为了强调倍周期在其他地方分岔中的特殊地位。我们将简要地回顾是什么使我们对倍周期（分岔）的级联的理解发展在光滑量子系统理论的整体发展及其在数学、科学中的许多应用中如此重要。

局部倍周期理论与任何其他局部分岔理论类似，例如，如果在映射的情况下进行第二次迭代，那么倍周期分岔就会被非通用的 pitchfork 分岔所取代。然而，倍周期是很特殊的，因为它经常出现在自然现象的模型中，在无限级的倍周期分叉的级联中，这些级联具有与二阶相变相似的度量普遍性质。

**备注 1** 在这篇文章， $C^3$  是足够光滑的任何关于一维动力学的陈述，通常很少是真实的，但光滑的普遍性要求取决于维数（Gambaudo 和 Tresser 1992）。从双倍周期级联中可以看到，普适性的一个重要结果是，尽管任意两种平滑级别之间的差异存在于原子尺度下（实际上是在任何有限尺度下），但足够高的平滑就具有宏观的。因此，后果是显而易见的。

考虑光滑足够单峰区间映射  $f_\mu$  的一个参数族，因此映射具有单个临界点。

假设  $o$  是变量变化的最大值。接近  $x=0$  的泛型  $f_\mu^n$  是有界的，所以，

$f_\mu(x) = f_\mu(0) - a_\mu |x|^\beta + h.o.t.$ 。  $f_\mu$  的指数是 2。我们还将非正式地对指数为  $\beta \geq 1$  的

映射进行注释。对于每个自然数  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ：

$\mu_i$ 为(最大)参数值,使  $o$  属于  $f_{\mu_i}$  的周期为  $2^i$  的周期轨道,而  $f_{\mu_i}$  不存在周期为  $2^{i+1}$  的周期轨道。(单词越多,还可以使用 4 之间的句点加倍分岔; $\mu_i$  和  $\mu_{i+1}$ );

$\mu_i$ 使(最小)参数值为  $f_{\bar{\mu}_i}$ ;有拓扑熵  $h(f_{\bar{\mu}_i}) = \frac{\ln 2}{2^{i+1}}$  其中拓扑熵  $h(f)$ 描述了  $h(f_{\mu_i})$  的动态有多混乱。

设  $\delta_i = \mu_i - \mu_{i-1}$  和  $\bar{\delta}_i = \bar{\mu}_{i-1} - \bar{\mu}_i$  有:

$$\mu_{\infty} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mu}_i \quad (1)$$

将拓扑混沌边界定义为  $h(f_{\mu}) > 0$  放到  $\mu_{\infty}$  处的等式。现在可以得到一些深奥的定理。(1)在温和的条件下:见(Melo 和 Strien, 1993)广泛的书目和一维动力学的广泛覆盖

**猜想 1** [参数空间通用性 1](Feigenbaum, 1978; Couillet and Tresser, 1978; Tresser and Couillet, 1978)

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \rightarrow \delta \equiv \delta(2) = 4.669201609101990 \dots \quad (2)$$

当周期长度  $2^i$  以相关长度的形式出现时, 临界指数  $\nu(\beta) = \frac{\ln 2}{\ln \delta(\beta)}$  允许我们写出

$2^i \propto (\mu_{\infty} - \mu_i)^{-\nu(\beta)}$  当  $\mu < \mu_c$  时的相关长度, 对于任意指数  $\beta$ , 有  $1 < \beta$ 。

**猜想 2** [参数空间通用性 2]

$$\frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}_{i+1}} \rightarrow \delta' \equiv \delta'(2), \nu'(\beta) = \frac{\ln 2}{\ln \delta'(\beta)}, \beta > 1, \nu'(1) = 1 \quad (3)$$

$h(f_{\bar{\mu}_i}) \propto (\bar{\mu}_{\infty} - \bar{\mu}_i)^{-\nu'(\beta)}$  和  $2^i \propto (\bar{\mu}_{\infty} - \bar{\mu}_i)^{-\nu'(\beta)}$ , 其中噪声周期长度  $2^i$  作为  $\mu > \mu_{\infty}$  的相关系数。

对于  $\beta > 1, \nu(\beta) = \nu'(\beta)$  的等式称为统计力学中的标度定律。

**猜想 3** [相空间普适性] 映射  $f_{\mu_{\infty}}$  有一个测度理论吸引子, 它是一个康托尔集,

它的小尺度几何是开放的(Feigenbaum. 1978: Couillet 和 Tresser. 1978: Tresser 和 Couillet.). 1978)。与康托集合的比率积累在一个通用的康托比率集合(见(伯克霍夫等。(2003)及其参考文献)。

就像在二阶相变的情况下, 对普遍性现象学的解释是提出了一个重正化群(或 RG)理论, 导致了另一个猜想, 关于一些 RG 程序应该如何解释在一维地图上观察到的普遍行为(费根鲍姆, 1978; Couillet 和 Tresser, 1978; Tresser 和 Couillet, 1978; 和其他动力系统的最初报告(Couillet 和 Tresser. 1978))。

这些考虑导致以下重建正化的内容。考虑两个重正化算子。  $R_1$  在临界点附近，  $R_0$  在临界值附近。  $R_1$  和  $R_0$  关联到一个映射  $g = f_\mu, \mu \in (\mu_0, \bar{\mu}_0]$ 。  $E(4, 1)$  将  $g^2$  分别限制在  $[x_1, x_0]$  和  $[x_0, x_2]$ ，其中  $x_i = g^{-i}(x_0)$  和  $x_1 < x_0 < x_2$ 。有了足够的平滑性，  $R_j$  可以对  $\mu \in (\mu_i, \bar{\mu}_i]$  应用  $i+1$  次，对  $f_{\mu_x}$  应用无穷次。

