李雅普诺夫指数

Antonio Politi (2013), Scholarpedia, 8(3):2722.
Prof. Antonio Politi, University of Aberdeen, Aberdeen, UK

历史的言论

当科学家们意识到物理系统的发展可以用数学方程来描述时，各种动力系统的稳定性就被认为是头等重要的问题。对这个问题的兴趣不仅是出于普遍的好奇心，也是出于想要知道的需要。在十九世纪，适当的机械装置的性能在多大程度上保持不变，一旦它们的结构被扰乱。结果，杰出的科学家如拉格朗日,泊松,麦克斯韦和其他人深入思考了在一般和特定情况下量化稳定性的方法。第一个稳定的确切定义是由俄罗斯数学家亚历山大李雅普诺夫人解决问题 1892 年在他的博士论文,他介绍了两个方法,第一个是基于运动方程的线性化,是后来被称之为李雅普诺夫指数(LE)。(李雅普诺夫 1992)

定义

LEs 测量一般扰动在线性方程控制下的生长速率。

$$\dot{\mathrm{u}} = J(t)u$$

其中 u 是一个 N 维向量 J 是一个(时变的) $N \times N$ 矩阵。在某些情况下，例如线性随机微分方程。J 波动，因为存在混乱或乘法噪声(阿诺德，1986)。

更常见的是，在确定性动力系统中，J 是沿满足常微分方程的轨迹 $x(t)$计算的合适速度场 F 的雅可比矩阵，

$$\dot{\mathrm{x}} = F(\mathrm{x})$$

如果 $x(t) = x_0$ 是一个解(即 $F(x_0 = 0)$)，则该不动点的稳定性由(常数)算子 j 的特征值量化。是特征值的实部。它们测量无限小扰动的指数收缩/膨胀率。一个稍微复杂一点的例子是周期轨道 $x(t+t) = x(t)$ 在这种情况下，有必要对 Eq.(1)在时间 t 上进行积分，以得到离散时间演化算子 M。

$$u(t+T) = Mu(t)$$

从 M 的特征值 m_i， 可以确定弗洛凯指数 $\mu_i = (\ln m_i)/T$ 时，LE λ_i 为实部。

因为轨迹通常不是周期性的，所以需要一种不同的方法。最一般的定义涉及计算另一个矩阵的特征值 α_i，即 $M(t)M^T(t)$。如图 1 的上部所示。从 α_i 的知识中，很自然地引入了有限时间的 LE,

$$\lambda_i(t)=\frac{\ln\alpha_i}{2t}$$

由于$\lambda_i(t)$在一般情况下是一个波动量(见图 1 的下半部分)，有必要考虑无限的时间限制，以确定渐近(在时间上)的行为。这就引出了下面的 LE 的定义，

$$\lambda_i=\lim\sup_{t\to\infty}\lambda_i(t)$$

当$\lim\sup$被认为是对可能出现的最坏波动的解释时：当必须评估一个给定制度的稳定性时，这一点很重要。Oseledets 乘法遍历定理保证了 LEs 与初始条件无关(Oseledets 1968)。

有趣的是，虽然确定不动点和周期轨道的李亚普诺夫指数的虚部是有意义的，但这种猜测是行不通的。一般来说，是一个非周期性的运动。事实上，根据定义，人工智能是。实量，没有办法把这个定义扩展到包括旋转。我们最多可以引入一个旋转数，来描述围绕参考轨迹的一般扰动的旋转(1985 年平面图)。

