

解析平面映射的庞加莱-梅尔尼科夫-阿诺德方法

Amadeu Delshams[†] and Rafael Ramírez-Ros[‡]

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain

Received 8 April 1995

Recommended by V Lazutkin

摘要: 用于平面图的庞加莱-梅尔尼科夫-阿诺德方法产生了一个由一个无穷和(先验)解析上不可计算的和定义的梅尔尼科夫函数。在亚同构的假设下, 残差理论可以应用于给出一个等价的有限和。此外, Melnikov 函数被证明是一个椭圆函数, 并给出了关于不可积的一般判据给出了几个例子, 给出了分裂角的确切估计。特别地, 证明了椭圆台球非平凡对称全扰动的不可积性, 以及类标准映射的不可积性。

AMS 分类科目编号: 58Fxx, 34C37, 33E05

1 介绍

从 Poincaré [Poi99], Melnikov [Mel63] 和 Arnold [Arn64] 的著作中, Poincaré-Melnikov-Arnold 方法已经成为检测常微分方程系统的不变流形分裂的标准工具, 这些系统接近于具有相关分值的“可积”的。这种方法产生了一个称为梅尔尼科夫函数(或梅尔尼科夫积分)的积分, 如果非退化, 意味着“分裂”的前分离。(有关一般背景, 请参阅[GH83, Wig90]。)

然而, 应用中该函数的显式计算是通过残差理论来完成的, 残差理论要求在梅尔尼科夫积分中出现的函数具有合适的亚纯性质。

对于映射也存在类似的理论[Eas84, Gam85, Gam87], 在这种情况下, Melnikov 函数不再是一个积分, 而是一个无穷和(先验的)不可计算的和。一般来说, 这类无穷和的计算需要对复场进行偏移, 在[GPB89]中利用泊松求和公式、留数理论和椭圆函数对这类无穷和进行了首次显式计算。

乍一看, 他们的方法对于其中所研究的例子似乎是非常具体的, 然而, 在充分的亚同构假设下, 可以在离散情况下发展出计算梅尔尼科夫函数的系统而普遍的理论。就像连续情况一样。

首先, 设 $F_0: R^2 \rightarrow R^2$ 是一个保持面积的解析微分同态, 可积, 并有鞍点的分离槽。分别用第一个积分 H , Γ 和 P_0 表示, 分割线和鞍点。

由于 F_0 是保护区, 规范化 $[DF_0(P_0)] = \{\lambda, \lambda^{-1}\}$, 一些实数 λ 满足 $|\lambda| > 1$ 。如果有必要的话, 用 F_0 替换映射, 我们可以假设 $\lambda > 1$ 。

因为 F_0 是一个分析映射的分隔号鞍点，存在的自然参数化 Γ 的 σ (关于映射)，即一个双射分析映射: $\sigma: R \rightarrow \Gamma$ ，使得

$$(i) F_0(\sigma(t)) = \sigma(t+h), \forall t \in R,$$

$$(ii) h = \ln \lambda \quad (\text{归一化条件})$$

结果是，也许通过将第一个积分乘以一个合适的常数，上面的自然参数化是与 H 相关的哈密顿场的一个解，即。

$$\dot{\sigma} = \mathcal{N}H \circ \sigma, \text{ 其中 } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

注意，这个条件等价于节省与 H 相关的时间- H 哈密顿流在分离槽上对映射进行插值。这一事实对于显式地获得自然参数化，以及简化 Melnikov 函数的表达式是非常有用的。因此，我们假定选择第一个积分来验证这个插值条件。

现在，考虑一类解析的微分同态

$$F_\varepsilon: R^2 \rightarrow R^2 \quad F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2)$$

作为对上述情况的一般扰动。那么，在 ε 足够小的情况下， F_ε 有一个接近于 P_0 的鞍点 P_ε ，并且局部稳定和不稳定流形为 $(W_\varepsilon^s)_{loc}$ ， P 的局部稳定和不稳定流形的局部稳定和不定流形 $(W_\varepsilon^u)_{loc}$ 与无扰动鞍点 P_0 。

一般来说，分离线 Γ 会中断，我们的目标是计算不变流形沿分离线的正常曲线之间距离的一阶近似。

为此，给定一个自然参数化 $\sigma: R \rightarrow \Gamma$ ， $\Gamma, \sigma^u(t, \varepsilon)$ (分别为 $\sigma^s(t, \varepsilon)$) 将表示 W_ε^u (分别为 W_ε^s) 与在 $\sigma(t)$ 范数到 Γ 的“第一”交点；特别是， $\sigma^{u,s}(t, 0) = \sigma(t)$ (见图 1)。

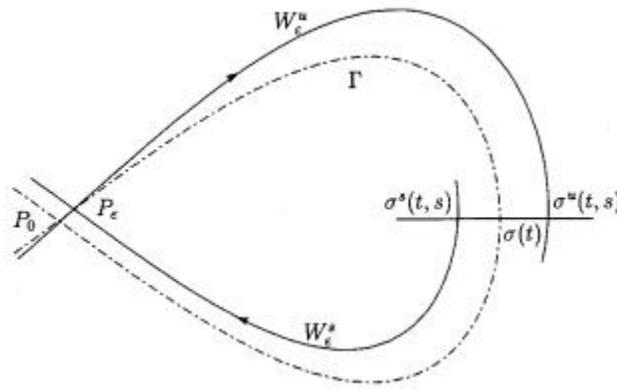


图 1 由同宿轨道组成的分离槽的扰动。链曲线是无摄动映射的同宿轨族

继庞加莱和 Arnold [Poi99, Am641]之后, 这些点之间距离的度量由第一积分的差值(能量)给出。

$$\Delta(t, \varepsilon) = H(\sigma^u(t, \varepsilon)) - H(\sigma^s(t, \varepsilon)) = \varepsilon M(t) + O(\varepsilon^2)$$

其中 M 是所谓的梅尔尼科夫函数, 一个由无穷和给出的 h 周期函数

$$M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t + hn) \quad g(t) = \langle \dot{\sigma}(t), JF_1(\sigma(t-h)) \rangle$$

通常注意到梅尔尼科夫函数的简单零引起横向同斜点和混沌现象。

一个非常重要的情况是, F_ε 是一个区域保留映射(a.p.m.从今以后), 生成函数

$$L(x, X, \varepsilon) = L_0(x, X) + \varepsilon L_1(x, X) + O(\varepsilon^2)。$$

在这种情况下, Melnikov 函数为

$$M = \dot{L} \quad L(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + hn) \quad f(t) = L_1(x(t), x(t+h))$$

其中 $x(t)$ 是 $\sigma(t)$ 的第一个分量, 为了得到一个(绝对)收敛的和, L_1 由 $L_1(x_0, x_0)$ 决定,

如果 $P_0 = (x_0, y_0)$ 。在这种情况下, M 实际上是一个 h 周期函数的导数, 而不仅仅是一个 h 周期函数。因此, 如果 M 是实解析的且不等于零, 则它具有奇序实零, 因此摄动不变曲线交叉和摄动映射[Cus78]是不可积的。

为了统一符号, 考虑 $\sum(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(t + hn)$, 其中 $q(t)$ 要么是 $g(t)$ 要么是 $f(t)$ 。If $q(t)$

是一个亚纯函数(分别是一个只有孤立奇点的函数), 那么 $\sum(t)$ 是一个周期为 h 和 Ti 的椭圆函数(分别是一个只有孤立奇点的双周期函数)。通常是 $T = 2\pi$, 但如果问题有对称性, $T = \pi$ 。椭圆函数和映射的梅尔尼科夫函数之间的关系可以追溯到 [GPB891], 尽管直到 [Lev93] 才清楚地显示出来。

$\sum(t)$ 可以表示为有限和:

$$\sum(t) = - \sum_{z \in S(q)} \text{res}(\chi_t q, z)$$

式中, $S(q) = \{z \in \mathbb{C} : q \text{ 是 } z \text{ 的一个奇点}, 0 < z < T\}$, $\chi_t(z) = \chi(z-t)$, χ 是由以下条件

确定的函数(直至一个附加常数):

(C1) χ 在 \mathbb{C} 上是亚纯的,

(C2) χ' 是 h 周期的, χ 是 Ti 周期的,

(C3) χ 的极点的集合是 $h\mathbb{Z} + Ti\mathbb{Z}$, 它们都是简单的和残差的。

值得注意的是, χ 可以明确地用第二类不完全椭圆积分计算。

从理论和实践的角度来看，这个和公式是本文的主要工具之一，因为它提供了梅尔尼科夫函数 M 的显式计算，假设函数 g 或 f 的亚同构假设。

下面的强不可积准则是很容易得到的。设 F_ε 为具有生成函数的解析 a.p.m. 族，其中 F_0 验证了上述假设，并假设函数 F_0 只有孤立的奇点。设 $S(f) = \{z_{sl}\}$ ，其中 $z_{sl} - z_{s'l'} \in hZ$ iff $s = s'$ (f 的奇点以 h 为模分类)，并引入问题的不可积系数： $d_{sj} = \sum_l a_{-(j+1)}(f, z_{sl})$ ， $a_{-j}(f, z_0)$ 表示 f 在孤立奇异 z_0 附近的洛朗展开式中 $(z - z_0)^{-j}$ 的系数。然后，如果这些不可积系数中有些不为零，那么梅尔尼科夫函数就不恒等于零 F_ε 对于足够小的 ε 是不可积的。(对于连续情况，[Zig82]中也有利用复场奇点结构的相关判据。)

这一标准的威力在于以下两个事实：

- 不可积系数 ε 是明确计算出来的，所以很容易检查。
- 这个准则检测任意有限阶的交点(不只是横向的，像通常在文献中那样)。

第一个应用程序,考虑的问题“凸台球台”[Bir27]令 C 是一个(分析)封闭凸曲线的平面 R^2 ,假设质点移动内部 C 和碰撞与 C 依法“入射角等于反射角。根据伯克霍夫的理论，这个离散的动力系统可以用(分析的)ap.m 来建模。当环 C 是椭圆时，这个映射称为椭圆台球，是一个可积映射，[Bir27]。

几个作者[Lev93, Tab93, LT93, Tab94, Lom94]致力于扰动椭圆台球的研究。所有已进行显式计算的情况简化为对称和可逆四次摄动，即类似曲线中的弹子

$$C_\varepsilon = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon P(x, y, \varepsilon) = 1\}$$

$0 < b < a$ 是一个常数， ε 是一个小的扰乱性的参数， C 是一个以 C^2 的方式依赖于 ε 的分析曲线，关于坐标轴对称， $P_1 = P(\cdot, \cdot, 0)$ 是 x, y 的四次多项式。

作为推广，我们将注意力集中在椭圆台球的对称整体摄动上，即上述曲线上的台球，但仅对原点和 P_1 对称，是一个完整的函数。

如果存在一类椭圆 $\{E_\varepsilon\}$ ，使 $C_\varepsilon = E_\varepsilon + O(\varepsilon)$ ，那么一类扰动椭圆 $\{C_\varepsilon\}$ 将被称为平凡的。利用上述非可积准则，推导出当 $\{C_\varepsilon\}$ 是任意非平凡对称全扰动时， C_ε 中的台球。当 ε 足够小时是不可积的。这个结果支持了 Birkhoff 的猜想，椭圆台球是平面上唯一可积的解析台球。

从定量的角度出发, 在几个具体例子中可以很容易地计算出以 ε 为幂的分裂角泰勒展开的第一系数。此外, 在非常一般的摄动下, 当无摄动的椭圆接近一个圆时, 这个系数在中心中呈指数小。

作为第二个应用, 考虑标准映射, 即 $F(x,y) = (y, -x + g(y))$ 形式的平面映射, 对于某个函数 g 。

由公式给出的类似分析标准的映射

$$F_0(x,y) = (y, -x + 2y \frac{\mu + \beta y}{1 - 2\beta y + y^2}) \quad -1 < \beta < 1 < \mu$$

是可积的(见[Sur891, 其中引入了几个类标准可积映射族), 在原点处有一个分离线。

对于 $\beta = 0$, 这是[GPB891 中考虑的 McMillan 映射[McM711, 其中梅尔尼科夫函数

是在线性摄动 $F_1(x,y) = (0, ax + by)$ 下显式计算的。 a, b 常数, $a = 0$, 由于[GPB891

的繁琐计算的结果, 对于 ε 足够小, 标准映射 $F_0 + \varepsilon F_1$ 的不可积性如下。

这个不可积的结果推广到类标准映射中

$$F_0(x,y) = (y, -x + 2y \frac{\mu + \beta y}{1 - 2\beta y + y^2} + \varepsilon p(y)) \quad -1 < \beta < 1 < \mu \quad \varepsilon \in R$$

