

盆地稳定性如何补充线性稳定性范式

Peter J. Menck^{1,2*}, Jobst Heitzig¹, Norbert Marwan¹ and Jürgen Kurths^{1,2,3}

¹ 跨学科概念和方法, 波茨坦气候影响研究所 601203, 14412, 波茨坦, 德国

² 柏林洪堡大学物理系, 纽顿斯特拉 15, 12489 柏林, 德国

³ 英国阿伯丁大学复杂系统与数学生物学研究所, AB24 3UE 阿伯丁, 英国

*电子邮件: menck@pik-potsdam.de.

人脑¹⁻²、电网³、耦合激光器⁴阵列和亚马逊雨林^{5,6}都具有多重稳定性的特点⁷。这些系统保持在许多稳定状态中最理想状态的可能性取决于它们对显著扰动的稳定性,特别是在由不理想状态填充的状态空间中。在这里,我们声称传统的基于线性化的稳定性方法过于局部,无法充分评估状态的稳定性。取而代之的是,我们将其量化为盆地稳定性,这是一种与吸引盆地体积相关的新测量方法。盆地稳定性是非局部的、非线性的、易于应用的,甚至对高维系统也是如此。它为神经网络和电网令人惊讶的规则拓扑结构提供了一个长期以来广受追捧的解释⁸⁻¹⁰,而这些拓扑结构仅仅是基于线性稳定性的理论描述¹¹⁻¹³。我们预计盆地稳定性将为复杂系统研究提供一个强有力的工具,包括多稳态气候要素的评估¹⁴。

复杂系统科学在很大程度上依赖于线性稳定性分析,在线性稳定性分析中,动态系统的状态(更准确地说,它的动态状态)基本上是通过检查状态环境中势能函数的优势曲率来评估的(用李雅普诺夫指数表示)。曲率的绝对值度量了小扰动后收敛或发散的速度,其符号表示状态稳定或不稳定。这种基于线性化的考虑本质上是局部的;因此,它们不足以量化一个状态在非小扰动下的稳定性。从这个意义上说,

稳定性的量化需要一个全局概念：一个状态的吸引域 B 是状态空间中的一组初始点，从这些初始点开始系统收敛到这种状态。对盆地的全面了解将使我们能够充分评估国家的稳定性：人们可以将扰动分为允许扰动和不允许扰动。见图 1。

然而，盆地是一个复杂的整体¹⁵，特别是在高维度上很难勘探。因此，这里我们关注一个单一但基本的属性：盆地体积。参考文献¹⁶的作者将一个州吸引盆地的体积解释为到达该州的可能性的度量，也就是说，作为该州相关性的度量。几乎等价地，我们把盆地的体积理解为在任何随机的、可能的、非小的扰动之后恢复到状态的可能性的表达式。这产生了第二种解释：盆地的体积量化了一个状态的稳定性。据我们所知，这种解释还没有在复杂系统科学中得到应用。我们将基于盆地体积的稳定性量化称为盆地稳定性 s_B 。

对于气候倾翻元件¹⁴，了解理想（即当前）状态对扰动的稳定性尤其有用。亚马逊雨林就是其中一个倾覆元素，它大概有两个稳定的状态：目前肥沃的森林状态和贫瘠的草原状态^{5,6}。过渡期将释放大量二氧化碳，这些二氧化碳被捕获到丰富的植被中。亚马逊双稳态产生于一个积极的反馈：深生根树吸收土壤中的水，并将其传递到大气中。因此，一个地区的森林覆盖增加了总降水量，改善了其自身的生长条件。因此，如果森林覆盖超过某一临界阈值，相当干旱的地区（即降水流入较弱的地区）仍有可能支持森林生长；如果森林覆盖率低于这个门槛，该地区将失去所有的树木。