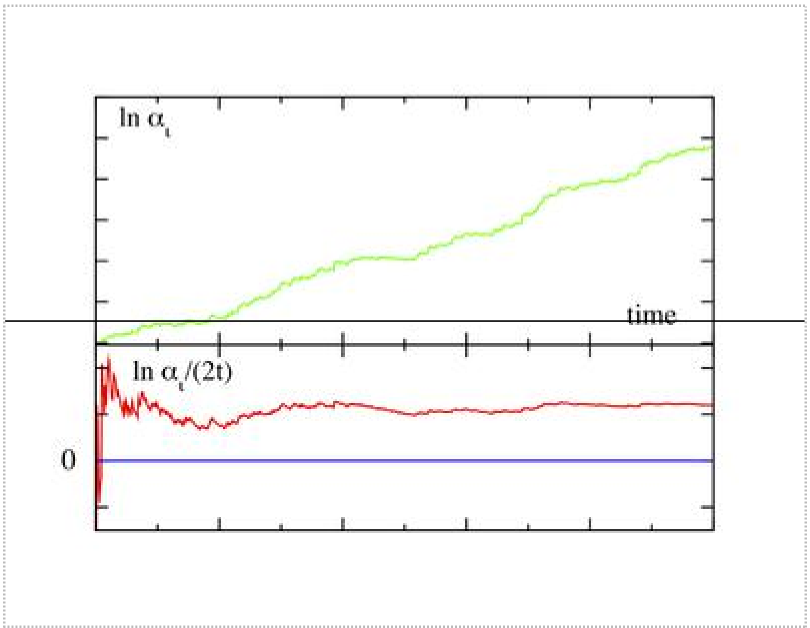

图 1 一般扰动振幅的时间依赖性

在实践中，李亚普诺夫指数可以通过利用一个 n 维体积沿 n 个最扩展的子空间对齐的自然趋势来计算。从 n 维空间体积的膨胀速率，一个得到的和最大的 n 个李亚普诺夫指数。总之，这个过程需要进化 n 个线性无关的扰动，其中一个面临的问题是所有的向量都倾向于沿着同一方向排列。然而，如 70 年代末所示，这种数值不稳定性可以通过利用 Gram-Schmidt 程序对向量进行正交化来平衡。(Benettin 等. 1980)（Shimada 和 Nagashima 1979)(或者，等同于 a 或分解)。因此，可以计算出从最大到最负的 LE λ_i，它们合起来称为李雅普诺夫谱。

属性

LEs 独立于用于确定摄动之间距离的度规和变量的选择。这一性质意味着它们是动态不变量，从而提供了相应动力学的客观表征。

一个严格正的极大李亚普诺夫指数是指数不稳定性的同义词，但应该警告，在一些特殊情况下，这可能不是真的(参见，例如，所谓的 Perron 效应)(列昂诺夫和 kuznetsov 2006)

严格正极大李雅普诺夫指数常被认为是确定性混沌的定义。只有当相应的不稳定流形折叠回局限在一个有界域中时(一个不稳定不动点不是混沌的)，这才有意义。

典型轨迹具有相同的轨迹特征，但存在一个具有不同稳定性的零测度子集。嵌在混沌吸引子中的无限周期轨道就是这样一个例子。

一维映射 $x_{n+1}=G(x_n)$ 的特征只有一个 LE，等于 $\ln|dG/dx|$ 的平均值。换句话说，LE 可以被确定为一个整体平均，而不是一个时间平均。原则上，这是可能的想法延伸到更高的维，但它将在一个相当不切实际的方法，因为重建不变测度和需要识别的局部方向的各种矢量的困难。

所有 LEs 的总和度量了整个相空间的体积收缩率。在所谓的耗散系统中。$\sum<0$，意味着一般轨迹访问的体积以指数方式缩小到 0。在哈密顿系统中，$\sum=0$，即体积保不变(见刘维尔定理)。

在辛系统中，LEs 成对出现(λ_i，λ_{2N-i+1})，使它们的和等于零。这意味着李亚普诺夫谱是对称的。这是一种强调哈密顿力学在时间箭头变化下的不变性的方法。

任何不收敛于不动点的(有界的)无限轨迹都至少有一个零值特征:它对应于相点沿其自身轨迹的一个摄动。其他消失指数可能表明运动常数的存在。零指数也可能(非一般地)出现在对应的分岔点，其中一些方向是边际稳定的。在这种情况下，有必要超越线性方法来确定稳定性。