这里 p 是一个完整的函数, 不等于零。此外, 在发展理论的框架内, 当 p 是一个多项式时, Melnikov 函数的计算和分裂角的估计变得几乎微不足道。

为了结束这个介绍, 注意两点:

- f 或 g 的亚同构性仅用于 Melnikov 函数的显式计算。为了证明不可积性, 假设 f 是一个在 C 上只有孤立奇点的实解析函数是充分的。
- 分离的主题由两个子类组成:“简单”和“困难”。第一个特征是:对于小参数, 分裂量是有限阶的, 因此可以用通常的摄动理论(即 Melnikov 技术是有效的)来计算。在第二个子类中, 主量相对于小参数呈指数小(回想一下椭圆接近圆的情况)。因此, 需要更复杂的分析工具(例如, 参见[FS90, DS92, GLS941])。先验的, Melnikov 技术不能应用于这个子类。然而, 我们认为“梅尔尼科夫预测”在几个(不是所有)“困难”的情况下适用。这种感觉得到了用一些地图进行的数值实验的支持 [DR95]。这个课题目前正在研究中。

本文的其余部分致力于上述主张和结果的严格公式和证明。它是这样组织的。在第二节中, 引入了梅尔尼科夫函数, 并给出了它与分离分离的定量和定性方面的关系。第三节给出了其求和公式和不可积性判据。最后一部分研究了摄动椭圆台球(第 4 节)和类标准映射(第 5 节)。这些部分包含了不可积性结果, 以及梅尔尼科夫函数显式计算和分裂角估计的例子。

2. Melnikov 函数

2.1 初始设置

令 $F_0: R^2 \rightarrow R^2$ 是解析 a.p.m.。一方面, 我们假设 F_0 有一个分离鞍点: 存在一个鞍点 P_0 (F_0 稳定流形的一个分支, W_0^s , 恰逢其不稳定的一个分支, W_0^u , 分隔号 $\Gamma \subset (W_0^s \cap W_0^u) \setminus \{P_0\}$ 。另一方面, 我们假设 F_0 是可积的: 存在解析函数 $H: R^2 \rightarrow R$, 使得对于所有 $H \circ F_0 = H, \nabla H(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$, (这是 H 在 Γ 上的非简并性条件)。

备注 2.1 当 P_0 是一个双曲 k 周期点时, 我们可以考虑映射 F_0^k 来得到一个双曲不动点。

在不失一般性的情况下, 我们可以假设 F_0 是保持方向的, 必要时考虑到地图的平方。因此, $Spec[DF_0(P_0)] = \{\lambda, \lambda^{-1}\}, \lambda > 1$ 。设 $h = \ln \lambda$ 为相关特征指数。

首先证明了自然参数化的存在性, 同时也证明了第一积分的存在性, 从而验证了引入的插值条件。

引理 2.1 在上述符号下, 设 F_0 为解析的 a.p.m., 不可分割的, 并与鞍点相连。

(i) 设 z_0 为 Γ 中的一个点, 则 Γ (对于 F_0) 存在唯一的自然参数化 σ , 使 $\sigma(0) = z_0$ 。

此外, 还存在一个解析映射: $\varphi: R \rightarrow R^2$, 使 $\sigma(t) = \varphi(e^t), \forall t \in R$ 。

(ii) 存在一个常数 θ , 使得与 θH 相关的时间- h 哈密顿流在分离槽上插值映射。

证明 由于 P_0 是一个双曲不动点分析的 a.p.m. F_0 , 存在变量 $\Phi_0: (x, y) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的变化, 在 P_0 的邻域上解析, 它将 F_0 变换为它的 Birkhoff 范式 $F_0 = \Phi_0 \circ F_0 \circ \Phi_0^{-1}$:

$$F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}G_0(\mathbf{xy}), \mathbf{y}/G(\mathbf{xy}))$$

此处 $G_0(I) = \lambda + O(L)$ 。这一事实的证明见[Mos56]。

现在引入 $K_0(L) = h \int_0^L \ln G_0(s)$ (即 $G_0 = \exp(hK_0'), K_0(0) = 0$, 证明 F_0 是 $H_0(x, y) = K_0(x, y)$ 的 h -时间哈密顿流。

特别地, $\sigma(t) = \Phi_0^{-1}(x_0 e^t, 0) =: \varphi(e^t)$ 满足 $\sigma(t+h) = F_0(\sigma(t))$ 对于足够大的 $-t$, 因此, $\forall t \in R$ 利用 F_0 的可解析性。现在 $\varphi(1) = z_0$ 表示 X_0 唯一, 从而证明了(i)。

另一方面, $H_0 := H_0 \circ \Phi_0$ 是 F_0 的一个(局部)第一积分, 因此 H_0 , H 是功能相关映射。因此, 由于 H/Γ 非退化存在, 定义在一个附近的 $H(P_0)$, 这样 $H_0 := \Theta \circ H$ 。这个关系可以让我们扩展 H_0 分界线附近的 Γ 因为它是包含在能级 $H^{-1}(P_0)$ 。最后, 我们观察到 $\nabla H_0(z) = \Theta'(H(P_0))\nabla H(z)$, 对于所有的 $z \in \Gamma$, 因此, 如果我们取 $\theta = \Theta'(H(P_0))$, 与 H_0 和 θH 相关的哈密顿流在 Γ 上重合, 并且(ii)遵循。

备注 2.2 令 $X_H J \cdot \nabla H$ 。 ∇H 是 H 的哈密顿场, $A = DX_H(P_0)$, $B = DF_0(P_0)$, θ 由引理 2.1 给出的常数。那么 B 和 $e^{\theta A}$ 有相同的特征向量和特征值。因此, 我们可以从等式 $B = e^{\theta A}$ 中确定 θ 。我们注意到 B 的特征值是 $e^{\pm h}$, 所以 θA 的特征值必须是 ± 1 , 这决定了符号。

在本节的其余部分, 我们将假设选择第一个积分 H 是为了验证这个插值条件。因此, 对于所有的 $z_0 \in \Gamma$, $\sigma(t) = \psi^t(z_0)$ 是 Γ 的(唯一的)自然参数化, 使 $\sigma(0) = z_0$, 其中 $\{\psi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 是与 H 有关的哈密顿流, 因此我们可以简单地求解哈密顿方程显式地计算自然参数化

$$\dot{\sigma} = J \cdot \nabla H \circ \sigma \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

在分割线上有初始条件。

在本文中, h 和 σ 将分别是大于鞍点之一的特征值的对数和验证(2.1)的分隔线的自然参数化, 当它有意义时。

为了简洁起见, 如果一个映射满足前面所有的假设, 我们就说它验证(H)。

2.2 Melnikov 函数

考虑一个解析微分同胚族 $F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2)$, 并引入问题的 Melnikov 函数, 如由所确定的函数 $M(t)$

$$\Delta(t, \varepsilon) = H(\sigma^u(t, \varepsilon)) - H(\sigma^s(t, \varepsilon)) = \varepsilon M(t) + O(\varepsilon^2) \quad (2.2)$$

在引言中定义了 $\sigma^{u,s}$ (见图 1)。利用上述符号, 我们现在证明以下命题。

命题 2.1 设 F_0 验证(H), 则:

(i)Melnikov 函数由下式给出

$$M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t + hn) \quad (2.3)$$

$$g(t) = \langle \nabla H(\sigma(t)), F_1(\sigma(t-h)) \rangle = \langle \dot{\sigma}(t), JF_1(\sigma(t-h)) \rangle \quad (2.4)$$

(ii)如果 F_ε 是一个具有母函数的 a.p.m.

$$L(x, X, \varepsilon) = L_0(x, X) + \varepsilon L_1(x, X) + O(\varepsilon^2) \quad (2.5)$$

Melnikov 函数由

$$M = \dot{L} \quad L(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + hn) \quad (2.6)$$

$$f(t) = L_1(x(t), x(t+h)) \quad (2.7)$$

其中 $x(t)$ 是 $\sigma(t)$ 的第一个分量, 为了得到一个(绝对)收敛和, L_1 由 $L_1(x_0, y_0) = 0$ 决定, 如果 $P_0 = (x_0, y_0)$ 。

证明 这些结果似乎是众所周知的(从这些方面看, 例如[GPB89, Lev93, Lom94])。但为了方便读者, 我们更喜欢包含证明。关键是用 $H \circ F_\varepsilon - H$ 表示 $M(t)$ 。

(i)对于每个固定的 t , 我们首先观察到对于所有的 $m > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(t, \varepsilon) &= H(F_\varepsilon^{-m}(\sigma^u(t, \varepsilon))) - H(F_\varepsilon^m(\sigma^\alpha(t, \varepsilon))) \\ &\quad + \sum_{n=1-m}^m H(F_\varepsilon^n(\sigma^\alpha(t, \varepsilon))) - H(F_\varepsilon^{n-1}(\sigma^\alpha(t, \varepsilon))) \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \alpha(n)$, 当 $n \leq 0$ 时, $\alpha = u$, 当 $n > 0$ 时, $\alpha = s$ 。由于当 $m \rightarrow +\infty$ 时 $H(F_\varepsilon^{-m}(\sigma^u(t, \varepsilon))) - H(F_\varepsilon^m(\sigma^\alpha(t, \varepsilon))) \rightarrow H(P_\varepsilon) - H(P_\varepsilon) = 0$, 我们通过传递到极限得到

$$\Delta(t, \varepsilon) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H \circ F_\varepsilon - H)(F_\varepsilon^{n-1}(\sigma^\alpha(t, \varepsilon))) \quad (2.8)$$

现在, 由于 $\sigma^\alpha(t, \varepsilon)$ 是 F_ε 的一个不变曲线, 它是 $O(\varepsilon)$ 接近于 $\sigma(t)$, 我们得到 $F_\varepsilon^{n-1}(\sigma^\alpha(t, \varepsilon)) = F_0^{n-1}(\sigma^\alpha(t)) + O(\varepsilon) = \sigma(t + h(n-1)) + O(\varepsilon)$, 在 n 中一致, 这里我们使用了 σ 是一个自然参数化。此外,

$$H \circ F_\varepsilon - H = \varepsilon \langle \nabla H \circ F_0, F_1 \rangle + O(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

把所有这些放在(2.8)里, 我们得到(2.3)。

(ii)充分证明 $f(t) = g(t+h)$, 因为指标的移位不会改变总和。首先我们寻找 $H \circ F_\varepsilon - H$ 的表达式。

引入符号 $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) = F_\varepsilon(x, y) = (X_0, Y_0) + \varepsilon(X_1, Y_1) + O(\varepsilon^2)$ 。由于 L 是 F_ε 的生成函数, 所以它满足方程

$$y = -\partial_1 L(x, X_\varepsilon, \varepsilon) \quad Y_\varepsilon = \partial_2 L(x, X_\varepsilon, \varepsilon)$$

现在, 在 ε 处直接展开, 得到这个式子

$$\begin{aligned} (H \circ F_\varepsilon - H)(x, y) &= H(X_\varepsilon, \partial_2 L(x, X_\varepsilon, \varepsilon)) - H(x, \partial_1 L(x, X_\varepsilon, \varepsilon)) \\ &= \varepsilon[\partial_2 H(x, y)\partial_1 L_1(x, X_0) + \partial_2 H(F_0(x, y))\partial_2 L_1(x, X_0)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

因此, 使用 2.9 式, 我们得到 $z = (x, y)$:

$$\langle \nabla H(F_0(z)), F_1(z) \rangle = \partial_2 H(z)\partial_1 L(x, X_0) + \partial_2 H(F_0(z))\partial_2 L_1(x, X_0)$$

最后, 用这个表达式完成证明, 并且(2.1):

$$\begin{aligned} \langle \nabla H(F_0(z)), F_1(z) \rangle &= \partial_2 H(z)\partial_1 L(x, X_0) + \partial_2 H(F_0(z))\partial_2 L_1(x, X_0) \\ \dot{f}(t) &= \dot{x}(t)\partial_1 L_1(x(t), x(t+h)) + \dot{x}(t+h)\partial_2 L_1(x(t), x(t+h)) \\ &= \partial_2 H(\sigma(t))\partial_1 L_1(x(t), x(t+h)) + \partial_2 H(\sigma(t+h))\partial_2 L_1(x(t), x(t+h)) \\ \langle \nabla H(\sigma(t+h)), F(\sigma(t)) \rangle &= g(t+h). \end{aligned}$$