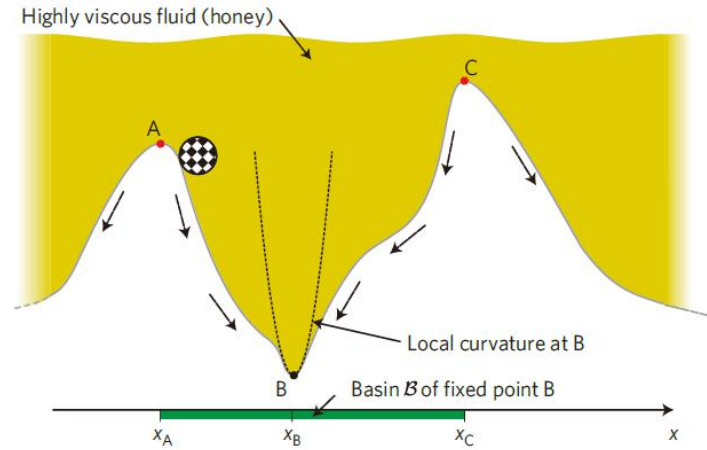


图 1 思维实验：大理石轨道上的大理石。将轨道浸入高粘性流体中，使系统的状态空间为一维。虚线箭头指示大理石从每个位置滚动的位置。A、B 和 C 标记固定点。只有 B 是稳定的。绿色酒吧。表示 B 的吸引池 B。如果大理岩从 B 扰动到盆地内的 a 状态，它将返回 B。这种扰动是允许的。对盆地外的状态的扰动是不允许的。虚线抛物线显示了 B 周围的局部曲率，与盆地大部分地区的真实大理石轨迹很不吻合。

这在概念模型中进行了总结（见补充信息），

$$\frac{dC}{dt} = F(C) = \begin{cases} r(1-C)C - xC & \text{if } C > C_{\text{crit}} \\ -xC & \text{if } C < C_{\text{crit}} \end{cases}$$

这里， C 是相对森林覆盖率，如果 $C > C_{\text{crit}}$ ，则随着饱和率 r 增长，随着饱和率 x 死亡（假设 $r > x > 0$ ）。 C_{crit} 是临界森林覆盖阈值。该模型有两个平衡点，森林状态 $C_F = 1 - x/r$ 和热带稀树草原州 $C_S = 0$ 。平衡 C_F （分别为 C_S ）存在，当 $C_F > C_{\text{crit}}$ （分别为 $C_{\text{crit}} > 0$ ）时是稳定的。假设 C_{crit} 随干旱度 A 线性增加，我们得到图 2 所示的状态图。

全球变暖可能会加剧干旱，最终导致干旱在森林状态消失的分岔点 A_{crit} 之外。随着干旱度的增加， C_F 状态吸引盆的体积缩小，这表明森林状态在受到扰动时变得不太稳定 A_{crit} 。事实上，由于盆地稳定性的降低，一个大的扰动，比如强烈的森林砍伐，可能会在干旱达到顶点之前很久把这个系统推到稀树草原状态。关键是，没有这一点通过

线性稳定性来反映，线性稳定性仅通过稳定性系数 $F'(C_F)=x-r$ 来判断森林状态 C_F 随着干旱度的增加，保持不变。

这意味着，首先，没有临界减速。事实上，线性预警信号¹⁷在这种具有强非线性的系统中是不存在的。其次，由于它们的高度局部性，线性稳定性和小扰动收敛速度并不能说明 C_F 对非小扰动的稳定性扰动。它们是不可靠的代理，与先前的观察^{17、18}相矛盾。

请注意，这两种效应也可能出现在简单的机械系统，如阻尼驱动（见补充资料）。显然，需要全局稳定概念。

这样的全局稳定性概念可以包含势能函数：较深的谷将对应更稳定的状态（图1）。然而，许多相关（耗散）系统可能无法获得能量函数。此外，盆地边界上的能级估计在高维上的数值代价很高。有人提出了另一种方法，即根据吸引盆地在特定方向的宽度^{19,20}对稳定性（或恢复力，在最初的术语中）进行全局量化。这一概念激发了对复杂社会生态系统的大量研究。然而，它所暗示的稳定性度量“即使在模型中也不那么容易量化”¹⁸。一个原因是，在具有许多状态变量的系统中，不可能确定一个最相关的方向来测量盆地的宽度。我们的盆地稳定性提供了两个重要的改进：首先，它遵循基于体积的概率模型与扰动强度和方向的自然不确定性相容的方法；其次，它提供了一种稳定性的度量，这种度量即使在高维系统中也很容易定义和量化（见方法）。