确定性混沌的表征

LEs 的知识允许确定附加的不变量，如下吸引子的分形维数及其动态熵。卡普兰-约克公式给出了吸引子信息维数的上界（卡普兰和 Yorke1979)

$$D_{KY}=J+\frac{\Lambda_J}{|\lambda_{J+1}|}$$

式中 $\Lambda_j\equiv\sum_{i=1}^{j}\lambda_i$ 和 J 为最大的 J 值，使 $\Lambda_j>0$。这个方程可以用下面的方法来理解。严格正的 Λ_j 表明一般 j 维盒的超体积在吸引子上扩散时发散。这意味着维数比 i 大，因为这就像要求测量一个正方形的“长度”：覆盖这个正方形的一条线的长度显然是无限的！出于同样的原因，$\Lambda_i<0$ 表示维数小于 j。总之，我们可

以把 Kaplan-Yorke 公式看作是最大的 j 之间的线性插值，使得$\Lambda_j > 0$，最小的，这样正好相反(图 2 中的过程示意图复制)。一般来说，提供了一个上界丹麦克郎维度的信息，但在三维流(二维地图)和随机动力系统已经证明为了配合它。

卡普兰-约克公式还提供了有关活动自由度数目的近似信息。事实上，在典型的耗散模型中，相空间的维数是无限的，但唯一识别吸引子的不同点所必需的非因变量的数量是有限的，有时甚至很小。

另一个与 LE 相关的动态不变量是 kolmogoro - sinai 熵 *Hks*，它测量了混沌运动的指数不稳定性引起的熵的增长率。在这种情况下，用 Pesin 公式表示(Pesin 1977)

$$H_P \equiv \Lambda_j > H_{KS}$$

其中和为Λ_j被限制在严格的扩展方向(参见图 2 的示意图表示)。为了考虑不稳定方向上可能出现的分形结构(这在有排斥物的情况下发生，即暂态混沌)，该公式必须推广到

$$H_P = \sum_{\lambda_i > 0} d_i \lambda_i$$

d_i 表示沿第 *i* 个方向(在标准混沌吸引子$\mathrm{d}_i = 1$中)的分形维数。

波动

如图 1 所示，有限时间的 LE 是波动的。中心极限定理保证这样的涨落在时间趋于无穷时消失。然而，所谓的广义 LE(Fujisaka 1983, Benzi 等 al. 1985）$L(\mathrm{q})$

$$L(\mathrm{q}) = \lim\sup_{t\to\infty} \frac{1}{q} \ln\left\langle e^{q\lambda(t)} \right\rangle$$

(在本节中，为了简单起见，我们省略了对指数 *i* 的依赖)对这种波动很敏感。很容易看到，在极限$\mathrm{q} \to 0$时，恢复了通常的 LE 定义。

同样的问题可以用一种更透明的方式来解决，通过用大偏差函数$\mathrm{g}(\lambda)$表示长度为 *t* 的轨迹由指数λ(有限但足够大的 *t*)表征的概率$P(\lambda,\mathrm{t})$。

$$P(\lambda, t) \cong e^{-g(\lambda)t}$$

$\mathrm{g}(\lambda)$是一个非负函数，具有典型的二次极大值，与通常的 LE $\overline{\lambda}$对应，其中$\mathrm{g}(\overline{\lambda}) = 0$。这一条件意味着，随着时间的增加，观察到$\lambda = \overline{\lambda}$的概率不会呈指数增长。$\mathrm{g}(\lambda)$和$L(\mathrm{q})$通过勒让德变换联系在一起大偏差函数 g 是一个强大的工具，用

于检测一个完美的双曲线行为的偏差(例如，发现一个正指数的定义域也扩展到负值，作为同斜的结果。)