**猜想 4 [重正化]** 如果  $f_\mu$  的指数为 2，则两个重正化算子中的任何一个具有相同唯一的不稳定特征值，都存在一个协维 1 不稳定不动点，  $\delta$ 。这解释了在猜想 3 (Feigenbaum, 1978; Couillet 和 Tresser, 1978; Tresser 和 Couillet, 1978)和在松树建筑 2 (Tresser 和 Couillet, 1978)中所描述的行为。此外，这些不动点的稳定流形包含了所有具有泛型的光滑单峰映射。二次方程。临界点。其他指数。一个人必须限制到适当的映射类或重整化不动点有更多的不稳定方向

将这些针叶结构与进一步的数值实验和应用于微分方程(ODE's 和 PDE's)的渐近方法和庞加莱法的结果相结合，也产生了以下的针叶结构(Couillet 和 Tresser, 1978)。

**猜想 5** 在平面的耗散微分同态族向混沌的过渡中，也会发生周期与一般加倍的级联。因此，利用众所周知的技术，在微分方程族中，在自然现象和工程环境中，他们的建模足够紧密(库莱特和特雷瑟，1978年)。

在特定的。Couillet 和每个告诉 1978 年 Februarv Libchaber 非常普遍备注周期级联是预期的对流实验 Libchaber 和毛雷尔正在进行,高等师范学院在这个环境中,一个倍周期 Libchaber 报道:Libchaber 和毛雷尔报道普遍的观察周期倍级联 1980 年(Libchaber and Maurer, 1980)。

在 Sullivan(1992)的 maior 技术突破之后，一维地图的这些松枝已经取得了相当大的进展(特别参见 Avila 和 Lvubich, 2011; De Carvalho 等人, 2005; Davie, 1999; De Faria 等人, 2006; Lyubich. 1999; McMullen. 1994; 尽管许多问题仍然悬而未决。苏利文, Lyubich, McMullen, Avila 的全球真实分析理论。ete 和 Davie 的平滑推广, de Faria-de Melo-Pinto 遵循了早期由 Lanford 和。指数  $\beta = 1 + \varepsilon$  被 Collet 和 Lanford 使用的摄动方法不能覆盖  $\varepsilon$  接近 1。圆盘和高维映射的耗散嵌入的普适理论仍处于其应用阶段(De Carvalh 等)。2005)。由 Lvubich 驱动的。Martens 和合作者在其同事 eckmann -koch 和 Gambaudo-van Stiren-Tresser 的早期步骤之后，指出了在  $C^2$  及以上的光滑性中证明闭合引理的困难与普遍性的第一次联系。

## 拓扑普适性和其他前体和旁注

在度量的普遍性被发现之前。普遍性的组合和拓扑形式被描述为真实的地图，例如 Sharkovskii(1964)的一个定理，这个定理在很长一段时间内都不为人所知(参见 Metropolis (1973): Milnor and Thurston(1988))。rg 相关的专门理论被制定来理解其中的一些 (Gumowski and Mira, 1975; Derrida et al., 1978)。

第一次对倍周期分支级联的详细研究是在二次映射上进行的，并且已经使用了计算机并参考了 C 语言中的动态矩阵(见 Mvrberg(1963)和其中的参考文献)，许多人后来对 1 维 drnamies 的各个方面做出了贡献，从组合学和拓扑到测量理

论。人们认识到，尼尔森-瑟斯顿对表面同胚的分类包含了二维动力学拓扑普遍性讨论的种子。对于足够平滑的 2 个流形上的映射，如果没有倍周期的级联，单参数族中就不会出现混沌(Yorke 和 Alligood, 1985)，但是，尽管在该设置中，在过渡之前不需要级联。Tresser 已经指出，在过渡到混沌之前，有一个级联，光滑的家庭一致区域承包嵌入的 2-磁盘。Gambaudo 已经迈出了第一步。非常等等。由于 Bloch 和 Hart 的结果， $C^1$  有足够的平滑性来证明一个完整的倍周期级联必须在区间的混沌之前。这样的  $C^1$  级联没有度量的普遍性质。

其他一些普遍的例子，拓扑和/或度量，以及相关的 RG，后来在一个和更多的图表中被发现。一个早期的例子是(德里达等。1978)。在这些中，只有倍周期级联能通过 1 维过渡到混沌，但普适性和 RG 的相关性远远超出了过渡到混沌。本文不考虑由 Arneodo-Couillet-Tresser 和其他分段式设计的强不对称临界点;有些人可能会认为，我们已经把所有这些都列入了病理列表，但我们对这些和许多其他子主题保持沉默的主要原因是，与时期倍增和此类事件级联有关的发现和结果的爆炸性增长。

## 信号上的倍周期分岔

考虑一个动力系统。我们称信号为测量理论吸引子的轨道的一段，表示为时间的矢量函数，或表示为时间的标量函数的一般位置的一个坐标，这样一来，吸引子的部分嵌入可以由这个一维时变信号重构出来，这种信号在数值模拟中很容易被分段逼近(由于数值噪声而被称为“分段逼近”)，并且基本对应于(合理地)从实际实验中提取的脉波脉动时间信号片段。不同测量理论的吸引子往往同时存在多个信号。我们特别感兴趣的是当一些典型的信号  $X_{0,\mu}(t)$  周期为  $\tau(X_{0,\mu}(t))$  当