盆地稳定性对高维系统的适用性使我们能够解决长期困扰复杂网络科学的难题。这一领域的研究人员努力了解网络的拓扑结构为其

功能和健壮性服务^{21,22}。在多稳态动态网络中，同步状态与交替的非同步或部分同步状态竞争^{11-13,23}。例如，在电网中，所有组件必须以相同的同步频率运行，以实现稳定的功率流，并避免破坏谐振效应³。在大脑中，神经交流²⁴和记忆过程^{25、26}都非常依赖神经元的同步放电。这意味着，尽管同步也与帕金森氏震颤等病理状态有关，但支持同步的功能能力对大脑和电网同样重要。这两种网络的问题在于，它们的真实拓扑结构与理论预测的完全不同。

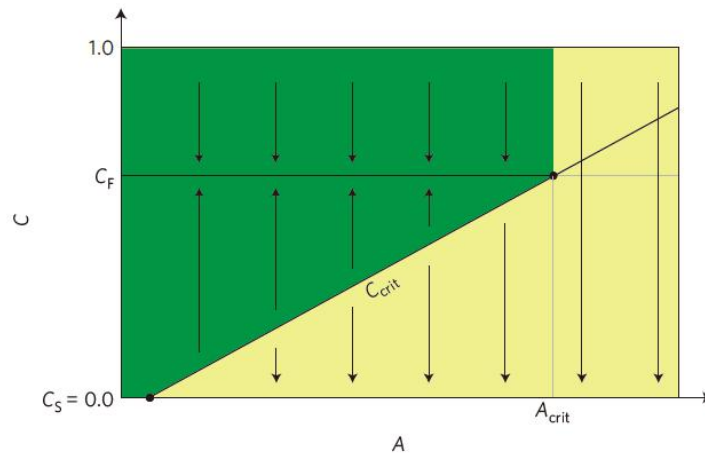


图 2 双稳态风格化森林-稀树草原模型的状态图。虚线箭头表示在给定的干旱度 a 下，系统状态森林覆盖率 C 将从某个初始状态移动到哪儿。绿色（浅黄色）区域是森林（稀树草原）州 C_F （ C_S ）的吸引盆地。实心圆表示平衡的出现或消失。

理论如下:如果要保持动态网络的同步状态，就必须对扰动保持稳定。一项基于线性化的开创性研究¹¹表明，对于由相同振荡器组成的网络，同步状态的稳定性可以直接从反映耦合拓扑的拉普拉斯矩阵中推断出来（见补充资料）。实际上，对于许多类型的振荡器，如果拉普拉斯的最大和最小非零特征值之比 $R = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ 小于振荡器特定的稳定阈值 $\beta = \alpha_2 / \alpha_1$ ，则同步状态是稳定的，前提是耦合强度从稳定区间 $I_s = \alpha_1 / \lambda_{\min}, \alpha_2 / \lambda_{\max}$ 中选择。比率 R 被称为网络的同步性。具

有较小 R 的网络被认为更具同步性¹²。为了确定特别可同步的网络是什么样子，研究人员¹³采用了 Watts-Strogatz 图生成模型⁸，发现当模型从规则格（模型参数 $P=0$ ）调整到随机图（ $P=1$ ）时，同步性表现出强烈的单调改进（图 3a）。

因此，根据基于线性稳定性的同步性，依赖于同步功能的真实网络在理想情况下应该看起来像随机图。然而，从瓦茨-斯特罗加茨模型的角度来看，神经网络和电网表现出的小世界拓扑结构远比随机图⁸⁻¹⁰更为规则。事实上，在构建功能良好的同步网络时，自然和文明似乎避开了预测的随机性。理论和观测之间的这种差异给网络研究留下了一个长期的难题。

为了补充这一理论，我们将盆地稳定性应用于 Watts-Strogatz 网络的集合，这些网络由聚合 Rössler 振子，其中节点 i 处的动力学服从

$$\dot{x}_i = -y_i - z_i - K \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j \quad (1)$$

$$\dot{y}_i = x_i + a y_i \quad (2)$$

$$\dot{z}_i = b + z_i(x_i - c) \quad (3)$$

在耦合常数 K 、拉普拉斯矩阵 L 、 $a=B=0.2, c=7.0$ 的情况下，每个这样的网络都有一个同步状态，其中所有节点遵循相同的轨迹。当网络的同步能力 $R < \alpha_2/\alpha_1 = 37.85$ ，和其中 $K \in I_s = \alpha_1/\lambda_{\min}, \alpha_2/\lambda_{\max}$ ，其中 $\alpha_1 = 0.1232$ ， $\alpha_2 = 4.663$ 。然而， R 的水平并不能量化这个过程的稳定性。同步状态是针对扰动的。为了解决这个尚未提出的问题，我们对每个网络估计了几个 $K \in I_s$ 的同步状态的盆地稳定性 $\bar{S}_B$ ，并计算了平均