备注 2.3 Melnikov 函数 M 是 h 周期函数。此外, 在 a.p.m. 的情况下, 它是 h 周期函数 L (称为梅尔尼科夫势) 的导数, 因此它的均值为零。

F_0 的保面积性质和 F_ε 的可分析性无需得到前面的一些公式, 参见[GPB89], 但在下面的定理中需要用到它们, 所以我们直接添加了这些假设。从实用的观点来看, 这没什么区别, 因为。据我们所知。所有具有分隔线到鞍点的可积映射都证明了这些假设的存在。

所需的定性和定量信息包含在下面的“定理”中。

定理 2.1 (i) 对于 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, 如果 M 有奇阶零, 则扰动不变流形在有限阶交叉。

(ii) 对于 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, 在 a.p.m. 的情况下, 如果 M 不恒等于零, 那么 F 是不可积的。

(iii) 如果 M 在 $t = t_0$ 处有一个简单的零, 那么相关联的交点为截线, 所谓的分裂角 $\alpha(\varepsilon)$, 验证

$$|\tan(\alpha(\varepsilon))| = \frac{|\dot{M}(t_0)\varepsilon|}{\|\dot{\sigma}(t_0)\| \|\nabla H(\sigma(t_0))\|} + O(\varepsilon^2) = \frac{|\dot{M}(t_0)\varepsilon|}{\|\dot{\sigma}(t_0)\|^2} + O(\varepsilon^2) \quad (2.10)$$

证明

(i)它是(2.2)和 H/Γ 的非退化条件的直接结果。

(ii) $M = \dot{L}$, L 是解析的 h 周期, 所以 $\int_0^h M(t)dt = 0$ 。因此 $M \neq 0$ 意味着。M 改变了符号, 有奇数阶为 0。现在 F_ε 的不可积性是(i)、可分析性和保面积特性的结果 [Cus78]。

(iii)第二个等式很明显, 因为 $\dot{\sigma}$ 和 $\nabla H \circ \sigma$ 具有相同的范数, 见(2.1)。因此, 我们将注意力集中在第一个问题上。令

$$v(t) = \frac{\nabla H(\sigma(t))}{\|\nabla H(\sigma(t))\|} \quad dist(t, \varepsilon) = \langle \sigma^u(t, \varepsilon) - \sigma^s(t, \varepsilon), v(t) \rangle$$

分别为 $\sigma(t)$ 处的单位法向量 Γ 和 $\sigma^u(t, \varepsilon)$ 与 $\sigma^s(t, \varepsilon)$ 之间的距离(符号)。

由命题 2.1 和 Δ 的定义可知

$$dist(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon M(t)}{\|\nabla H(\sigma(t))\|} + O(\varepsilon^2)$$

首先, 我们暂时假设 t 是 Γ 的弧参数, 那么,

$$|\tan(\alpha(\varepsilon))| = \frac{d}{dt} \left[dist(t, \varepsilon) \right]_{t=t_0} + O(\varepsilon^2) = \frac{|\dot{M}(t_0)\varepsilon|}{\|\nabla H(\sigma(t_0))\|} + O(\varepsilon^2)$$

这里我们用了 $M(t_0) = 0$ 以及导数的几何解释。

最后, 我们只需要在 t 不是弧参数时, 将规格化因子 $\|\dot{\sigma}(t_0)\|^{-1}$ 加到规则链的前一个公式中。

备注 2.4 分裂角 $\alpha(\varepsilon)$ 在 $t_0 \rightarrow \pm\infty$ 时接近 $\pm\pi/2$ 。对于 a.p.m., 最好使用不变曲线或同宿不变曲线(首先在[GLT911 中引入)所形成的叶瓣的面积, 因为它们不依赖于 t_0 。我们没有使用这些 a.p.m. 不变量, 因为我们没有将自己限制在 a.p.m. 的扰动中。

3 求和公式和不可积性

3.1 椭圆函数

我们记得, 一个椭圆函数是一个亚纯的双周期函数(即它有两个周期 T_1, T_2 不为零, 这样 $T_1/T_2 \notin \mathbb{R}$)。关于椭圆函数的符号来自[AS72]。

给定参数 $m \in [0, 1]$, 回想

$$K = K(m) := \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin \theta)^{-1/2} d\theta \quad E = E(m) := \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin \theta)^{1/2} d\theta$$

是第一类和第二类的完全椭圆积分。

$$E(u) = E(u | m) := \int_0^u dn^2(v | m) dv$$

是第二类不完全椭圆积分，其中 dn 是著名的雅可比椭圆函数之一。

此外， $K' = K'(m) := K(1-m)$, $E' = E'(m) := E(1-m)$ ，我们还注意到，如果 m, K, K' 或 K'/K 任意一个数给定，其余的数都确定了。如果不可能造成混淆，我们将不会显式地写出参数 m 。

引入函数 $\Lambda(z) := (E'/K'-1)z + E(z + K'i)$ 。这个函数在 \mathbb{C} 是亚纯， $2K'i$ 周期上的，它的导数是 $2K$ 周期，它的极点集是 $2KZ + 2K'iZ$ 都是极点的单极和余数为 1。实际上， Λ 的周期是 E 的周期的结果：

$$E(z + 2K) = E(z) + 2E \quad E(z + 2K'i) = E(z) + 2(K' - E'i)$$

除了 $\Lambda'(z) = E'/K'-1 + dn^2(z + K'i)$ ，其中 dn^2 是偶椭圆函数，其极点集为 $2KZ + 2K'iZ + K'i$ ，均为二重残差为零，前导系数为 -1，证明了关于 Λ 的断言。

给定 $T, h > 0$ ，由关系式确定参数 m

$$\frac{K'}{K} = \frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{T}{h} \quad (3.1)$$

我们考虑函数

$$\chi(z) = \frac{2K}{h} \Lambda\left(\frac{2Kz}{h}\right) \quad \chi_t(z) = \chi(z - t) \quad (3.2)$$

从 Λ 的属性可以很容易地看出：

(C1) χ 在 \mathbb{C} 上是亚纯的。

(C2) χ 是 Ti 周期的， χ' 是 h 周期的。

(C3) χ 的极点集合是 $hZ + TiZ$ ，它们都是简单的，余数为 1。

χ 的性质是相同的，除了极点是 $t + hZ + TiZ$ 。此外，利用 $E(z + 2K) = E(z) + 2E$ 和 Legendre 关系式 $EK' + E'K - KK' = \pi/2$ ，得到

$$\chi(z + h) - \chi(z) = 2\pi/T \quad (3.3)$$

备注 3.1 条件(C1)-(C3)确定 χ 直到一个可加常数:如果 χ_1 满足(C1)-(C3)， $(\chi - \chi_1)'$ 是一个完整的双周期函数，它必须是一个常数;因此， $\chi(z) - \chi_1(z) = az + b$ ，但由于 Ti

周期性， $a = 0$ 。根据 Weierstrass 函数 \wp ，由于 $\chi(z) = -z^{-2} + O(1)$ ，
 $\chi_1'(z) = -\wp(z) + \text{constant}$ 。

现在，我们介绍在计算 Melnikov 函数时起重要作用的函数

$$\Psi(t) = \chi'\left(\frac{T}{2}i - t\right) - \left(\frac{2K}{h}\right)^2 \left(\frac{E'}{K'} - 1\right) = \left(\frac{2K}{h}\right)^2 \text{dn}^2\left(\frac{2Kt}{h} | m\right) \quad (3.4)$$

因此， Ψ 是 2 阶椭圆函数。周期是 h 和 Ti 。而且，它对于 $t=0$ 和 $t=h/2$ 是对称的。最后，我们将给出一些渐近表达式，这将在接下来的章节中引起我们的兴趣。由 [AS72] 给出的近似和利用关系式(3.1)，有

$$\begin{aligned} M &= 16e^{-\pi K'/K} [1 + O(e^{-\pi K'/K})] = 16e^{-T\pi/h} [1 + O(e^{-T\pi/h})] \\ K(m) &= \frac{\pi}{2} + O(m) \\ \text{dn}(z | m) &= 1 + O(m), \text{dn}^{(j)}(z | m) = O(m) \quad j \geq 1 \\ \text{cn}^{(j)}(z | m) &= \cos^{(j)}(z) + O(m) \quad j \geq 0 \\ \text{sn}^{(j)}(z | m) &= \sin^{(j)}(z) + O(m) \quad j \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

对于 $0 < h \ll 1$ 和 $z \in R$ ，利用雅可比椭圆函数的导数表达式，得到对 $t \in R$ 和 $0 < h \ll 1$ ，

$$\Psi^{(2j-1)}(t) = (-1)^j \left(\frac{2\pi}{h}\right)^{2j+1} 2e^{-T\pi/h} \left[\sin\left(\frac{2\pi t}{h}\right) + O(e^{-T\pi/h})\right] \quad j \geq 1. \quad (3.6)$$

备注 3.2 重要的是要记住，函数 χ 、 χ_i 和 Ψ 是由商 T/h 通过参数 m 和关系(3.1)确定的。

3.2 求和公式

为了显式地计算 Melnikov 函数，关键问题是计算一个无穷和，例如 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} q(t + hn)$ ，其中 q 是(2.4)中的函数 g 或(2.7)中的函数 f 。我们现在的目标是把这类无穷和转化为有限和。思想是把留数定理应用到 $\chi_i q$ 上， χ_i 是上面定义的函数，首先在一些矩形区域。然后，通过极限传递，初始和可以表示为 q 在某复杂水平带孤立奇点上的 $-\chi_i q$ 残差之和。在本小节中，我们假设 q 是一个检验函数：

(P1) q 在 R 上是解析的，在 C 上只有孤立奇点。

(P2) q 对 $T > 0$ 是 Ti 周期函数。

(P3) 对某些常数 A ， $c > 0$ ，当 $|\Re t| \rightarrow \infty$ ， $|q(t)| \leq Ae^{-c|\Re t|}$ 。

我们表示 $\mathcal{L}_T = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im z < T\}$, $\mathcal{S}(q) = \{z \in \mathcal{L}_T : z \text{ 是 } q \text{ 的奇点}\}$, 记 $S(q) = \{z_{sl} : l = 1, \dots, k_s, s = 1, \dots, k\}$, 其中 $z_{sl} - z_{s'l'} \in h\mathbb{Z} \Leftrightarrow s = s'$. (我们已经分类了 q 模 h 的奇点。) 最后, 对于 $s = 1, \dots, k$ 和 $j \geq 0$, 我们引入数 $d_{sj} = \sum_{l=1}^{k_s} a_{-(j+1)}(q, z_{sl})$, 其中记号 $a_{-j}(q, z)$ 在引言中已经定义。

我们准备给出如下的求和公式。

命题 3.1(求和公式) 令 $\sum(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(t + hn)$, 然后:

(i) \sum 在 \mathbb{R} 中是解析的, 在 \mathbb{C} 中只有孤立奇点, 并且是双周期的, 周期分别是 h 和 Ti 。

(ii) $\sum(t)$ 可以用以下有限和表示:

$$\sum(t) = - \sum_{z \in S(q)} \text{res}(\chi, q, z), \quad (3.7)$$

或等价为

$$\sum(t) = - \sum_{z \in S(q)} \sum_{j \geq 0} \frac{a_{-(j+1)}(q, z)}{j!} \chi^{(j)}(z - t) \quad (3.8)$$

(iii) 设 $b_s \in \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < T/2\}$, 用 $z_{sl} \in b_s + T_i/2 + h\mathbb{Z}$ 确定所有 s, l 的模 h 。然后

$$\sum'(t) = \sum_{s=1}^k \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{j!} d_{sj} \psi^{(j)}(t - b_s) \quad (3.9)$$

证明

(i) \sum 在 \mathbb{R} 中具有明显的 Ti 周期和解析性。由于(P3)和绝对地、无条件地、一致地收敛于 \mathbb{C} 的紧集上, 而不存在 $S(q) + h\mathbb{Z} + Ti\mathbb{Z}$ 集合中的点。因此 \sum 也是 h 周期的, 并且只有孤立奇点, 仅在上述集合中。