建立广义 LE 是很重要的与不同定义的连接分形维数:例如，关联维数。通过实现 Grassberger Procaccia 算法(Grassberger and Procaccia 1983)，与 $L(1)$ 相连。

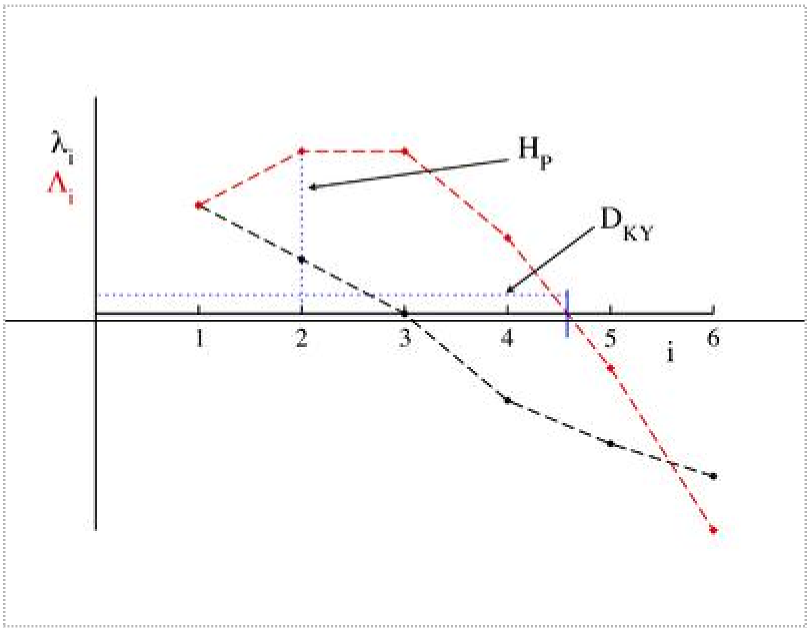

图 2 李亚普诺夫谱及其集成版本

空间扩展系统

为了简单起见，我们参考长度为 N 的一维格，并假设单个变量 z;在每个格点上定义。因此，相空间的维数为 n。我们希望考虑两个自然极限:热力学极限和连续极限。在前一种情况下，我们通过增加位点的数量并保持它们之间的距离不变，让 N 趋于无穷。在后一种情况下，通过减少空间分离来增加 N。在热态极限，人们观察到并证明了 LEs 在某种程度上越来越接近，因此我们有理由称之为李雅普诺夫谱(Ruelle 2004, Grassberger 1989)。

$$\lambda(\rho = \mathrm{i}/N) = \lambda_i$$

李雅普诺夫谱的存在可以解释为时空混沌的广泛性的证据。事实上，这意味着熵 H_P 和分形维数 D_{KY} 与系统大小成正比。换句话说，(物理空间的)充分分离区域的动力学是相互独立的。

在连续极限，附加(负)指数出现，这表征了发生在短空间尺度上的快速弛豫现象。

Chronotopic 方法

引入李亚普诺夫指数的目的是描述集总动力系统摄动的时间演化。但是在空

间扩展系统中。空间演化的描述也很重要。通过引入对流指数，得到了 LE 的首次推广，以描述初始定域扰动的增长(Deissler 和 Kaneko 1987)。

$$u(x,t)=e^{L(v)t}u(x,0)$$

其中 $v=i/t$ 是测量演化的世界线，$u(x,0)$ 被限制在 $x=0$ 附近的某个有限区间内。

在左右对称混沌系统中，L(v)也是对称的，在速度为零时，L(0)与标准最大 LE 重合(图 3，左面板)。随着速度的增加(绝对值)，L(v)逐渐减小，最终变为负值。最后给出了一个可以解释为无穷小扰动的最大传播的临界值。

只要不存在左右对称，就可能发生只有以一定速度传播的扰动才会膨胀。在这种情况下，我们谈到对流不稳定性(参见图 3 中的右面板)。如果系统是开的，一旦扰动消失了,它局部松弛回到原来的平衡状态。