$\bar{S}_B = \text{mean} \langle S_B(K) \rangle_{K \in I_s}$ (见方法)。最后，我们在集合上平均 $\bar{S}_B$ ，以获得预期的盆地稳定性 $\bar{S}_B$ 。我们发现，与同步性形成鲜明对比的是，随着网络变得越来越复杂，预期盆地稳定性呈指数级下降随机（图 3a, b; 有关定性解释，请参阅补充信息）。因此，在更规则的网络中，同步状态更稳定。

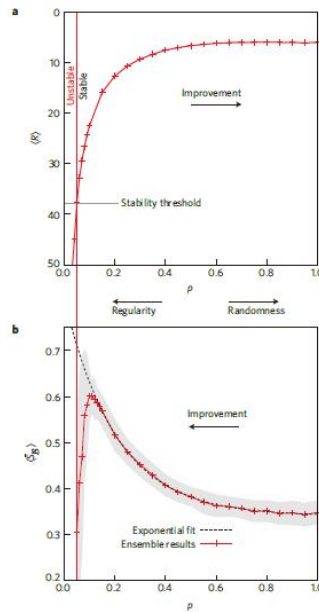


图 3 Watts-Strogatz 混沌振荡器网络的同步性和盆地稳定性。a. 预期同步性与 Watts-Strogatz 模型的参数 p 。y 轴标度反转表示 p 增加改善。b. 预期流域稳定性 $\langle \bar{S}_B \rangle$ 与 p 。灰色阴影表示一个标准偏差。虚线显示了一条指数曲线，与 $p \geq 0.15$ 的总体结果相吻合。实线是眼睛的向导。图中所示为 $N=100$ 振荡器 Rössler 类型，平均每个都有 $k=8$ 个邻居。大氮和不同钾产量的选择定性相同的结果。有关详细信息和主要特征的定性解释，请参见方法和补充信息。

这为谜题增加了一个关键的部分，我们推测，使其解决方案出现（图 4）：在同步网络中，同步状态尽可能稳定的功能需求促进了拓扑规则性。因此，在网络演化过程中，同步性优化和盆地稳定性同步优化是两种对立的力量。他们的竞争以一种拓扑权衡而告终：小世界。

在这里，我们介绍了盆地稳定性，一个新的普遍稳定的概念。我们看到了许多重要的应用，特别是细胞调节网络，其致癌基因表达谱与高维多稳态空间中的癌症吸引子有关²⁸。与线性稳定性一样，盆地稳定性是确定性系统的一个特性，不包含可能影响它的外部扰动的信息。因此，它可能通常有希望在概念上将盆地稳定性与扰动的非均匀分布结合起来。通过引入合适的概率概念，盆地稳定性也可以应用于随机系统。

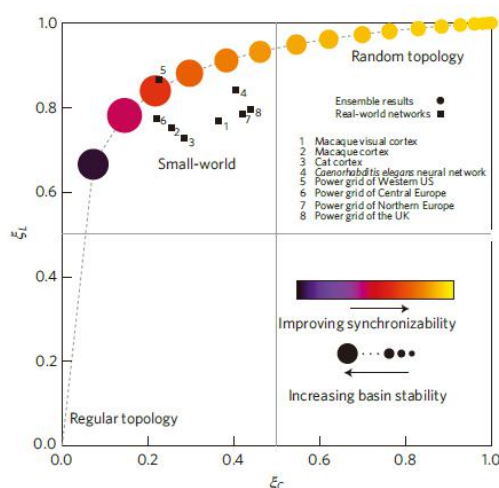


图 4 系综结果与真实网络的拓扑比较。圆代表了具有 $N=100$ 、 $k=10$ 和重连概率 $p \in \{0.05, 0.1, 0.15, \dots, 1.0\}$ 的 watts-Strogatz 网络的结果 (p 从左到右递增)。圆的面积与期望值成正比盆地稳定性 $\bar{S}_B$ ，颜色表示预期的同步能力 $\langle R \rangle$ 。正方形代表真实世界的网络，据报道，这些网络表现出小世界的拓扑结构（补充表 S_1 ）。我们选择了 ξ_L 和 ξ_C ，这样就可以比较不同大小的网络的平均最短路径 L 和聚类系数 C ，这些都是小世界的特征⁸。 $(\xi_L, \xi_C) = (0, 0)$ 标记正规网络，而 $(\xi_L, \xi_C) = (1, 1)$ 标记随机网络。小世界网络位于左上象限。参见方法和补充信息。