(ii) q 上的假设暗示 $S(q)$ 是一个有限集, 所以(3.7)中的和是有限的。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 设 $S_\alpha(q) = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ 是 } q \text{ 的奇点}, \alpha < \Im z \leq \alpha + T\}$, 我们注意到 $S(q) = S_0(q)$ 。此外, $\sum_{z \in S_\alpha(q)} \text{res}(\chi, q, z)$ 不依赖于 α , 因为 χ, q 是 Ti -周期的, 因此, 为了证明公式(3.7)就足以验证, 对某个 α ,

$$\sum(t) = - \sum_{z \in S_\alpha(q)} \text{res}(\chi_t q, z),$$

选 $\alpha \in [-T/2, 0)$ 使得 q 没有奇点与虚部 α ，我们考虑矩形顶点 $M_+ + \alpha i, M_+ + (\alpha + T)i, M_- + (\alpha + T)i, M_- + \alpha i$ ，其中 $M_\pm = t \pm (N + \frac{1}{2})h, N \in \mathbf{N}$ 。如果 N 是足够大， $\chi_t q$ 矩形的边界连续波分析 C_N ，只有在其内部孤立奇点 R_N ，残数定理给出了

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \chi_t q = \sum_N \text{res}(\chi_t q, z)$$

式中 \sum_N 表示对 R_N 中 $\chi_t q$ 的奇点 $\{z = t + hn\} \cup S_\alpha(q)$ 的求和。由于 $\chi_t q$ 是 Ti -周期的，水平积分消去，而当 N 趋于无穷时，垂直积分消去，使用(P3)和(C2)。因此 $\chi_t q$ 在 $\{z \in C; \alpha < \Im z \leq \alpha + T\}$ 上的残差之和为零，并且由于 $\chi_t q$ 在(C3)和(P1)处没有公共奇点，则有

$$\sum(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q(t + hn) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \text{res}(\chi_t q, t + hn) = - \sum_{z \in S_\alpha(q)} \text{res}(\chi_t q, z)$$

最后，我们注意到对于 $z \in S(q)$ ， $\text{res}(\chi_t q, z) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} a_{-(j+1)}(q, z) \chi^{(j)}(z - t)$ ，证明了(3.8)。

(iii)首先，我们注意到 q' 验证了(P1)-(P3)。性质(P1)，(P2)是很明显的，(P3)是柯西不等式的结果。因此，用(3.7)求和公式代替 q' ，利用 χ' 的 h 周期，我们得到

$$\begin{aligned} \sum'(t) &= - \sum_{s,l} \text{res}(\chi_t q', z_{sl}) = \sum_{s,l} \text{res}(\chi_t q', z_{sl}) \\ &= \sum_{s,l,j} \frac{1}{j!} a_{-(j+1)}(q, z_{sl}) \chi^{(j+1)}(b_s + Ti/2 - t) \end{aligned}$$

现在，请注意 $\sum_{z \in S(q)} \text{res}(\chi_t q, z)$ 在用 χ + 常数替换 χ 时不会改变(见备注 3.1)，因此可以得出 $\sum_{z \in S(q)} \text{res}(\chi_t q, z) = 0$ 。因此，我们得到

$$\sum_{s,l} a_{-1}(q, z_{sl}) \chi'(Ti/2 + b_s - t) = \sum_{s,l} a_{-1}(q, z_{sl}) \Psi(t - b_s)$$

而且，对于所有的 $j > 1$ ， $\chi^{(j+1)}(b_s + Ti/2 - t) = (-1)^j \Psi^{(j)}(t - b_s)$ 。

最后, (iii)由前面的所有公式导出。

如果 q 在 \mathbb{C} 上是亚纯的, 则 \sum 为椭圆。而且, 在这种情况下, (3.8)中的和是有限的。因此, 从计算的角度来看, 这是一种有趣的情况, 因为 $\sum(t)$ 可以显式地计算出来。

引理 3.1 设 $\sum(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(t + hn)$ 那么 $\sum \equiv \text{常数}$ 当且仅当 \sum 没有奇点, 或者等价地, 对于所有的 s, j , 当且仅当 $d_{sj} = 0$ 。

证明 利用刘维尔定理, 从 Z 的双周期性出发, 我们推导出当且仅当所有奇点都是可去奇点(即主分量同为零)时 \sum 是常数。

\sum 的奇点集合为 $\{z_{sl} : s = 1, \dots, k\} + hZ + TiZ$ 。设 $z_* \in z_{sl} + hZ + TiZ$ 是 \sum 的任意奇点, 直接由 \sum 的定义可知, 在 z_* 中, 主分量是 q 的主分量除以 $\{z_{sl} : s = 1, \dots, k_s\}$ 集合上的点的和。因此, 当且仅当 $d_{sj} = 0$ 时, 对所有的 $s = 1, \dots, k$ 与 $j \geq 0$, \sum 的所有奇点都是可去除的。

3.3 这种假设是孤立奇点的

公式(3.7)-(3.9)给出了计算 Melnikov 函数的一种方法, 即(2.4)中的 g 函数或(2.7)中的 f 函数验证(P1)-(P3)函数。这里我们证明, 如果其中一些函数在 \mathbb{C} 上只有孤立奇点, 它自动验证(P1)-(P3)的 $T = 2\pi i$ 。因此, Melnikov 函数在 \mathbb{C} 上只有孤立奇点, 并且具有双周期 h 和 $2\pi i$ 。当然, 当 f 或 g 是亚纯函数时, Melnikov 函数是椭圆函数。

引理 3.2 设 $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ 为 F_0 验证(H)的解析微分同胚族。假设式(2.4)中定义的函数 g 分别定义在式(2.7)中的 f 在 \mathbb{C} 上只有孤立奇点, 则 $g(f, \text{分别})$ 在 $T = 2\pi$ 下验证(P1)-(P3)。

证明 这两种情况的证明是相同的。因此, 我们只证明了一种情况, 例如(P1)是显然。使用引理 2.1 的定义, 很明显, 在 \mathbb{R} 存在一个解析函数 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得为所有 $t \in \mathbb{R}$,

$f(t) = F(e^t)$ 。因此 f 在变量 $s = e^t$ 可以表示为一个幂级数, 如果 $|s|$ 足够小, 即 $-\Re t$ 足

够大。证明了对于足够大的 $-\Re t$, $f(t) = f(t + 2\pi i)$, 并通过解析延拓的一个参数,

证明了(P2)在 $T = 2\pi$ 时的情形。因此, 利用 $F(s) = f(t)$ 的关系, 可以将 F 推广到只有孤立奇点的函数。

利用 $\lim_{|y_t| \rightarrow \infty} \sigma(t) = P_0$ ，很容易从 f 的定义看出 $\lim_{|y_t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 。因此关系式

$F(s) = f(t)$ 表明 f 可以被认为是一个在黎曼球 $C_\infty = C \cup \{\infty\}$ 上只有孤立奇点的函数，在 $s=0$ 和 $s = \infty$ 处奇点消失。(我们注意到，如果 f 是亚纯函数，那么 f 是有理函数。) 为了完成(P3)的证明，我们只需要将中值定理在 $s=0$ 和 $s = \infty$ 处应用于 f ，同样由关系 $F(s) = f(t)$ 得到如下结果。

备注 3.3 如果问题中存在对称性， g 和 f 可以是 πi 周期的，因此 Melnikov 函数也会发生同样的情况。因此，在实际情况中，我们将使用 $T = 2\pi$ 或 $T = \pi$ 时的求和公式。

3.4 不可积准则

为了简化第四节和第五节示例中的计算，我们将计算由(2.6)和(2.7)给出的 Melnikov 函数 M ，如果 f 只有孤立奇点，或者等价地，当 f 满足(P1)-(P3)且 $T = 2\pi$ 或 $T = \pi$ 时。此外，给出了一个不可积判据。

设 $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon \in R}$ 是一个具有生成函数(2.5)的解析 a.p.m.族，其中 F_0 。此外，假设(2.7)中的函数 f 仅由引理 3.2 有孤立奇点， f 在 $T = 2\pi$ 或 $T = \pi$ 的情况下验证(P1)-(P3)。

设 $S(f) = \{z_{sl} : l = 1, \dots, k_s, s = 1, \dots, k\}$ 是 f 在 L_T 分类模 h 的复条形中的奇点，如 3.2 节所示。最后，设 $b_s \in C$ ，所有 s 和 l ，使得 $|\Im b_s| < T/2$ 和 $z_{sl} \in b_s + Ti/2 + hZ$ ，如命题 3.1 所示。

定理 3.1 (不可积准则)。有了这个表示法和假设，Melnikov 函数

$$M(t) = \sum_{s=1}^k \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{j!} d_{sj} \psi^{(j)}(t - b_s) \quad (3.10)$$

其中， d_{sj} 为不可积系数。

$$d_{sj} = \sum_{l=1}^{k_s} a_{-(j+1)}(f, z_{sl}) \quad d = 1, \dots, k \quad j \geq 0. \quad (3.11)$$

最后，如果某些不可积系数是非零的，对于 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ ， F_ε 是不可积的。

证明 第一部分根据求和公式(3.9)。不可积性遵循定理 2.1 和引理 3.1。

4. 摄动椭圆台球

4.1 转换台球

考虑凸台球桌问题[Bir27]: 设 C 是平面 R^2 的(解析)闭凸曲线，参数化为 $\gamma: T \rightarrow C$ ，其中 $T = R/2\pi Z$ 和 C 沿逆时针运动。假设一个质点在 C 内部运动，根据

入射角和反射角相等的定律与 C 相撞。在环隙 $A = \{(\varphi, v) \in T \times R : |v| < |\dot{\gamma}(\varphi)|\}$ 中, 坐标 φ 为 C 上的参数, $v = |\dot{\gamma}(\varphi)| \cos \vartheta, \vartheta \in (0, \pi)$ 为质点的入射角。通过这种方式, 我们获得了一个对台球建模的映射 $T: A \rightarrow A$ 参见图 2)。

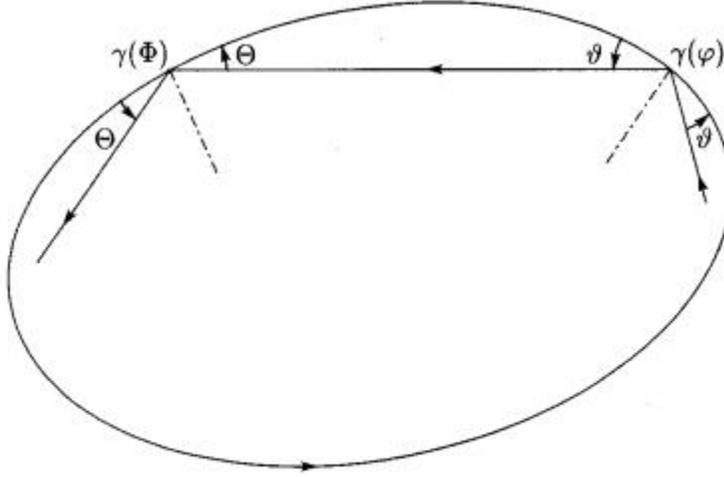


Figure 2. $T(\varphi, v) = (\Phi, V)$, where $v = |\dot{\gamma}(\varphi)| \cos \vartheta$ and $V = |\dot{\gamma}(\Phi)| \cos \Theta$.