对流指数是一个额外信息的例子，可以通过实现所谓的时位方法来提取(Lepri 等，1996)。由指数分布扰动的增长率定义 $u(x)=e^{\mu x}u_{\mu}(x)$ (设 $\mu=0$ 得到标准 LE)。通过假设切线空间中原始演化方程的一般优值，可以确定广义时间李亚普诺夫谱 $\lambda(\rho，\mu)$。

对 $\lambda(0，\mu)$ 进行勒让德变换可以得到对流指数。

$$L(v)=\lambda(0,\mu)-\lambda\mu \qquad v=\frac{d\lambda}{d\mu}$$

通过交换空间和时间变量的作用,可以定义一个互补空间李雅普诺夫指数 $\lambda(\rho，\mu)$。在一维系统中,有推测说彼此相关的两种光谱和遵循超级变量的存在(因为它是独立的时空参数化)熵势(Lepri 等 al . 1997 年)。

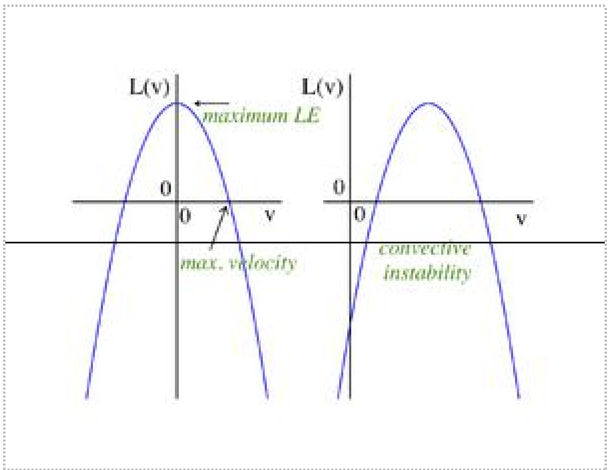

图 3 对流李雅普诺夫谱的两个不同实例

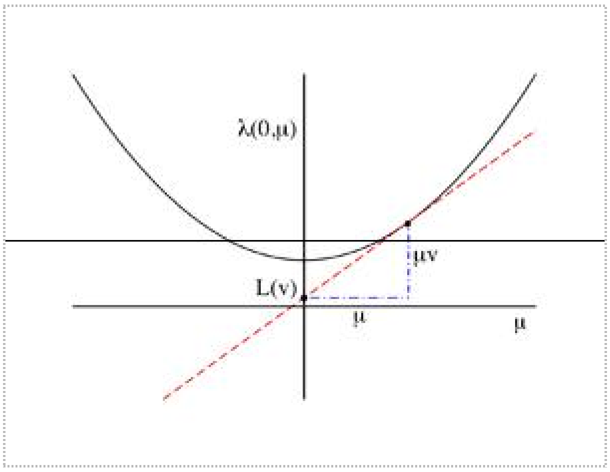

图 4 确定对流指数的几何构造

当 LEs 对应于一个合适矩阵乘积的极限特征值时，没有对应唯一的特征向量集，因为它们依赖于相点的当前位置。事实上，这种依赖性反映了稳定流形和不稳定流形的典型非线性形状。然而，我们不能直接引用由施密特正交化过程产生的向量 v_i，因为 V 不是协变的。即当 x 映射到 y 时，定义在 x 中的向量 $\mathrm{v}_i(x)$ 没有转化为 $\mathrm{v}_i(y)$，一个正确的定义需要推广线性算子特征向量的概念(Eckmann and Ruelle 1985)。粗略地说，协变向量可以通过沿着同一轨迹前后迭代来识别第 i 个向量 w_i 得到作为 i 维的(前)最展开子空间内(后)最展开的方向。确定协变向量的有效算法是最近才被提出的（沃尔夫和萨威尔森 2007 年，吉内利等人 2007 年）