方法

美国 Watts-Strogatz 网流域稳定性的估算 Rössler 振荡器。

Watts-Strogatz 网络的结构如下⁸：从一维开始 N 个节点的环，其中每个节点都连接到它的 k 个最近邻，通过重新选择一个，每个边以概

率 p 独立地重新布线它的端点是随机的。用 $p=0$ 生成的 Watts Strogatz 网络 ($p=1$) 具有规则 (随机) 拓扑。 p 的中间值产生一个小世界拓扑。

在给定的网络中, 节点 $i(i=1, \dots, N)$ 处的动力学) 由耦合的 Rössler 方程 (1)–(3)。 $K \in I_s = 0.1232/\lambda_{\min}, 4.663/\lambda_{\max}$, 我们要估计同步吸引子 B 盆地的体积。高维度带来了挑战。如果 B 是一个有界凸集, 它的体积可以用现在最好的算法²⁹ 按 $O(n^4)$ 时间步估计, 其中 $n=3N$ 是状态空间的维数。我们有 $N \geq 100$, 所以这在数字上是非常昂贵的。在任何情况下, B 都不是凸的 Rössler 网络 (见补充信息)。因此, 我们退回到一些可行的方法: 我们在相对意义上估计 B 的体积, 测量盆地稳定性为 $S_{B \cap Q} = \text{Vol}(B \cap Q) / \text{Vol}(Q) \in [0, 1]$, 其中 Q 是具有有限体积的状态空间的子集。

更具体地说, 我们对 T 初始条件的系统方程进行了积分, 这些初始条件是从 Q 中均匀随机抽取的。我们计算到达同步状态 (另一个可能的吸引子为无穷大) 的初始条件的个数, 并估计 $S_{B \cap Q}$ 为 M/T 。观察到这是一个重复的伯努利实验, 我们推断, 估计带有一个标准误差

$$e = \frac{\sqrt{S_{B \cap Q}(1 - S_{B \cap Q})}}{\sqrt{T}}$$

例如, 在 $T=500$ 时, 绝对值 $e < 0.023$ 。

相对而言, 当 $e < S_{B \cap Q}/10$ 时, $S_{B \cap Q} > 1/6$ 。 Q 的选择应确保 $S_{B \cap Q}$ 的值通常超过该水平。我们对上述结果的选择是 $Q = q^N$ 和 $q = [-15, 15] \times [-15, 15] \times [-5, 35]$ 。注意, 包含 Rössler 吸引子。我们还研究了 q 的其他选择, 例如 $[-8, 8] \times [-8, 8] \times [-8, 8]^N$ 但观察结果无质量差异。因

此，在图 3 中陈述 SB 时，我们抑制下标 Q 。

对于集合中的每个网络，我们估计 10 个不同等间距值 $K \in I_s$ 的盆地稳定性 SB ，并平均得到平均盆地稳定性 SB 。

对于由二维 Watts-Strogatz 模型和另一个改变链路长度分布的模型产生的网络，结果在性质上没有区别³⁰。补充资料提供了这方面的详细情况。

不同规模小世界网络的拓扑比较。选择图 4 的轴，以便可以比较不同的真实世界网络，而不受网络大小对平均最短路径 L 和聚类系数 C 的扭曲影响。 L 和 C 已被广泛用于表征小世界⁸。我们用 ξ_L 和 ξ_C 作图，其中 $\xi_X = 1 - \log(X/X_R)/\log(X_L/X_R)$ ，其中 $X=L$ 或 C 。 L_R （或 C_R ）是相同大小的随机网络（或规则晶格）中相应数量的值。 ξ_X 计算相对于 X_L 和 X_R 之间的数量级， X 离开 X_L 的数量级。这边 $(\xi_L, \xi_C) = (0, 0)$ 标记正规网络，而 $(\xi_L, \xi_C) = (1, 1)$ 标记随机网络。小世界网络有 8 个 $L \approx L_R$ 和 $C \gg C_R$ ，因此位于左上象限。见补充资料。

参考文献

1. Babloyantz, A. & Destexhe, A. Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 83, 351-3517 (1986).
2. Lytton, W. W. Computer modelling of epilepsy. Nature Rev. Neurosci. 9, 626-637 (2008).
3. Machowski, J., Bialek, J. W. & Bumby, J. R. Power System Dynamics: Stability and Control (Wiley, 2008).