函数 $S: \{(\varphi, \Phi) \in T^2 : \varphi \neq \Phi\} \rightarrow R$ 是由 $S: \{(\varphi, \Phi) = |\gamma(\varphi) - \gamma(\Phi)|\}$ 定义的一个生成 T 的函数:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi}(\varphi, \Phi) = \frac{\langle \gamma(\varphi) - \gamma(\Phi), \dot{\gamma}(\varphi) \rangle}{|\gamma(\varphi) - \gamma(\Phi)|} = -|\dot{\gamma}(\varphi)| \cos \vartheta = -v$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Phi}(\varphi, \Phi) = \frac{\langle \gamma(\Phi) - \gamma(\varphi), \dot{\gamma}(\Phi) \rangle}{|\gamma(\varphi) - \gamma(\Phi)|} = -|\dot{\gamma}(\Phi)| \cos \Theta = V$$

因此, T 是 a.p.m., (φ, v) 是标准共轭坐标。

这映射没有不动点, 但在几何上很清楚, 它有周期为 2 的周期轨道。在这些轨道上的入射角为 $\pi/2$, 因此 $v=0$ 。

现在假设 C 是关于一个点的对称(不失一般性, 我们可以假设这个点是原点, 见注释 4.2)。然后可以使用 C 的参数化 γ 满足 $\gamma(\varphi + \pi) = -\gamma(\varphi)$ 和 2-周期轨道的形成

$(\varphi_0, 0), ((\varphi_0 + \pi), 0)$, 也就是说, 两种截然相反的观点, 令 $R: A \rightarrow A$ 是退化的

$R(\varphi, v) = (\varphi + \pi, v)$, 然后 T 和 R 通勤和这是一个普遍使用这种对称 2-周期点转换成

固定的点。具体地说, 我们由 $F = R \circ T$ 定义一个新的映射 $F: A \rightarrow A$ 。因为 $F^2 = T^2$, F 的动力学和 T 是等价的。此外, F 是一个 a.p.m. 及其生成函数, 使用 $\gamma(\Phi + \pi) = -\gamma(\Phi)$

$$L(\varphi, \Phi) = S(\varphi, \Phi + \pi) = |\gamma(\varphi) + \gamma(\Phi)| \quad (4.1)$$

备注 4.1 在对称的情况下, 我们可以考虑定义为 π 模的变量 φ 。这个想法可以追溯到 [Tab93, Tab94]。

备注 4.2 设 C 和 C' 两条闭凸曲线, 其中一条是另一条的相似像。那么两个相关联的 a.p.m. 具有等效动力学, 因为它们的入射角因相似而保持不变。

4.2 椭圆台球

凸曲线最简单的例子是隐式曲线。显然, 对于弹子来说, 圆周的情况是非常退化的, 因为它只由 2 周期轨道组成。现在让我们考虑一个非圆型椭圆

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} = \{\gamma_0(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi) : \varphi \in T\}$$

$a^2 \neq b^2$ 。在不失一般性的前提下, 我们可以假设 $a^2 - b^2 = 1$ (如果需要, 我们使用相似度改变椭圆)。因此 $a > 1$, $b > 0$ 和椭圆的焦点 $(\pm 1, 0)$ 。

让我们回想一下, 一个刻薄的光滑曲线, 以下属性: 如果至少一段 (或其延伸) 多边形的点的轨迹曲线的切线, 那么所有其他部分 (或者他们的拖长某个) 曲线的切线。这是一个众所周知的事实, 椭圆弹子的所有轨道都有焦散性, 实际上焦散性只是 C_0 (小庞塞雷定理) 的共聚焦二次曲线族。[KT911]。

这一性质表明椭圆弹子的可积性, 因为散散子的存在反映了系统的一定稳定性。事实上。在假设 $a^2 - b^2 = 1$ 的情况下, 得到 (φ, v) 坐标系中椭圆球的第一积分的显式表达式并不困难。在 [LT93] 中, 以下第一个积分在 (φ, \mathcal{G}) 坐标中给出:

$$I(\varphi, \mathcal{G}) = a^2 \cos^2 \mathcal{G} + \cos^2 \varphi \sin^2 \mathcal{G} = a^2 \cos^2 \mathcal{G} - \cos^2 \varphi \cos^2 \mathcal{G} - \sin^2 \varphi + 1$$

而且, 利用 $a^2 - b^2 = 1$, 得到

$$v^2 = |\dot{\gamma}_0(\varphi)|^2 \cos^2 \mathcal{G} = a^2 \cos^2 \mathcal{G} - \cos^2 \varphi \cos^2 \mathcal{G}$$

积分 I 在 (φ, v) 坐标系中的积分变成 $I(\varphi, v) = v^2 - \sin^2 \varphi + 1$ 。在 [Lom94] 中可以用一种稍微不同的方式找到这个积分。因此, 曲线 $\{I = c\}_{0 < c < b^2 + 1}$ 对于 T_0 和 F_0 是不变的, 其

中 $T_0: A \rightarrow A$ 是 a.p.m. 解析, 与 C_0 和 $F_0 = R \circ T_0$ 有关。与小庞塞雷定理相联系, 其中一条不变曲线上点的焦散性为: 当 $0 < c < 1$ 时, 为共聚焦双曲线; 当 $1 < c < b^2 + 1$ 时, 为共聚焦椭圆。 $c = 1$ 时 $\text{foci}(\pm 1, 0)$ 。显然, foc 不是光滑的曲线, 但如果轨迹的某些部分通过一个焦点, 那么所有其他部分也会发生同样的情况。

点 $(0,0)$ 和 $(\pi,0)$ 构成 T_0 的 2 周期轨道, 该轨道对应于椭圆的顶点 $(\pm a, 0)$, 因此 $(0,0)$ 是 F_0 的不动点。

设 $R^*: A \rightarrow A$ 是 $R^*(\varphi, v) = (\pi - \varphi, v)$ 所给的对合, 那么 $F_0^{-1} = R^* \circ F_0 \circ R^*$, 那么 F_0 是可逆的。

F_0 的动态如图 3 所示, 其中与摆相图的相似之处清晰地显示出来。 F_0 的主要性质在下面的引理中列出。

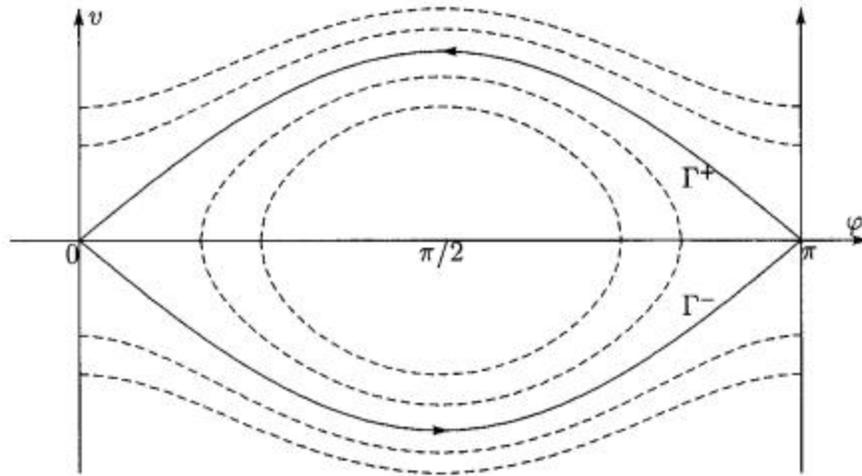


Figure 3. Phase portrait of F_0 ; Γ^\pm are the separatrices of F_0 .

引理 4.1 (i) $P_0=(0,0)$ 是 F_0 和 $\text{Spec}[DF_0(P_0)] = \{\lambda, \lambda^{-1}\}, \lambda = (a+1)(a-1)^{-1} > 1$ 的鞍点。此外, 如果 $h = \ln \lambda$, 下列表达式成立:

$$a = \coth(h/2) \quad b = \text{cosech}(h/2) \quad (4.2)$$

(ii) $\Gamma^\pm = \{(\varphi, \pm \sin \varphi) : 0 < \varphi < \pi\}$ 为 F_0 的分式。

(iii) 所关联的时间- h 哈密顿流

$$H(\varphi, v) = -\frac{1}{2}I(\varphi, v) = (\sin^2 \varphi - v^2 - 1)/2$$

在间隔上插值 F_0 。

(iv) 如果 $\sigma^\pm = (\varphi(\pm t), \pm v(t))$ ，其中 $\varphi(t) = \arccos(\tanh t) = \arcsin(\sec ht)$ 和 $v(t) = \sec ht$ ，则 Γ^\pm 的自然参数化为 σ^\pm (关于 F_0)。

(v) 令 $\Phi(t) = \varphi(t+h)$ ，则

$$b \frac{\sin \varphi(t) + \sin \Phi(t)}{|\gamma_0(\varphi(t)) - \gamma_0(\Phi(t))|} = \sec h(t+h/2) \quad (4.3)$$

证明

(i) 我们知道 P_0 是由 F_0 固定的。令

$$L_0(\varphi, \Phi) = |\gamma_0(\varphi) - \gamma_0(\Phi)| = 2a + [(a^2 - 1)\varphi\Phi - (a^2 + 1)\varphi^2 + \Phi^2]/2a + O_3(\varphi, \Phi)$$

的生成函数: $F_0 : (\varphi, v) \rightarrow (\Phi, V)$ ，我们使用 $a^2 - b^2 = 1$ 。由 L_0 生成的 F_0 隐式方程得到

$$\text{trace}[DF_0(P_0)] = \partial_1 \Phi(0,0) + \partial_2 V(0,0) = -[\partial_{11} L_0(0,0) + \partial_{22} L_0(0,0)] \partial_{12} L_0(0,0)$$

简单的微积分就能得到 $\text{trace}[DF_0(P_0)] = 2(a^2 + 1)/(a^2 - 1)$ 。此外， $\det[DF_0] \equiv 1$ 。因此

$\lambda = (a+1)(a-1)^{-1} > 1$ 是 $DF_0(P_0)$ 的一个特征值。由 $e^h = \lambda$ ，得到 $a = \coth(h/2)$ 和

$$b = \sqrt{a^2 - 1} = \text{sech}(h/2)。$$

(ii) 这是第一积分守恒的一个直接结果。

(iii) 使用引理 2.1 存在一个常数 θ ，使 $H = \theta I$ 能验证 (iii)。我们只需要验证 $\theta = -\frac{1}{2}$ 。设 $X_I = \mathcal{J}\nabla I$ 为 I 的哈密顿场，则

$$A = DX_I(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $|\theta| = \frac{1}{2}$ ，根据备注 2.2。最后，为了正确理解分色，确定符号，参见图 3。

(iv) 通过对称性就可以证明它为 Γ^+ 。我们注意到 σ^+ 是与 H 和 $\sigma^+(0) \in \Gamma^+$ 有关的哈密顿方程的一个解。因此 (iv) 是 (iii) 的直接结果。

(v) 令 $(\varphi, \sin \varphi) \in \Gamma^+$ 和 $(\Phi, \sin \Phi) = F_0(\varphi, \sin \varphi)$ 。点 $\gamma_0(\varphi), -\gamma_0(\Phi) = \gamma_0(\Phi - \pi)$ 是一致的, 因为 $(\Phi - \pi, \sin(\Phi - \pi)) = T_0(\varphi, \sin \varphi)$ 和焦点是 Γ^+ 中的点的焦散。此外, 向量 $\gamma_0(\varphi) + \gamma_0(\Phi)$ 和 $\gamma_0(\varphi) + (1, 0)$ 与相同(见图 4), 因此

$$\frac{\gamma_0(\varphi) + \gamma_0(\Phi)}{|\gamma_0(\varphi) + \gamma_0(\Phi)|} = \frac{\gamma_0(\varphi) + (1, 0)}{|\gamma_0(\varphi) + (1, 0)|} \quad (4.4)$$

由于 $\gamma_0(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, 利用式(4.2), 以及式(iv)中 $\varphi(t)$ 的表达式, 得到

$$\gamma_0(\varphi) + (1, 0) = \frac{1}{\sinh/2 \cosh t} (\sinh(t + h/2), 1)$$

因此

$$\frac{\gamma_0(\varphi) + (1, 0)}{|\gamma_0(\varphi) + (1, 0)|} = (\tanh(t + h/2), \operatorname{sech}(t + h/2))$$

现在, (4.4)的第二个分量给出(4.3)。

在这一阶段, 需要指出的是, 映射 F_0 验证(H), 并且我们有了关于 F_0 的分离块的自然参数的显式表达式, 从而完成了 Melnikov 函数的计算。利用第 2 节和第 3 节中开发的工具对不可积性进行深入的研究, 可以得到大量的扰动。由于 Γ^+ 和 Γ^- 之间的对称性, 我们将研究局限于 $\Gamma = \Gamma^+, \sigma(t) = \sigma^+(t) = (\varphi(t), v(t))$ 。

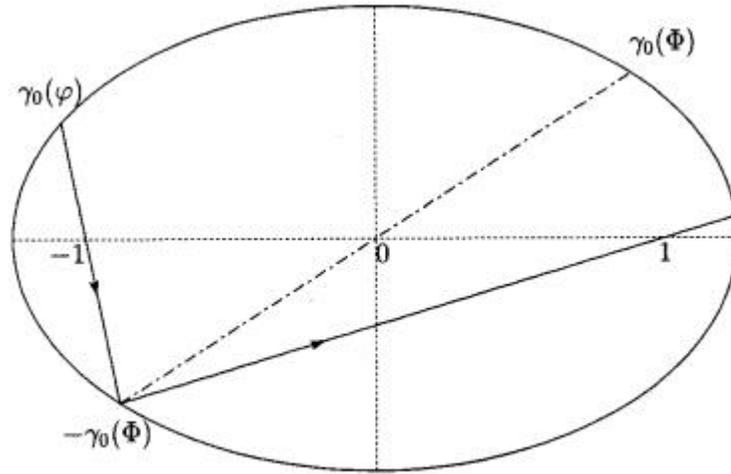


Figure 4. $(\varphi, \sin \varphi) \in \Gamma^+, (\Phi, \sin \Phi) = F_0(\varphi, \sin \varphi)$.