$\mu \in [\mu_c - \varepsilon, \mu_c]$  变成一个信号  $X_{1,\mu}(t)$  周期为  $\tau(X_{1,\mu}(t))$  当  $\mu \in [\mu_c, \mu_c + \varepsilon]$ ，有

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_c^+} (\tau(X_{1,\mu}(t))) = 2 \cdot \lim_{\mu \rightarrow \mu_c^-} (\tau(X_{0,\mu}(t))). \quad (4)$$

这里假设  $\varepsilon > 0$  足够小，以保证  $uc-E, u$  和  $(uc, uc+e)$  中不发生分叉。周期  $\tau(X_{1,\mu}(t))$  仅仅是  $\tau(X_{0,\mu}(t))$  的两倍(即，当  $\mu$  在方程(4)中接近  $\mu_c$  时，不需要限制)。对于流动和半流动，周期  $\tau(X_{1,\mu}(t))$  相对于流在  $X_{0,\mu}(t)$  附近的局部截面的庞加勒图是 2，并且在所有情况下，方程(4)表示当一个轨道  $\mu = \mu_c$  时倍周期增意味着什么。如果  $O_1(\mu)$  和  $O_0(\mu)$  的稳定轨道合并，则方程(4)必须替换为:

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_c^-} (\tau(X_{1,\mu}(t))) = 2 \cdot \lim_{\mu \rightarrow \mu_c^+} (\tau(X_{0,\mu}(t))). \quad (5)$$

合并为  $\mu \rightarrow \mu_c^-$  表示当参数的值从下面到达我们时，两个信号发生碰撞，当它们消失时。在倍周期的情况下， $O_0(\mu)$  上的不稳定保持在  $\mu_c$  以上，而，例如，破坏性的鞍节点分叉的合并没有留下周期轨道。

我们将主要考虑通过使用一些庞加莱映射可以简化到那种情况的映射，并且只考虑 1.12 节之前的不动点，因为映射的迭代可以简化到那种情况，详见 1.12。因此，除另有规定外， $\tau(X_{0,\mu}(t))=1$ ，表示  $X_{0,\mu}(t)$  是某个映射赋的不动点。

## 对维度的依赖

平滑性的一个后果是，允许倍周期发生的稳定性损失可以从围绕分叉的不动点线性化的映射(当考虑流或半流的动力学时的庞加莱映射)的频谱(特征值集)中读取。事实上，发生的分岔(或应用数学语言中的不稳定性)的表征是一个参数相关的特征值，其范数从下越过 1。对于倍周期，单位圆的交点在在 1，并沿实线发生。我们也可以说对于倍周期特征值从上到下与 1 交叉。为了简化讨论，我们假设谱中的所有交叉或单位圆都以非零速度进行。即. 值 1 不是作为参数函数的任何特征值的平稳范数。

在维 1 中， $\lambda_\mu = f'_\mu(x_0)$ ，在  $x_0$  附近线性化的映射的唯一特征值，与上面的-1 相交，使  $|\lambda_\mu| - 1$  增大， $x_0$  变得越来越排斥； $|\lambda_\mu| < -1$  告诉我们附近的轨道以交替的方式远离  $(f_\mu(x) - x_0) \cdot (x - x_0)$  对于  $x \neq x_0$  在  $x_0$  足够小的邻域内。通常经过适当的变量变换后用范式(6)来描述。

对于这些问题，可以在纯数学和应用数学文献、Haragus 和 looss(2009)以及其中关于无限维度的参考文献中看到 Carr(1981)、Kelly(1967)、Vanderbauwhed(1989)和其中的参考文献。中心流形在局部是唯一的，但不一定是全局唯一的，也不一定像流或使其不变的微分一样光滑。任何中心流形都与过 -1 的特征值的特征向量相切，并且在适当的变量变换后一般支持由标准形式(6)所描述的动力学。只要光谱中的其他元素离单位圆足够远，这就成立。我们在这里做这样的讨论是为了避免陷入当多个参数同时变化时(余维为 2 或更高的分岔)出现分岔的更复杂的世界。

对于分岔问题，与其说“一个参数相关的中心流形”，人们更喜欢把参数看作是额外的(平凡的)坐标，沿这个坐标线性化流的特征值是平凡的等于 1。因为只有一个特征值的单位圆(到 1)翻倍分岔的时期,一个参数通常就足够了,这样我们最终与一维二维中心流形这让一个局部邻域的映射  $(x, \mu) = (x_0, \mu_c)$ 。

## 周期倍增:地图的一维现象

假设有足够的平滑性，我们可以使用标准形式(通过变量的变化尽可能简化的表达式),在维  $i$  的中心流形上不计算参数的维数(见第 1.5 节)。在  $(O_0, \mu_c) = (0, 1)$  的邻域内，0 处不动点的倍周期分岔的一般范式为:

$$f_\mu(x) = -\mu \cdot x \pm x^3 + h.o.t. \quad (6)$$

由于在  $\mu_c$  发生分叉， $O_0(\mu_c)$  是线性边缘的(或(线性)边缘稳定的)。我们有以下基于稳定性的标准。

如果  $O_0(\mu_c)$  是非线性(或 NL)不稳定的，分岔是次临界的。

如果  $O_0(\mu_c)$  是 NL 稳定的，则分岔是超临界的。

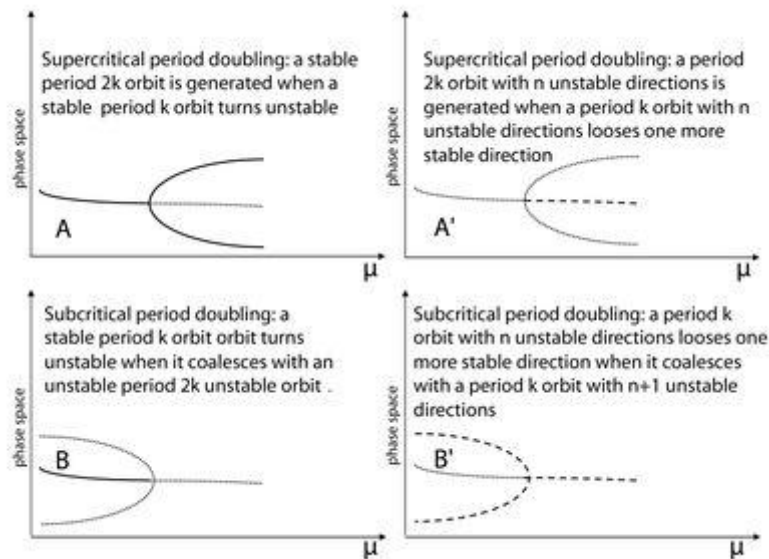


图 1 倍周期映射:参数以连续的线条表示稳定轨道，更大的间隔意味着更少的稳定维度。

从这个判据或直接计算，从(6)可以推导出:

(+)如果选择+号，则当参数与  $\mu_c$  相交时，动力学的演化为超临界分岔，由下式(4)的讨论可知。

(-)如果选择-号，则以动力学演化为参数穿过  $\mu_c$  时的分岔是次临界的，以下在(s)式的讨论中描述。

**备注 2** (6)作为范式的有效性要求  $f_\mu$  在区间上是可逆的。特别是，(6)不能以有意义的方式包含下一个倍周期。此外，任何对称(比如(6)的  $x \rightarrow -x$  都会在下一个倍周期之前导致对称破缺分叉

## 1 维中映射的局部分析

在维 1 中，中心流形只是分支轨道附近全相空间的局部部分。仍然需要计算分岔的临界类型，即该分岔是超临界的还是亚临界的:将在第 1.8 节中考虑分离超临界和亚临界的简并情况。

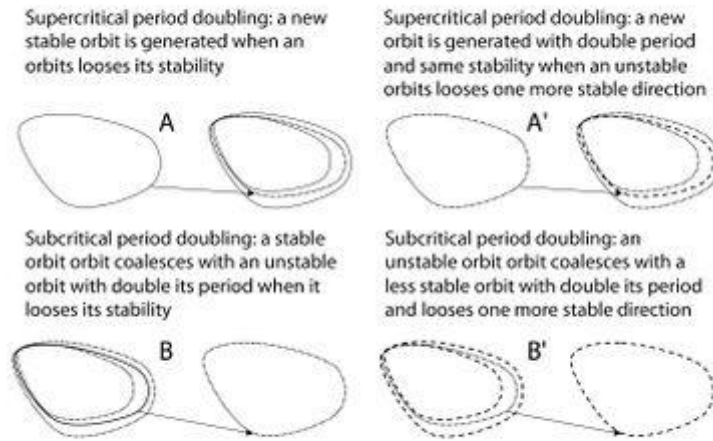


图 2 微分方程的倍周期:对 B 的描述两个参数，一个在下面，一个在上面的分岔，连续的线代表稳定轨道，点之间的间隙越大，稳定维数越少。

为了得到最一般的公式，我们假设  $f_{\mu_c}(x_0) = x_0$  (不动点性质)， $f'_{\mu_c}(x_0) = 1$  (倍周期分岔的一阶条件)。和往常一样， $\epsilon$  有一个正的但任意小的绝对值。请注意，在研究  $f_{\mu_c}$  下点  $x_0$  的非线性稳定性时，比较  $|f_{\mu_c}(x_0 + \epsilon) - x_0|$  和  $|\epsilon|$  之间的距离没有任何帮助。实际上， $\epsilon$  和  $f^2(x_0 + \epsilon) - x_0$  的符号对于  $\epsilon$  来说是相反的，因为斜率  $f'_{\mu_c}$  是 -1。因此，我们需要将  $\epsilon$  与  $f^2(x_0 + \epsilon) - x_0$  进行比较假设  $f_{\mu}$  对于  $(\mu_c, x_0)$  附近的

$(\mu, x)$  是三阶可微的，则直接计算得出:

$$f_{\mu_c}^2(x_0 + \epsilon) - x_0 = \epsilon + \epsilon^3 \left( -\frac{1}{2}(f_{\mu_c}''(x_0))^2 - \frac{1}{3}f_{\mu_c}'''(x_0) \right) \quad (7)$$

这让我们定义:

$$Of(x) = -\frac{1}{2}(f_{\mu_c}''(x_0))^2 - \frac{1}{3}f_{\mu_c}'''(x_0) \quad (8)$$

然后，使用基于稳定的现象学标准，从(8)推导出一个可计算的标准，该标准至少可以追溯到(Allwright. 1978)