有限振幅李亚普诺夫指数

在某些情况下，考虑有限振幅扰动是有用的，即使不是必要的。在实验时间序列中，在没有模型的情况下，我们不得不考虑有限距离，除此之外，将李亚普诺夫指数的概念扩展到可能与非线性相关的区域是有用的。

有限振幅指数可以用下列方式定义。给定任意两个附近的轨迹。让 $\Delta(\mathrm{t})$ 表示它们的相互距离，并测量时间 t_n，当 $|\Delta(\mathrm{t}_n)|$ (第一次)穿过一系列指数间隔阈值 θ_n，($\theta_\mathrm{n} = r\theta_{n-1}$ -见图 5)时。

通过平均的时间间隔之间的连续交叉对轨迹，得到有限振幅的李雅普诺夫指数(Aurell 等，1996)

$$\ell = \frac{r}{\langle t_n - t_{n-1} \rangle}$$

对于足够小的阈值，恢复通常的(最大)李雅普诺夫指数，而对于较大的振幅，ℓ 饱

和到零，因为扰动不能大于可达相空间的大小。在中间范围，1 告诉我们一个扰动的增长是如何受到非线性的影响。

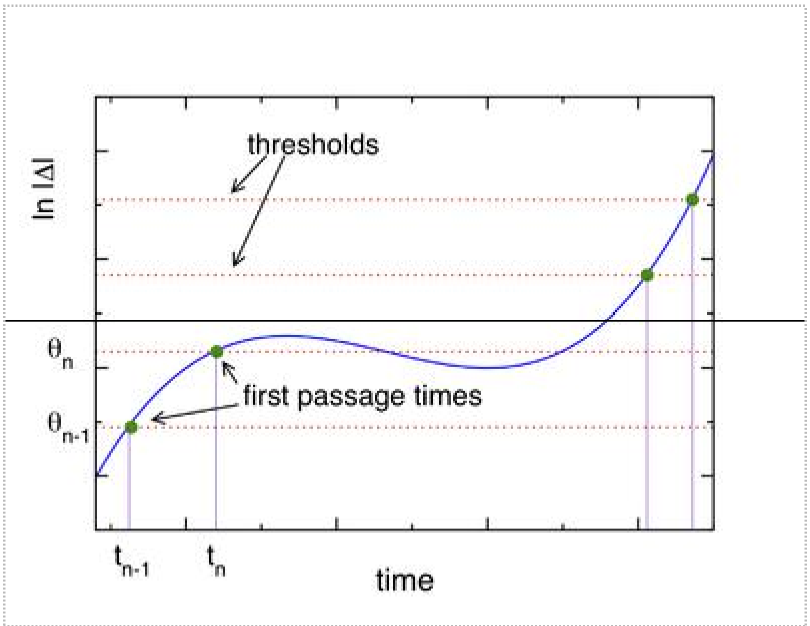

图 5 一般有限振幅扰动的增长

由于有限振幅的定义既不涉及无限时间限制，也不涉及无穷小扰动的定义，在数学上不是很好地提出，因为结果将取决于变量的选择。

然而，当人们想要区分微观和宏观扰动的稳定性，或者在不同的时间尺度下，当某些方向非常迅速地饱和时，用它来提取关于集体动力学存在的有用信息可能是有益的。

应用程序

事实证明 LEs 在各种上下文中都是有用的。在动力系统中，LEs 除了提供混沌动力学的详细描述外，还可以帮助评估各种形式的同步(Pikovsky 2007)。LEs 帮助阐明下层动力学的另一个背景是混沌平流。即粒子通过一个(可能与时间有关的)速度场传输的演化。

$$\dot{x} = F(x,t)$$

式中，x(t)为一般粒子在物理空间中的拉格朗日轨迹。在这种情况下，正李亚普诺夫指数的存在是混沌混合的同义词(Ottino, 1989)。

另一个突出的例子是无序状态下薛定谔方程本征函数(z)的安德森局部化。在这种情况下，研究的好处是(z)的空间依赖性(另见时位方法部分)。在一维系统中，在紧束缚近似中，z 是一个整数变量，空间演化对应于乘以一个 2 x 2 的随机矩阵。这就是所谓的转移矩阵方法:空间反转下的不变性意味着这两个(空间)LEs 是彼此相反的。最重要的结果是，正的 LE 与定位长度 e 的逆重合(Borland 1963, Furstenberg 1963)。该方法也可应用于高维空间，在这种情况下，局部化长度的逆与最小正极小值一致。