4.3 对称整体台球的不可积性

设 $\{C_\varepsilon\}$ 是椭圆 C_0 的任意扰动族, 由依赖于 ε 上的 C^2 路径的分析曲线和关于点 O_ε 的对称曲线组成。用 Q_0^\pm 表示 $Q_0^\pm = (\pm a, 0)$ 时 C_ε 上最远的两个(相对的)点。利用 O_ε 和 Q_0^\pm 分别对应于 $(0,0)$ 和 $(\pm a, 0)$ 的相似度, 初始族可以写成如下形式:

$$C'_\varepsilon = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon P(x, y, \varepsilon) = 1\} \quad (4.5)$$

其中

(I) P 在 x, y 上是解析的, 至少 C' 在 ε 上是解析的,

(II) $P(x, y, \varepsilon) = P(-x, -y, \varepsilon)$

(III) $P(a, 0, \varepsilon) = \partial_y P(a, 0, \varepsilon)$

或者说,

$$C'_\varepsilon = \{\gamma(\varphi, \varepsilon) = (a \cos \varphi, \sin \varphi [b + \varepsilon \eta(\varphi, \varepsilon)]) : \varphi \in T\} \quad (4.6)$$

其中

(i) η 在 φ 是解析的, C' 至少在 ε 是解析的,

(ii) η 在 φ 中是 π -周期的。

备注 4.3 当且仅当 η 在 φ 中是偶数时, 这种扰动保持系统的可逆性 R^* 。在这个特殊的例子中, C'_ε 有两个轴对称(由两个轴给出), Melnikov 函数是奇函数。这是迄今为止研究的标准案例[Tab93, Tab941]。

由(III)可得 $P(a \cos \varphi, b \sin \varphi, \varepsilon) = p(a \cos \varphi, b \sin \varphi, \varepsilon) \sin^2 \varphi$, p 也满足(I)(II)。很容易验证, 在 ε 的一阶, η 和 P 之间的关系是由 $P(a \cos \varphi, b \sin \varphi, 0) = -2b \eta(\varphi, 0) \sin^2 \varphi$ 给出的。因此, 如果 $P(\cdot, \cdot, 0)$ 是 x, y 变量中的一个完整函数(分别是一个多项式), $\eta_1 = \eta(\cdot, 0)$ 是一个完整函数(分别是一个三角多项式)。很明显, 如果 $\eta_1 = \text{常数}$, C'_ε 在一阶是椭圆族。

定义 4.1 设 $\{C_\varepsilon\}$ 是椭圆 C_0 的扰动。我们说 $\{C_\varepsilon\}$ 是一个非平凡的对称的整个(分别多项式)当它可以把椭圆的扰动, 利用相似之处, 在(4.6), 此外, $\eta_1 := \eta(\cdot)$ 是一个不恒定整个函数多项式(分别)。

设 T_ε 为与 C_ε 台球相关联的环空间映射, 其中考虑的扰动是对称的整个扰动, 令 $F_\varepsilon = R \circ T_\varepsilon$ 如果 ε 足够小, C_ε 是解析凸闭曲线, 则 $\{F_\varepsilon\}_{|\varepsilon| < 1}$ 是生成函数 $L(\varphi, \Phi, \varepsilon) = |\gamma(\varphi, \varepsilon) + \gamma(\Phi, \varepsilon)|$ 的解析 a.p.m. 族, 见式(4.1), 且

$$L_1(\varphi, \Phi) = \frac{\partial L}{\partial \varepsilon}(\varphi, \Phi, 0) = b \frac{\sin \varphi + \sin \Phi}{|\sin \varphi + \sin \Phi|} [\sin \varphi \eta_1(\varphi) + \sin \Phi \eta_1(\Phi)]$$

现在使用公式(4.3), 我们得到函数 f 在(2.7)中的表达式如下

$$f = v_{h/2}(\delta + \delta_h) \quad v = \operatorname{sech} h \quad \delta = v(\eta_1 \circ \varphi)$$

从现在起, 给定一个函数 v 和一个数字 x , U_x 代表这个函数 $v_x(t) = v(t+x)$ 。

由于 η_1 是一个 π 周期函数, 在 $C \setminus \{0\}$ 中存在一个解析的偶函数 ζ , 使得 $\eta_1(\varphi) = \zeta e^{i\varphi}$ 。此外, 利用引理 4.1, $e^{i\varphi(t)} = (i + \sinh t) \operatorname{sech} t$, 从而很容易得到函数 $\eta_1 \circ \varphi$ 的以下性质:

(i) 对于所有 η_1 全周期和 π -周期, 函数 $\eta_1 \circ \varphi$ 在 C 中只有孤立奇点, 奇点是集合 $\pi i / 2 + \pi i Z$ 的点, 因为只有在这些点 $e^{i\varphi(t)}$ 达到 0 和 ∞ 值

(ii) 当且仅当 $\eta_1 \circ \varphi$ (即 5) 是常数时, $\eta_1 \circ \varphi$ 的奇点是可移除的。

(iii) 此外, $\eta_1 \circ \varphi$ 对于这些奇点是对称的。

由(i), f 对任意对称全摄动只有孤立奇点, 可以进行不可积性研究。但是, 在开始这一研究和进一步研究之前, 很容易安排 $\sum_{n \in Z} f(t+hn)$ 和表达 Melnikov 势 L ,

$$L(t) = \sum_{n \in Z} q(t+hn), \text{ 其中}$$

$$q = [v_{h/2} + v_{-h/2}] \delta = (2a/b) v_{h/2} v_{-h/2} (\eta \circ \varphi) \quad (4.7)$$

(利用关系式(4.2)和双曲余弦的加法公式得到第二个等式。)

定理 4.1 设 $\{C_\varepsilon\}$ 是椭圆的任意非平凡对称扰动。那么 C_ε 中的台球对于 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 是不可积的。

证明 这就足以证明 F_ε 是不可积的，因为对称台球的动力学等价于 F_ε 的动力学。

由于 q 也满足(P1)-(P3)的性质，因此定理 3.1 可应用于 $L(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(t + hn)$ 。利用这个定理，就足以证明存在一些非零的不可积系数。从表达式(4.7)出发，利用 $\eta_1 \circ \varphi$ 的性质 (i)， q 在 $\Im t = \pi/2$ 时唯一可能的奇点是 $z_{11} := \pi i/2, z_{21} := z_{11} - h/2$ 和 $z_{22} := z_{11} + h/2$ 。特别地，我们注意到，对于所有整数 $n \neq 0$ ， q 在 $z_{11} + hn$ 中是解析的。因此，不可积系数与奇点 z_{11} 相关是 $d_{1j} = a_{-(j+1)}(q, z_{11}), j \geq 0$ 。

利用了 z_{11} 中 $v_{h/2}$ 和 $v_{-h/2}$ 是解析的，而不是零的性质。(i)的 $\eta_1 \circ \varphi$ ，证明 z_{11} 是 q 的不可移动奇点，因此不可积系数 d_{1j} ；不可能全部为零。

备注 4.4 同样的证明对点 $3\pi i/2$ 成立(而不是 $\pi i/2$)。整个函数在 η_1 上的假设仅用于保证对于 $t_p = \pi i/2$ 或 $t_p = 3\pi i/2$ ， $\eta_1 \circ \varphi$ 在 t 上有孤立奇点，而对于 $n \neq 0$ ，在 $t_p + hn$ 是解析的。

4.4 可逆的多项式的例子

4.1.1 一般情况下。为了执行 Melnikov 函数的显式计算，我们必须把自己限制在对称的偏态摄动中。此外[Tab93, Tab94]，我们将注意力集中在可逆扰动上。因此， η_1 是一个偶数(见备注 4.3)和 π -周期三角多项式，我们可以这样写 $\eta_1(\varphi) = \sum_{n=0}^N c_n \sin^{2n}(\varphi)$ ，现在，用 $v(t) = \sin(\varphi(t)) = \operatorname{sech}(t), \eta_1(\varphi) = \sum_{n=0}^N c_n \operatorname{sech}^{2n}(\varphi)$ 。

因此 $q = (2a/b)v_{h/2}v_{-h/2}\eta_1 \circ \varphi$ 是 πi 周期的(即 $T = \pi$)，并且在 L_π 上有三个极点。这些极点是 $z_{11} := \pi i/2$ ($2N$ 阶)和 $z_{21} := z_{11} - h/2, z_{22} := z_{11} + h/2$ (简单的)。

问题的不可积系数(3.11)，它可能不等于零，是

$$d_{1j} = a_{-(j+1)}(q, z_{11}) \quad (j = 0, \dots, 2N-1) \quad d_{20} = \operatorname{res}(q, z_{21}) + \operatorname{res}(q, z_{22}).$$

根据 $\eta_1 \circ \varphi$ 的性质(iii), 很容易验证 q 关于 $z_{11} = (z_{21} + z_{22})/2$ 对称, 因此对于奇数 j , $d_{1j} = 0, d_{20} = 0$ 。此外, 由于 v 对于 z_{11} 的对称性, 使得函数 $v_{h/2}$ 和 $v_{-h/2}$ 在 z_{11} 附近的泰勒展开式的偶系数相等。因此, 对于所有 j , $a_{-j}(v_{h/2}\delta, z_{11}) = a_{-j}(v_{-h/2}\delta, z_{11})$, 和

$$d_{1,2j-1} = 2a_{-2j}(v_{h/2}\delta, z_{11}) \quad j = 1, \dots, N$$

因此, 利用式(3.10)和式(3.11)可得到 Melnikov 函数

$$M(t) = -2 \sum_{j=1}^N \frac{a_{-2j}(v_{h/2}\delta, \pi i/2)}{(2j-1)!} \Psi^{(2j-1)}(t) \quad (4.8)$$

其中椭圆函数的参数已由 $T = \pi$ 的关系(3.1)确定, 见注 3.2。(关于椭圆函数的记号和 Ψ 的定义, 请参阅 3.1 小节。)由于 Ψ 的对称性, 我们注意到 $t=0$ 和 $t=h/2$ 都是 M 为 0。

这个公式允许我们用有限的步骤来计算 Melnikov 函数。。我们只需计算数字 $a_{-2j}(v_{h/2}\delta, \pi i/2)$, 在每个具体情况下。例如, 很容易计算 $a_{-2j}(v_{h/2}\delta, \pi i/2) = (-1)^N abc_N$ 。

4.4.2. 一个特定的情况。对于 $N = 1$, 公式(4.8)写为

$$M(t) = 2abc_1 \psi'(t) = -4abc_1 m \left(\frac{2K}{h}\right)^3 (dn \cdot sn \cdot cn) \left(\frac{2Kt}{h} \mid m\right)$$

这种特殊情况($\eta_1(\varphi) = c_0 \sin \varphi + c_1 \sin^3 \varphi$)已在[Lev93, Tab93, LT93, Tab94, Lom94]中研究过。它对应于椭圆的对称和可逆四次摄动(见定义的介绍)。M 在这种情况下只有两个(简单的)0 在 $[0, h)$: $t = 0, t = h/2$, 因此(见定理 2.1)存在两个同宿轨(横向)主要摄动台球和分束角附近的交点 $\sigma(0) = (\pi/2, 1)$, 使用公式 (2.10), 验证

$|\tan[\alpha(\varepsilon)]| = A(h)|\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$, 其中

$$A(h) = \frac{|M'(0)|}{\|\dot{\sigma}(0)\|^2} = |M'(0)| = 4ab|c|m \left(\frac{2K}{h}\right)^4$$

4.4.3 接近圆的椭圆:一种特殊情况。设 $\rho = \sqrt{a^2 - b^2} / a = 1/a = \tanh(h/2)$ 为椭圆的偏心率。如果椭圆接近圆(即 ρ 接近于零), 那么 h 也接近于零, 公式(3.5)在 $T = \pi$ 的情况下, 有

$$M(t) = -32\pi^3 abc_1 h^{-4} e^{-\pi^2/h} \left[\sin\left(\frac{2\pi t}{h}\right) + O(e^{-\pi^2/h}) \right] \quad (4.9)$$

$$A(h) = 64\pi^4 ab|c_1| h^{-4} e^{-\pi^2/h} [1 + O(e^{-\pi^2/h})]$$

结果可以用 ρ 代替 h 表示, 但为了简洁, 我们参考了著作[Tab93, LT93, Tab94]。

备注 4.5 值得一提的是, 我们必须假设, h 是固定的(虽然很小), $\varepsilon \rightarrow 0$ 。当这两个参数依赖于 $\varepsilon = \varepsilon(h) = h^p, p > 0, h \rightarrow 0$ 这样的势关系时, 就面临证明渐近“Melnikoy 预测” $|\tan[\alpha(\varepsilon)]| \sim h^p A(h)$ 的困难问题, 正如我们在介绍中已经提到的那样。