4. Erzgräber, H. et al. Mutually delay-coupled semiconductor lasers: Mode bifurcation scenarios. *Opt. Commun.* 255, 286-296 (2005).
5. Da Silveira Lobo Sternberg, L. Savanna-forest hysteresis in the tropics. *Glob. Ecol. Biogeogr.* 10, 369-378 (2001).
6. Hirota, M., Holmgren, M., Van Nes, E. H. & Scheffer, M. Global resilience of tropical forest and savanna to critical transitions. *Science* 334, 232-235 (2011).
7. May, R. M. Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states. *Nature* 269, 47-477 (1977).
8. Watts, D. J. & Strogatz, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* 393, 440-442 (1998).
9. Sporns, O. & Zwi, J. The small world of the cerebral cortex. *Neuroinformatics* 2, 145-162 (2004).
10. Wang, Z., Scaglione, A. & Thomas, R. J. Generating statistically correct random topologies for testing smart grid communication and control networks. *IEEE Trans. Smart Grid* 1, 28-39 (2010).
11. Pecora, L. M. & Carroll, T. L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.* 80, 2109-2112 (1998).
12. Barahona, M. & Pecora, L. M. Synchronization in small-world systems. *Phys. Rev. Lett.* 89, 054101 (2002).
13. Hong, H., Kim, B. J., Choi, M. Y. & Park, H. Factors that predict better synchronizability on complex networks. *Phys. Rev. E* 69, 067105 (2004).
14. Lenton, T. M. et al. Tipping elements in the earth's climate system. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 105, 1786-1793 (2008).
15. Nusse, H. E. & Yorke, J. A. Basins of attraction. *Science* 271, 1376-1380 (1996).
16. Wiley, D. A., Strogatz, S. H. & Girvan, M. The size of the sync basin. *Chaos* 16, 015103 (2006).
17. Scheffer, M. et al. Early-warning signals for critical transitions. *Nature* 461, 53-59 (2009).
18. Van Nes, E. H. & Scheffer, M. Slow recovery from perturbations as a generic indicator of a nearby catastrophic shift. *Am. Nature* 169, 738-747 (2007).
19. Holling, C. S. Resilience and stability of ecological systems. *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 4, 1-23 (1973).
20. Scheffer, M. *Critical Transitions in Nature and Society* (Princeton Univ. Press, 2009).
21. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M. & Hwang, D-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.* 424, 175-308 (2006).
22. Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E. & Havlin, S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature* 464, 1025-1028 (2010).
23. Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y. & Zhou, C. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.* 469, 93-153 (2008).
24. Fries, P. A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence. *Trends Cogn. Sci.* 9, 474-480 (2005).
25. Fell, J. et al. Human memory formation is accompanied by rhinal-hippocampal

- coupling and decoupling. *Nature Neurosci.* 4, 1259-1264 (2001).
26. Fell, J. & Axmacher, N. The role of phase synchronization in memory processes. *Nature Rev. Neurosci.* 12, 105-118 (2011).
27. Hammond, C., Bergman, H. & Brown, P. Pathological synchronization in Parkinson's disease: Networks, models and treatments. *Trends Neurosci.* 30, 357-364 (2007).
28. Huang, S. & Ingber, D.E. A non-genetic basis for cancer progression and metastasis: Self-organizing attractors in cell regulatory networks. *Breast Disease* 26, 27-54 (2007).
29. Lovász, L. & Vempala, S. Simulated annealing in convex bodies and an $O(n^4)$ volume algorithm. *J. Comput. Syst. Sci.* 72, 392-417 (2006).
30. Li, G. et al. Towards design principles for optimal transport networks. *Phys. Rev. Lett.* 104, 018701 (2010).