如果  $Of_{\mu_c}(x_0) < 0$ ，则  $x_0$  是 NL 稳定的，分岔是超临界的。

如果  $Of_{\mu_c}(x_0) > 0$ 。那么  $x_0$  是 NL 不稳定的，分支是亚临界的。

### 倍周期分岔的分岔图

$Of_{\mu_c}(x_0)$  可能为零，可能需要高阶项来确定  $x_0$  的稳定性，甚至可能出现分支在所有阶上都是边际的。在这种情况下，如果没有平坦项打破简并度，不动点  $x_0 = f_{\mu_c}(x_0)$  是两个周期段的公共端点，通过  $f_{\mu_c}$  然后  $f_{\mu_c}(x_0 + \varepsilon) = x_0 - \varepsilon$ ，使得

$$f_{\mu_c}^2(x_0 + \varepsilon) = x_0 + \varepsilon \quad (9)$$

$x = x_0 + \varepsilon$  接近于  $x_0$ 。

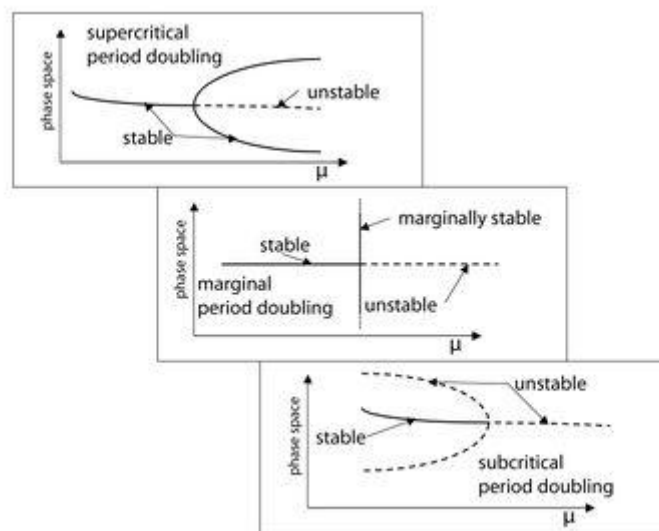


图 3 通过退化的边缘情况，由超临界到亚临界的倍周期。退化的边缘情况可以通过倍周期轨道曲线的变形提供所有的构型：这里只给出了最基本的三种情况。

我们在图 3 中绘制了一个经典分岔图，参数(当倍周期分岔发生时增加)沿着横坐标， $\mu$  沿着纵坐标。我们用粗线表示稳定的物体，用虚线表示不稳定的物体，用小点和小间隙表示边缘物体。我们看到，总有一条线从点  $(\mu_c, x_0)$  的两边发散，这代表了从稳定到不稳定的轨道。在退化仿射情况下，代表边缘对象的线是垂直的。此外，边际线：

当消除简并度时，以抛物线形状向前弯曲，使其足够接近  $(\mu_c, x_0)$ ，使分岔为超临界；

当消除简并度时，以抛物线形状向后弯曲，使岔点在  $(\mu_c, x_0)$  附近足够近，使岔点是次临界的。

(dotted)行的延续不再是一个局部问题;关于单倍周期的全球考虑，请参阅 Sander 和 Yorke(2011)以及其中早期的参考文献(多年之前对 Alexander 的庞加勒-安多诺夫-霍夫分岔做过类似的工作)。Mallet-Paret。努斯鲍姆、约克等)。当且仅当没有三阶项时，周期二倍轨道(作为  $1u$ -的函数)的大小增长不能与  $\sqrt{|\mu - \mu_c|}$  (它代表一般情况而非一般情况)成正比。

## 局部理论只是局部的

在关于分岔图的所有问题中，包括分岔环的大小问题。假设  $\sqrt{|\mu - \mu_c|}$  “足够小”是至关重要的，其中所需的小程度以一种高度非通用的方式依赖于演化方程的结构(映射或向量场)。有些情况下，分岔环大小的最初增长(到刚刚分岔的循环的距离)开始确实像  $\sqrt{|\mu - \mu_c|}$  (或非一般情况下的另一种增长)，但随后超出了某些  $\mu \neq \mu_c$ 。参数的微小增加会引起两倍周期大小的爆炸性增加。这种现象是在二维流的庞加勒-安德罗诺夫-霍普夫分岔的背景下研究的，它的法语名字是“*canard*”。

## 渐近的频繁奇迹

尽管可能存在类似 *canars* 的效果，但正规形式通常具有非常大的有效性。经常扩展可证明的有效性范围。能使这些方法成功地描述许多自然现象的现象。

## 从失去稳定到一个更普遍的不稳定的方向

我们首先考虑与失稳相关的分岔。这是最基本的，也可能是最重要的案件。更一般地，如果相空间的维数至少为 2，轨道  $O_0(\mu)$  在过程开始时不需要是稳定的。总的来说轨道  $O_0(\mu)$  在过程中失去了一个方向的稳定性，并且：

在亚临界情况下，分岔破坏的轨道  $O_1(\mu)$  的稳定性方向小于分岔前原轨道  $O_0(\mu)$ 。

在超临界情况下，分岔产生轨道  $O_1(\mu)$ ，其稳定性方向与分岔前原轨道  $O_0(\mu)$  相同。

## 倍周期分岔从任何周期

到目前为止，我们主要讨论了不动点  $f_\mu$  的倍周期分岔。但是这是人的共性需要研究本地段翻倍周期分岔点以来  $f_\mu^\tau$  是定点的  $f$ (周期轨道的长度  $\tau$  的  $f_\mu^\tau$  的固定点)。通过链式规则,  $f_\mu^\tau$  相同的斜率在所有这些点, 和更一般的  $Df_\mu^\tau$  的所有具有相同的光谱。

## 在加周期的背景下的施瓦兹导数

$Of_{\mu_c}(x_0)$  的符号决定了加倍分岔的临界类型(Allwrigh, 1978), 它正比于  $f_\mu$  在  $x_0$  处取值的施瓦兹阶导数(Singer, 1978)。在本节中, 我们将讨论负 Schwarzian 导数条件: 这个条件不仅在理解普适性的前体以及依赖于任意小尺度数据的平滑性如何具有可见影响等深层问题上发挥关键作用。但在倍周期的背景下, 它保证  $Qf_\mu^p(x_0)$  对于任何周期  $p$  的所有加周期分岔都是负的, 因此所有的加周期分岔都是超临界的。