4.4.4 接近圆的椭圆: 一般情况。回到一般的 N , 我们给出渐近表达式(4.9)的推广, 即接近圆的椭圆。

由于 $\delta(t) = v(t)\eta_1(\varphi(t)) = \sum_{n=0}^N c_n \sec h^{2n+1}(t)$, 我们可以将 Melnikov 函数(4.8)改写成

$$M(t) = -2 \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^n [c_n B_{n,j}(t, h) / (2j-1)!] \quad (4.10)$$

其中 $B_{n,j}(t, h) = a_{-2j}(v_{h/2} \sec h^{2n+1}, z_{11}) \Psi^{(2j-1)}(t)$ 。为了得到(4.10)的主项, 我们必须研究对于 $j=1, \dots, n$, 且 $n=1, \dots, N$, $B_{n,j}(t, h)$ 的阶数。

首先, 我们将函数 $v_{h/2}$ 分解为主 $v_{h/2}^p$ 和正则 $v_{h/2}^\Gamma (= v_{h/2} - v_{h/2}^p)$ 的奇异部分 $z_{22} = z_{11} - h/2$ 。 $v_{h/2}^p = -i(t - z_{22})^{-1}$ 。由柯西不等式可知, $v_{h/2}^\Gamma$ 围绕 z_{11} 展开的泰勒展开式的系数为 $O(1)$, 因为 $v_{h/2}^\Gamma$ 均匀地(当 h 很小时)被限定在一个半径为 z_{11} 的球中。因此

$$a_l(v_{h/2}, z_{11}) = a_l(v_{h/2}^p, z_{11}) + a_l(v_{h/2}^\Gamma, z_{11}) = (-h/2)^{l+1} + O(1) \quad \forall l \geq 1$$

此外, z_{11} 附近 $\sec h^{2n+1}$ 的主成分为 $O(1)$, 特别是 $a_{-(2n+1)}(\sec h^{2n+1}, z_{11}) = (-1)^{n+1} i$ 。最后, 我们使用渐近表达式(3.6), 考虑到 $T = \pi$, 我们推出

$$\begin{aligned} B_{n,j}(t, h) &= \Psi^{(2j-1)}(t) \sum_{l=0}^{n-j} a_{2l+1}(v_{h/2}, z_{11}) a_{-(2j+1)}(\sec h^{2n+1}, z_{11}) \\ &= (-1)^{n+j} 2^{2n+4} \pi^{2j+1} h^{-(2n+3)} e^{-\pi^2/h} [\sin(2\pi/h) + O(h^2)] \end{aligned}$$

因此, 当 $n = N$ 时, (4.10)的主导项就得到了, 我们要找的一般渐近表达式是

$$M(t) = (-1)^{N+1} 2^{2N+5} c_N \left\{ \sum_{j=1}^N [(-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j-1)!}] \right\} h^{-(2N+3)} e^{-\pi^2/h} e^{-\pi^2/h}$$

$$A(h) = |M'(0)| = 2^{2N+6} |c_N| \left| \sum_{j=1}^N [(-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j-1)!}] \right| h^{-(2N+3)} e^{-\pi^2/h} e^{-\pi^2/h}$$

我们注意到 $\sum_{j=0}^N [(-1)^j \pi^{2j+1} / (2j-1)!]$ 绝不为零 (π 是一个超越数), 因此 M 在周期 $[0, h)$ 中恰好有两个零: $T=0$ 和 $T=h/2$ 。如果足够小的话。因此, 对于 $0 < h \ll 1$ 。恰好有两个(横向)主同宿轨道。而且, 分裂角 $\alpha(\varepsilon)$ 允许 h 很小但固定时, $|\tan[\alpha(\varepsilon)]| = A(h)|\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$ 的渐近逼近。备注 4.5 在本例中也适用。

5 标准映射

5.1 具有分隔的可积标准映射

对于函数 g , 如果平面映射具有 $F(x, y) = (y, -x + g(y))$ 的形式, 则称为标准映射。

如果 g 是奇函数, 则 F 是 R -可逆的, 其中 R 是 $R(x, y) = (y, x)$ 的复合。当 g 是 R 上的解析时, F 是解析 a.p.m., 其生成函数为

$$L(x, X) = -xX + \int^X g(s) ds \quad (5.1)$$

如果 g 是完整的, F 也一样, 因此它没有独立的元素[Laz88]。在[Sur891]中, Suris 弱化了 g 的正则性, 给出了三组可积的类标准映射。这三个族的第一积分分别是, 四次多项式在 x 和 y 中的函数, 含有指数项的函数和含有三角项的函数。为了简洁起见, 我们将注意力集中在第一种情况上, 但我们可以对其他两种情况进行完全相同的研究。

很容易看到, 经过重新缩放、归一化等处理后, 所有带有一个分隔线到原点的多项式族的映射都可以写出来

$$L(x, X) = (y, -x + 2y \frac{\mu + \beta y}{1 - 2\beta y + y^2}) \quad -1 < \beta < 1 < \mu \quad (5.2)$$

Suris 给出的对应的第一个积分是

$$I(x, y) = \frac{1}{2} [x^2 - 2\mu xy + y^2 - 2\beta xy(x + y) + x^2 y^2]$$

$\beta = 0$ 的映射(5.2)称为 McMillan 映射, 在[GPB89]中研究了线性扰动下的映射。

图(5.2)有两个独立的部分 $\Gamma^\pm = \Gamma_\mu^\pm$, β 包含在能级中 $\{I=0\}$, 如图 5 所示。

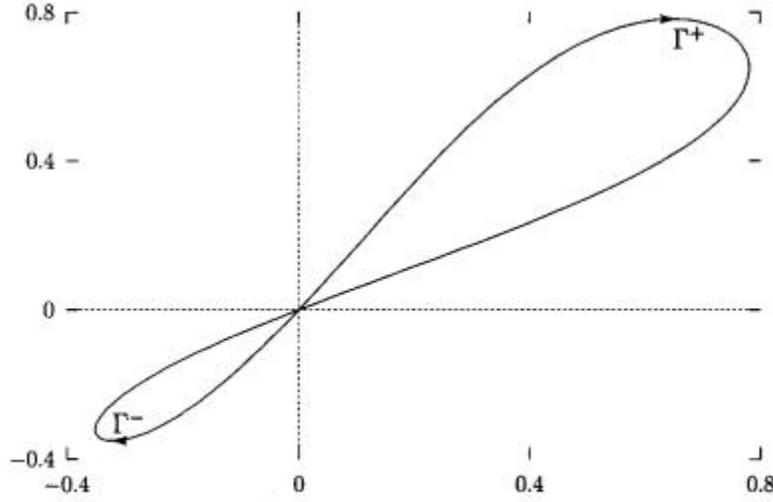


Figure 5. The separatrices Γ^\pm of F_0 for $\beta = 0.1$ and $\mu = \cosh(0.5)$.

$P_0=(0,0)$, $DF_0(P_0)$ 大于 1 的特征值为 $\lambda = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$, 所以和往常一样, 如果 $h = \ln \lambda$, $h = \mu$ 。使用引理 2.1, 存在一个常数, 使得与 $H = \theta I$ 相关的时间- H 哈密顿流在分离点上插值映射。设 $X_I = \mathcal{J}VI$ 是与 I 相关的哈密顿场; 然后

$$A = DX_I(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \quad B = DF_0(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix}$$

因此关系式 $A = e^{\theta B}$ 得 $\theta = (\mu^2 - 1)^{1/2}$ (见备注 2.2)。因此, 我们要用的第一个积分是

$$H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}} [x^2 - 2\mu xy + y^2 - 2\beta xy(x + y) + x^2 y^2]$$

现在, 求解与 H 有关的哈密顿方程 $\{H=0\}$, 我们得到了分离 Γ^\pm 的自然参数化

$$\Gamma^\pm = \{\sigma^\pm(t) = (x^\pm(t-h), x^\pm(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

其中

$$\begin{aligned} x^\pm(t) &= \frac{\pm c}{\Delta \cosh t \mp b} \quad a = \beta^2 - 1 \quad b = \beta(\mu + 1) \\ c &= \mu^2 - 1 \quad \Delta = \sqrt{b^2 - ac} \end{aligned} \quad (5.3)$$

我们注意到 $\Gamma_{\mu,\beta}^- = -\Gamma_{\mu,-\beta}^+$ (特别地, $\beta = 0$ 的情况从此是对称的 $\Gamma^- = -\Gamma^+$), 所以我们只研究 $\Gamma = \Gamma^+, \sigma = \sigma^+$ 和 $x = x^+$ 。

在这种情况下, (2.4)中的函数 g 对于所有整个(分别为矢量多项式)摄动 F_I 只有孤立奇点(分别为亚纯函数)。因此, 对于 $F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2)$ 一类具有 x 和 y 上矢量多项式 F_I 的解析微分态, 可以显式计算 Melnikov 函数。另外, 如果 F_ε 是一个 a.p.m., F_1 是一个完整的函数, 那么可以直接应用定理 3.1 来研究不可积性。

我们现在考虑标准类映射族

$$F_\varepsilon(x, y) = (y, -x + 2y \frac{\mu + \beta y}{1 - 2\beta y + y^2} + \varepsilon p(y)) \quad -1 < \beta < 1 < \mu \quad \varepsilon \in R \quad (5.4)$$

δ 是 p 的初始点, 即 $\delta(0) = 0$ 。利用式(5.1), F_ε 的生成函数 $L(x, X, \varepsilon)$ 具有 $L(x, X) = \delta(X)$ 的形式(2.5)。因此 $f(t) = L_1(x(t-h), x(t)) = \delta(x(t))$ 对任何整个函数只有孤立奇点 δ 。因此 $\{F_\varepsilon\}$ 验证定理 3.1 假设, 如果 p 是一个完整的函数。这使我们能够证明下面的结果。

定理 5.1 如果 p 是一个非恒等于零的完整函数, 则映射(5.4)是不可积的对于 $0 < |\varepsilon| \ll 1$ 。

证明 可以充分看出, 问题的不可积系数不可能都是零。

$L_{2\pi}$ 中 x 的极点是 it_p^\pm , 其中 $t_p^- \in (0, \pi)$ 和 $t_p^+ \in (\pi, 2\pi)$ 由 $it_p^\pm = b/\Delta \in (-1, 1)$ 决定。由于 $f = \delta \circ x$ 和 δ 是一个完整的函数, 它恰好是 f 在 $L_{2\pi}$ 中的奇点。因此, 没有不同的奇点其差是 h 的倍数(实际上是一个实数), 因此在(3.11)中的每一个和只有一项。因此, 不可积系数(3.11)都是零当且仅当 f 是 $L_{2\pi}$ 上解析的, 或者等价地(使用 f 的 2π 周期性), 当且仅当 f 是一个完整的函数。但是 f 不能是一个完整的函数, 因为 δ 是一个非常数的完整函数。这样证明就完成了。

备注 5.1 为了应用不可积准则，我们只需要 $f = \delta \circ x$ 在 C 中只有孤立奇点。因此， δ 不是绝对必要是一个完整的函数，尽管它是最简单的情况来研究，因为奇点很容易找到。

5.3 例子

5.3.1 可逆多项式标准摄动。为了说明显式计算的简单性，我们将注意力集中在 \mathbf{R} -可逆和多项式标准样摄动上。由于可逆性， $\beta = 0$ ， p 是奇数，这些映射在第一象限的平分线上有一个主同宿点。我们给出了这一点的分裂角的表达式

由于摄动是多项式奇的，我们写 $p(y) = \sum_{n=1}^N c_n y^{2n-1}$ ，所以 $\delta(y) = \sum_{n=1}^N c_n y^{2n} / 2n$ 。