参考文献

- L. Arnold, Lyapunov exponents, Lecture Notes in Mathematics, 1186 (1986)
- E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, Growth of Noninfinitesimal Perturbations in Turbulence, Phys. Rev. Lett. 77:1262 (1996).
- G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J. M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems: a method for computing all of them, Meccanica 15 9:15, 9:21 (1980).
- R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, and A. Vulpiani, Characterisation of intermittency in chaotic systems, J. Phys A 18:2157 (1985).
- R.E. Borland, The nature of the electronic states in disordered one-dimensional systems, Proc. R. Soc. London, A274:529 (1963).
- R. J. Deissler and K. Kaneko, Velocity-Dependent Liapunov Exponents as a Measure of Chaos for Open Flow Systems, Phys. Lett.119A:397 (1987).
- J.-P. Eckmann and D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Rev. Mod. Phys. 57:617 (1985).
- H. Fujisaka, Statistical Dynamics Generated by Fluctuations of Local Lyapunov Exponents, Prog. Theor. Phys, 70:1264 (1983).
- H. Furstenberg, Noncommuting random products, Trans. Amer. Math. Soc., 108:377 (1963).
- F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chat\'e, R. Livi, A. Politi, Characterizing dynamics with covariant Lyapunov vectors, Phys. Rev. Lett. 99, 130601 (2007).
- P. Grassberger and I. Procaccia, Characterization of strange attractors, Phys. Rev. Lett. 50:346 (1983).
- P. Grassberger, Information Content and Predictability of Lumped and Distributed Dynamical Systems, Physca Scripta 40:346 (1989).
- J.L. Kaplan and J.A. Yorke, In Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points, ed. H.-O. Peitgen and H.-O. Walther, 2049 (Berlin, Springer-Verlag, 1979).
- G.A. Leonov and N.V. Kuznetsov, Time-varying linearization and the Perron effects International Journal of Bifurcation and Chaos 17:1079 (2007)
- S. Lepri, A. Politi, A. Torcini, Chronotopic Lyapunov analysis: (I) A comprehensive characterization of 1D systems, J. Stat. Phys. 82, 1429 (1996).
- S. Lepri, A. Politi, A. Torcini, Entropy potential and Lyapunov exponents, CHAOS 7, 701 (1997).
- A.M. Lyapunov *The General Problem of the Stability of Motion*, Taylor & Francis, London 1992.
- V.I. Oseledets, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. 19:197 (1968).
- J.M. Ottino, The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport (Cambridge University Press 1989).
- Y. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory Russian Math. Surveys, 32:55 (1977).

- D. Ruelle, Rotation numbers for diffeomorphisms and flows, Annales de l'IHP sec. 4, 42:109 (1985).
- D. Ruelle, *Thermodynamic formalism* (Cambridge University Press, 2004).
- I. Shimada and T. Nagashima, A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems, Prog. Theor. Phys. 61:1605 (1979)
- C.L. Wolfe, R.M. Samelson, An efficient method for recovering Lyapunov vectors from singular vectors, Tellus, 59A:355 (2007).

内部参考文献

- Shmuel Fishman, Scholarpedia, 5(8):9816 (2010).
- Edward Ott, Scholarpedia, 3(3):2110 (2008).
- Arkady Pikovsky, Misha Rosenblum, Scholarpedia, 2(12):1459 (2007).
- Yakov Sinai, Scholarpedia, 4(3):2034 (2009).