## 关于埃利·卡坦的一个定理

在动力学中, 上环是一个算子, 它将一个给定映射与一个满足复合下链式法则的函数或张量关联起来。在一维映射  $g$  的动力学和轨道几何的研究中, 有三个有用的共旋:

1. 导数的对数, 即  $\log Dg$  ;

2.  $g$  的非线性, 即  $Ng = D \log Dg = \frac{g''}{g'}$

3.  $g$  的 Schwarzian 导数, 即  $Sg = (Ng)' - \frac{1}{2}(Ng)^2$

由 Cartan(1937)提出的一个定理指出, 这些是维 1 中唯一可能的共环。它们各自的核心是维数上的平移群、仿射群和映射群 1。这里我们只考虑 Schwarzian 导数。对于任意三次可微映射  $g$ ,  $g$  的施瓦茨导数为:

$$Sg(x) = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2. \quad (10)$$

然后我们注意到, 由于  $f_{\mu_c}' = -1$ , 我们有  $Sf_{\mu_c}(x_c) = 9Qf_{\mu_c}(x_c)$ , 因此 1 维中倍周期分叉超稳定性的准则  $Qf_{\mu_c}(x_c) < 0$  可以表示为:

$$Sf_{\mu_c}(x_c) < 0 \quad (11)$$

这里重要的一点是, 如果  $Sf < 0$  在  $f_\mu$  作为自同态(从该区间到自身的连续映射)的区间上  $Sf < 0$ , 那么对于参数范围内的任何值  $S(f_\mu^n) < 0$  对所有  $n < 0$ , 即  $f$  的所有迭代具有负的施瓦茨导数。特别地, 如果  $f_\mu$  是某些参数范围内所有  $\mu$  值  $Sf < 0$  的  $C^3$  图, 那么所有通过倍周期而变得不稳定的周期点都会随着  $\mu$  的变化以超临界的方式发生变化。

## 辛格定理和最初的发展

Singer(1978)在 1978 年指出了  $Sf < 0$  的映射  $f$  的这些基本性质, 并证明了关于  $Sf < 0$  的单峰  $C^3$  映射的以下结果。也被称为 S-映射。

**定理 1 (Singer, (1978))**。如果  $f: I \rightarrow I$ , 然后立即盆地的吸引力吸引周期点包含临界点  $f$  或边界点的。此外,  $f$  的任何中性周期点此外,  $f$  的任何中性周期点  $x_0$ (即,  $|(f^n)'(x_0)| = 1$  对于  $x_0$ , 使得不在  $I$  的边界上的  $f^n(x_0) = x_0$  是吸引的, 并且没有周期点的间隔。

在 Singer 和 Allwright(1978)在同一期刊上发表了这一结果之后, 许多研究者都进行了研究。包括夹头。Eckmann。Guckenheimer。Misiurewicz 在几个问题的研究中使用了它, 大部分是关于区间图族的。很快, 下一波平滑区间图的研究人员紧随而来, 事实上, 它们有严重的重叠: de Melo, Nowicki, van Strien, Sullivan, Blokh, Lvubich。和他们的学生。S-映射的 Manv 特性后来被推广到多模态映射中: 特别是 van Strien 和 Vargas(2004,2007)。

我们立即认识到,  $Sf < 0$  条件的问题在于它不具有普遍性, 甚至在坐标的所有平滑变化下都不是不变的。因此, 重要的是要注意, 有足够的平滑度。亚临界性是例外的, 因为对于  $C^3$ (实际上更少)的映射, 多次迭代只会发生有限数量的亚临界分岔。科兹洛夫斯基(2000)证明了这一点, 随后的工作, 如马滕斯、德梅洛、范斯特瑞恩和沙利文(1988), 以及古肯海默(1987)的开拓性工作, 以申请重整化。在重整化的情况下。有时可以证明  $Sf < 0$  属性在经过足够的重正化之后出现(参见例如 de Faria 和 de Melo(1999)。和 de Faria 等人(2006))。

## $Sf < 0$ 的宏观意义

上面所述的辛格定理可以看作是由 P.法图引起的全对称动力学的一个经典结果的类比。它陈述了一个  $d > 2$  度有理图的吸引周期点的吸引盆地总是包含一个临界点(导致这样的吸引周期点只有少数几个的结论)。这表明 S 映射在某种程度上表

现为复杂的一维映射。关于此行为的进一步提示由以下注意事项提供  $Sf < 0$  属性有许多特殊的原因，其中一个以下是事实。

**引理 1** 如果  $g$  是三次可微的，那么  $Sg < 0$  的性质就等于说，在  $\sqrt{\frac{1}{|g'|}}$  不消失的情况下，函数在每个区间都是凸的。这意味着以下结果：

**命题 1** 如果  $Sg$  在区间  $I$  上为负，则  $|g'|$  在  $I$  上不存在非零局部极小值。具有负史瓦兹导数的映射的导数的最后性质与我们将在这里阐述的  $S$  映射的宏观性质有关。用于这一目的。我们需要回顾一下两个交叉比的定义。给定一个区间  $T$  (表示“总计”) 和一个子区间  $M$  (表示“中间部分”)，这样  $T \setminus M$  由一个“左部分” $L$  和一个“右部分” $R$  组成，用  $|I|$  表示区间  $I$  的长度，我们考虑两个交叉比，即