利用(5.3)中的 $\beta = 0$ ，我们得到 $x(t) = \sinh(h) \operatorname{sce}h(t)$ 。因此 $f = \delta(x(t))$ 是 πi -周期的(即 $T = \pi$)，并且在 L_π 中只有一个极点 $z_{11} = \pi i / 2$ ($2N$ 阶)。而且，对于奇数 $j, a_{-j}(f, \pi i / 2)$ ，因为 f 是关于 $\pi i / 2$ 对称的。现在公式(3.10)和(3.11)给出 Melnikov 函数

$$M(t) = -\sum_{j=1}^N \frac{a_{-2j}(f, \pi i / 2)}{(2j-1)!} \Psi^{(2j-1)}(t) \quad (5.5)$$

其中椭圆函数的参数由(3.1)与 $T = \pi$ 的关系确定，见注 3.2。我们注意到 $t=0$ 和 $t=h/2$ 都是 M 的 0，这是由于 Ψ 的对称性，这个公式允许在有限的步骤中计算 Melnikov 函数。我们只需要计算数字 $a_{-2j}(f, \pi i / 2), j = 1, \dots, N$ 的每一个具体的情况。例如，很容易计算 $a_{-2N}(f, \pi i / 2) = (-1)^N c_N \sinh^{2N}(h) / 2N$ ，特别对 $p(y)=y$ ($N=1, c_1=1$) 有

$$M(t) = \frac{\sinh^2 h}{2} \psi'(t) = -\left(\frac{2K}{h}\right)^3 m \sinh^2 h (dn \cdot sn \cdot cn) \left(\frac{2Kt}{h} \mid m\right)$$

这一特殊情况已在[GPB89]中进行了研究。我们的结果与这里给出的结果一致，除了乘法因子(由于使用的第一个积分之间的差异)和符号(由于在自然参数化中使用的不同意义)。因为 M 是奇数)。在这种情况下， M 在周期 $[0, h]$ 中只有两个(简单的)零： $t=0$ 和 $t=h/2$ 。因此，当 $\beta = 0$ ， $p(y)=y$ 时，映射(5.4)恰好存在两条横向主同宿轨道，如果 $|\varepsilon|$ 不为 0 但足够小。零 $t=h/2$ 与第一象限平分线上 $\sigma(h/2)$ 附近的同宿点和(2.10)有关。这一点的分裂角 $\alpha(\varepsilon)$ 验证了 $|\tan[\alpha(\varepsilon)]| = A(h)|\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$ ，其中

$$A(h) = \frac{|M'(h/2)|}{\|\dot{\sigma}(h/2)\|} = \left(\frac{2K}{h}\right)^4 \frac{\cosh^4(h/2)}{s \sinh^2(h/2)} m(1-m)$$

5.3.2 Meakty 夸张的例子。当原点为无扰动映射的弱双曲不动点时(即当 $0 < |h| \ll 1$ 时), 对 $T = \pi$ 应用式(3.5)

$$M(t) = -8\pi^3 h^{-3} \sinh^2 e^{-\pi^2/h} [\sin(\frac{2\pi t}{h}) + O(e^{-\pi^2/h})]$$

$$A(h) = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^4 \frac{\cosh^4(h/2)}{\sinh^2(h/2)} e^{-\pi^2/h} [1 + e^{-\pi^2/h}]$$

回到一般的 N , 我们可以给出以前的渐近表达式的推广。由于 $x(t) = \sinh(h) \sec h(t)$, 所以 $x^{2n}(t)$ 在 $\pi/2$ 附近的主项是 $O(h^{2n})$, 特别是 $a_{-2n}(x^{2n}, \pi/2) = (-1)^n \sinh^{2n}(h)$ 。由这些结果和(3.6)式在 $T = \pi$ 时应用, 很容易得到 Melnikov 函数的主导项(5.5)。一般的渐近表达式为

$$M(t) = -2 \left[\sum_{n=1}^N \frac{c_n (2\pi)^{2n+1}}{(2n)!} \right] h^{-1} e^{-\pi^2/h} [\sin(\frac{2\pi t}{h}) + O(e^{-\pi^2/h})]$$

$$A(h) = \frac{|M'(h/2)|}{\|\dot{\sigma}(h/2)\|^2} = 4 \left| \sum_{n=1}^N \frac{c_n (2\pi)^{2n+1}}{(2n)!} \right| h^{-6} e^{-\pi^2/h} [1 + O(h^2)]$$

后两个公式的误差 $O(h^{2n})$ 均大于前一个公式的误差 $O(e^{-\pi^2/h})$ 。然而, 在任何情况下都有可能得到具有指数级小误差的公式, 但如果 N 很大, 则需要进行繁琐的计算。例如, 当 $p(y) = y^3$ 时, 推导 $A(h)$ 的公式并不困难:

$$A(h) = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^4 [1 + \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2] \frac{\sinh^2(h) \cosh^4(h/2)}{6 \sinh^2(h/2)} e^{-\pi^2/h} [1 + e^{-\pi^2/h}]$$

就像在台球中, 讨论或评论 4.5 仍然有效,

5.3.3. 一个耗散的例子。我们已经见过几个例子, Melnikov 函数在 $h = \ln \lambda$ 时指数小, 当 $h \rightarrow 0$ 。这是保留摄动的典型现象, 但如果保守性质被摄动所破坏, 那么这种现象, 一般来说, 是不会发生的。作为本索赔的样本, 我们选择以下案例(研究在[GPB89]中):

$$F_\varepsilon(x, y) = (y, -x + \frac{2\mu y}{1+y^2} + \varepsilon x) \quad \mu > 1 \quad (5.6)$$

(5.6)的雅可比矩阵是 $J(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$ ，因此(5.6)对于 $\varepsilon > 0$ 是耗散的，我们不能期望找到它的生成函数。尽管如此，利用式(2.3)和式(2.4)仍然可以对 Melnikov 函数进行显式计算，我们得到

$$M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t + hn) \quad g(t) = \dot{x}(t)(t - h) \quad x(t) = \sinh(h) \sec h(t)$$

首先，我们注意到 g 是 πi -周期的(即 $T = \pi$)，并且研究了 g 在 L_π 中的复奇点是 $\pi i/2$ (双极)和 $h + \pi i/2$ (单极)

$$a_{-1}(g, h + \pi i/2 - t) = -a_{-1}(g, \pi i/2) \cosh h \quad a_{-2}(g, \pi i/2) - \sinh h$$

现在，利用 $T = \pi$ 的式(3.3)和求和公式(3.8)，得到 Melnikov 函数

$$M(t) = -\cosh h [\chi(h + \pi i/2 - t) - \chi(\pi i/2 - t)] + \sinh h \chi'(\pi i/2 - t) \\ = \left(\frac{2Kt}{h}\right)^2 \sinh h dn^2\left(\frac{2Kt}{h}\right) - 2 \cosh h + \frac{2 \sinh h}{h} \left(1 - \frac{2KE}{h}\right)$$

这一结果与[GPB89]中给出的结果一致，除了前面提到的乘数因子和参考文献中最终公式(B.12)中的一个小错误。符号是相同的，因为 M 是偶数。

当 h 足够小时， M 没有实零，因此对于固定的小 h 和足够小的 ε ，摄动不变曲线不相交。

我们把 M 分为均值部分和振荡部分： $M(t) = M_{mean} + M_{oscill}(t)$ 很容易得到它们的表达式：

$$M_{mean} = h^{-1} \int_0^h M(t) dt = 2 \left(\frac{\sinh h}{h} - \cosh h \right) \\ M_{oscill} = M(t) - M_{mean} = \left(\frac{2K}{h}\right)^2 \sinh h \left[dn^2\left(\frac{2Kt}{h}\right) - \frac{E}{K} \right]$$

不难证明 M_{oscill} 在 h 中呈指数小，而 M_{mean} 不是，因此我们给出了 Melnikov 函数在 h 中不呈指数小的例子。

备注 5.2 事实上，在通常的亚象性假设下， h 的振荡部分总是指数小的。在 a.m. p. 的情况下 Melnikov 函数也同样如此，从那时起，它的均值是零。

致谢

Amadeu Delshams 的研究得到了 EC 拨款 ER-BCHRXCT 940460、西班牙拨款 DGICYT PB94-0215 和加泰罗尼亚拨款 CIRIT GRO93-1135 的部分支持。Rafael Ramirez-Ros 的研究由 UPC 拨款 PR9409 资助。作者们感谢 V Gelfreich, A Neishtadt, C Simo 和 D Treschev 进行了非常有用的讨论、评论和评论。

参考文献

- [Arn64]Arnold V I 1964 Instability of dynamical systems with several degrees of freedom *Sov. Math. Dokl.* 5 581-5
- [AS72]Abramowitz M and Stegun I 1972 *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover)
- [Bir27]Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence, RI: AMS Publications)
- [Cus78]Cushman R 1978 Examples of non-integrable analytic Hamiltonian vectorfields with no small divisors *Trans. Am. Math. Soc.* 238 45-55
- [DS92]Delshams A and Seara T M 1992 An asymptotic expression for the splitting of separatrices of the rapidly forced pendulum *Commun. Math. Phys.* 150 433-63
- [DR95]Delshams A and Ramírez-Ros R 1995 Melnikov methods and exponentially small splitting of separatrices for planar maps: A experimental study Preprint
- [Eas84]Easton R W 1984 Computing the dependence on a parameter of a family of unstable manifolds: generalized Melnikov formulas *Nonlinear Anal. Theor., Method. Appl.* 8 1-4
- [FS90]Fontich E and Simó C 1990 The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms *Ergod. Theor. Dynam. Syst.* 10 295-318
- [Gam85]Gambaudo J M 1985 Perturbation of a Hopf bifurcation by an external time-periodic forcing *J. Diff. Eq.* 57 172-99
- [Gam87]Gambaudo J M 1987 Perturbation de l'application temps tau' d'un champ de vecteurs integrable de R^2 *C. R. Acad. Sci. Paris* 297 245-8
- [GH83]Guckenheimer J and Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields (Applied Mathematical Sciences 42)* (Berlin: Springer)
- [GLT91]Gelfreich V G, Lazutkin V F and Tabanov M B 1991 Exponentially small splittings in Hamiltonian systems *Chaos* 1 137-42
- [GLS94]Gelfreich V G, Lazutkin V F and Svanidze N V 1994 A refined formula for the separatrix splitting for the standard map *Physica* 71D 82-101
- [GPB89]Glasser M L, Papageorgiou V G and Bountis T C 1989 Melnikov's function for two-dimensional mappings *SIAM J. Appl. Math.* 49 692-703
- [KT91]Kozlov V V and Treshchev D V 1991 *Billiards: a genetic introduction to the dynamics of systems with impacts (Trans. Math. Mon. 89)* (Providence, RI: AMS Publications)
- [Laz88]Lazutkin V F 1988 Splitting of complex separatrices *Func. Anal. Appl.* 22 154-6
- [Lev93]Levallois P 1993 Non-integrabilité des billiards definis par certaines perturbations algébriques d'une ellipse et du flot géodésique de certaines perturbations algébriques d'un ellipsoide PhD thesis Univ. Paris VII
- [Lom94]Lomelí H E 1994 Transversal heteroclinic orbits for perturbed billiards Preprint University of Minnesota

- [LT93]Levallois P and Tabanov M B 1993 Séparation des séparatrices du billiard elliptique pour une perturbation algébrique et symétrique de l'ellipse C. R. Acad. Sci. Paris 316 589-92
- [McM71]McMillan E M 1971 A problem in the stability of periodic systems Topics in Modern Physics(Colorado Association University Press) pp 219-44
- [Mel63]Melnikov V K 1963 On the stability of the center for time periodic perturbations Trans. Moscow Math. Soc. 12 3-56
- [Mos56]Moser J 1956 The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point Commun. Pure Appl. Math. 9 673-92
- [Poi99]Poincaré H 1892-1899 Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste vol 1, 2, 3 (Paris: Gauthier-Villars)
- [Sur89]Suris Yu B 1989 Integrable mappings of the standard type Funct. Anal. Appl. 23 74-6
- [Tab93]Tabanov M B 1993 Splitting of separatrices for Birkhoff's billiard under some symmetrical perturbation of an ellipse Prépublications Math. de l'U. R. A. 212 p 65
- [Tab94]Tabanov M B 1994 Separatrices splitting for Birkhoff's billiard in symmetric convex domain, closed to an ellipse Chaos 4 595-606
- [Wig90]Wiggins S 1990 Global bifurcations and chaos: Analytical methods Applied Mathematical Sciences vol 73 (Berlin: Springer)
- [Zig82]Ziglin S L 1982 Splitting of separatrices, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a solid body Trans. Moscow Math. Soc. 41 282-98