$$a(M, T) = \frac{|M| \cdot |T|}{|L \cup M| \cdot |M \cup R|}, \quad (12)$$

与

$$b(M, T) = \frac{|M| \cdot |R|}{|L| \cdot |R|}. \quad (13)$$

然后，如果  $f$  是一个从  $T$  到它在  $\mathbb{R}$  中的像的微分同态映射，我们写下来

$$A(f, M, T) = \frac{a(f(M), F(T))}{a(M, T)}, \quad (14)$$

与

$$B(f, M, T) = \frac{b(f(M), F(T))}{b(M, T)}, \quad (15)$$

这些比率测量对应的交叉比率在  $f$  下的扭曲。

**命题 2** 我们有  $A(f, M, T) \geq 1$  和  $B(f, M, T) \geq 1$  当  $f$  是一个  $S$  映射它是一个从  $T$  到它在  $\mathbb{R}$  中的图像的微分同构。

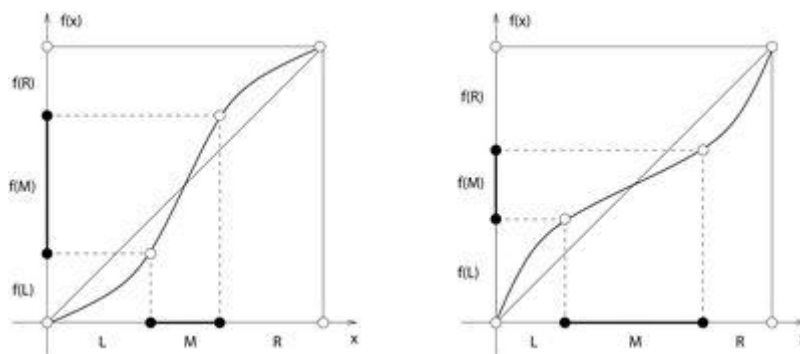


图 4 负的和正的 Schwarzian 图及其对交叉比率的影响。

交叉比的扩展-在许多情况下，它在建立真实的先验界时非常有用。包括时间。加倍重正化——类似于黎曼球的有理映射在其后临界集的补充中扩展了双曲(庞加莱)度规。为了增强这个类比。我们进一步考虑以下几点。

1. 首先注意到，在两个(开)区间  $T, T^*$  之间的  $C^3$  微分  $f: T \rightarrow T^*$  的 Schwarzian 导数可以改写为以下形式:

$$Sf(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left( \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right).$$

2. 接下来，跟随 Sullivan，定义开区间  $T = (a, b)$  的庞加莱密度为

$$\rho_T(x) = \frac{(b-a)}{(x-a)(b-x)}$$

这是  $I$  上的庞加莱度量的无限小形式，因此， $M = (c, d) \subseteq I$  的庞加莱长度是

$$l_T(M) = \int_M \rho_T(x) dx = \text{lod}(1 + b(M, T))$$

其中  $b(M, T) = (b-a)(d-c) / (c-a)(b-d)$  是前面介绍的  $a, b, c, d$  四个点的交比。

3.  $f: T \rightarrow T^*$  的导数在  $T$  和  $T^*$  中的庞加莱度量。即

$$D_T f(x) = f'(x) \frac{\rho_{T^*}(f(x))}{\rho_T(x)}$$

称为  $f$  的庞加莱畸变。如果  $f$  是莫比乌斯，在这种情况下  $f$  保持交叉比。现在考虑对称函数  $\delta_f: T \times T \rightarrow R$

$$\delta_f(x, y) = \begin{cases} \log \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & x \neq y, \\ \log f'(x), & x = y. \end{cases}$$

然后一个简单的计算表明

$$\log D_T f(t) = -\iint_Q \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta_f(x, y) dx dy \quad (16)$$

其中  $Q$  为矩形  $(a, t) \times (t, b)$ 。此外, 当  $(x, y) \times (t, t)$  时, 上述被积函数变为  $6Sf(z)$ , 其中  $Sf$  为  $f$  的施瓦兹导数。这与负施瓦兹映射增加了庞加莱度量从而扩展了交叉比的事实是一致的(图 44)。

## 从假设到结论的负 Schwarzian

下面的科兹洛夫斯基定理说明了高光滑和低光滑动力学之间的区别。某种程度上达到顶点的普适性现象出现在倍周期和其他类型的平滑映射中。这里重要的是交叉比也可以定义为宏观区间, 这是对足够高的平滑可视性及其普遍结果的第一个线索。

定理 2. (Kozlovski (2000)) 设  $f: X \rightarrow X$  是区间到自身的一个非平坦非周期临界点  $c$  的  $C^3$  单峰映射, 则在临界值  $f(c)$  附近存在一个区间  $J$ , 使  $f^n(x) \in J, x \in X, n > 0$  则  $Sf^n(x) < 0$ 。

负施瓦茨性质因此在小的(对于  $C^3$  映射)中是普遍存在的, 至少在非平坦临界点附近。上述定理的一个前兆是每一个足够深的事实。具有幂律临界点的无限可重整的  $C^3$  一维映射的重整化(在临界点附近)具有负的 Schwarzian(参见 de Faria 和 de Melo (1999), de Faria 等(2006))。这一事实对后临界集几何上的反波泛界形式的倍周期(和更一般的组合学)有重要的影响。对于关于临界点有支持向量的无限可重整单峰映射。这意味着。在重正化的足够深的层次上看到的所有间隔中。包含临界点的原子是最大的(这是由 Guckenheimer 在 1979 年首次证明的); 另见 de Fari (2006) [p. 760]。对于不把对称假设强加于倍周期的积累的结果参见 Chandramuoli 等人。(2009)

关于倍周期、级联和再正规化的一般参考, 也包括  $Sf < 0$  的性质, 请参阅 de Melo 和 van Strien(1993), 并保持该书的下一版。

## 参考文献

- Allwright, D.J. *Hypergraphic functions and bifurcations in recurrence relations*, SIAM J. Appl. Math., 34, 687-691. (1978).
- Avila, A., Lyubich, M. *The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: exponential contraction along hybrid classes*, Publications mathématiques de l'IHÉS, 114, 171-223. (2011).
- Birkhoff, G., Martens, M., Tresser, C. *On the scaling structure for period doubling*, Astérisque, 286, 167-186 (2003).

- Carr, J. *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag; New York, (1981).
- Cartan, E. *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Cahiers scientifiques, Fasc. XVII, Gauthier-Villars; Paris, (1937).
- De Carvalho, A., Lyubich, M., Martens, M. *Renormalization in the Hénon family: Universality but Non-Rigidity*, J. Stat. Phys. 121 611-669 (2005).
- Chandramuoli, V.V.M.S., Martens, M., de Melo W., Tresser, C.P. *Chaotic period doubling*, Erg. Th. & Dyn. Syst. 29 381-418 (2009).
- Couillet, P., Tresser, C. *Itération d'endomorphismes et groupe de renormalisation*, J. Phys. Colloque C5, C5-25 - C5-28 (1978).
- Davie, A.M. *Period doubling for  $C^{2+\epsilon}$  mappings*, Commun. Math. Phys. 176, 262-272 (1999).
- Derrida, B., Gervois, A., Pomeau, Y. *Iteration of endomorphisms on the real axis and representation of numbers*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) 29 305-356 (1978).
- Derrida, B., Gervois, A., Pomeau, Y. *Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms*, J. Phys. A. 12 269-296 (1979).
- de Faria, E., de Melo, W. *Rigidity of critical circle mappings I*. J. European Math. Soc. 1 339-392 (1999).
- de Faria, E., de Melo, W. *Rigidity of critical circle mappings II*. J. Amer. Math. Soc. 13 343-370 (2000).
- de Faria, E., de Melo, W., Pinto, A. *Global hyperbolicity of renormalization for  $C^r$  unimodal mappings*, Ann. of Math. 164 731-824 (2006).
- Feigenbaum, M.J. *Quantitative universality for a class of non-linear transformations*, J. Stat. Phys. 19 25-52 (1978).
- Gambaudo, J.M., Tresser, C. *Self-similar constructions in smooth dynamics: rigidity, smoothness and dimension*, Commun. Math. Phys. 150 45-58 (1992).
- Guckenheimer, J. *Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps*, Commun. Math. Phys. 70 133--160 (1979).
- Guckenheimer, J. *Limit sets of  $S$ -unimodal maps with zero entropy*, Commun. Math. Phys. 110 655-659 (1987).
- Gumowski, I., Mira, C. *Accumulations de bifurcations dans une récurrence*, C. R. Acad. Sci. Paris Série A-B 281 A45-A48 (1975).
- Haragus, M., Iooss, G. *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Springer-Verlag; New York, (2009).
- Kelly, A. *The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds*, J. Diff. Equations, 3, 546-570 (1967).
- Kozlovski, O.S. *Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition*, Ann. of Math. 152 743-762 (2000).
- Libchaber, A., Maurer, J., *Une Expérience de Rayleigh-Bénard en géométrie réduite: multiplication, accrochage et démultiplication des fréquences*, J. Phys. Colloque 41, C3-51 - C3-56 (1980).



- Lyubich, M. *Feigenbaum-Coulet-Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture*, Ann. of Math. 149 319-420 (1999).
- Martens, M., de Melo, W., Van Strien, S., Sullivan, D. *Bounded geometry and measure of the attracting cantor set of quadratic-like interval maps*, Preprint, June 1988.
- de Melo, W., van Strien, S. *One-Dimensional Dynamics*, Springer Verlag, Berlin; (1993).
- Metropolis, N., Stein, M.L., Stein, P.R. *On finite limit sets for transformations of the unit interval*, J. Combin. Theory A15 25-44 (1973).
- Milnor, J., Thurston, W. *On iterated maps of the interval*, in *Springer Lecture Notes* 1342 465-563 (1988).
- McMullen, C. *Complex Dynamics and Renormalization*, Annals of Math. Studies 135 Princeton University Press, Princeton; (1994).
- Myrberg, P.J. *Iteration der reellen Polynome zweiten Grades III*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Band 336 3-18 (1963).
- Sander, E., Yorke, J.A. *Period-doubling cascades galore*, Erg. The. & Dynam. Syst. 31 1249-1267 (2011).
- Sharkovskii, A.N. *Coexistence of the cycles of a continuous mapping from the line into itself*, Ukrain. Mat. Z. 16 61-71 (1964).
- Singer, D. *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*, SIAM J. Appl. Math. 35 260-267 (1978).
- van Strien, S.J. Vargas, E. *Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps*, J. Amer. Math. Soc. 17 749-782 (2004), and 17 267-268 (2007).
- Sullivan, D. *Bounds, Quadratic Differentials, and Renormalization Conjectures*, in *A.M.S. Centennial Publication Vol 2 Mathematics into the Twenty-first Century* Am. Math. Soc.; Providence, RI, (1992).
- Tresser, C., Coulet, P. *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*, C. R. Acad. Sc. Paris 287A 577-580 (1978).
- Vanderbauwhede, A. *Center Manifolds, Normal Forms and Elementary Bifurcations*, In *Dynamics Reported*, Vol. 2 Wiley; New York, (1989)
- Yorke, J.A., Alligood, K.T. *Period doubling cascades of attractors: a prerequisite for horseshoes*, Comm. Math. Phys. 101 305-321 (1985).