复杂网络中的簇爆炸同步

Peng Ji,1,2,* Thomas K. DM. Peron,3,† Peter J. Menck,1,2 Francisco A. Rodrigues,4,‡ and Jurgen Kurths1,2,5

1 波茨坦气候影响研究所（PIK），14473 波茨坦，德国
2 德国柏林洪堡大学物理系，12489
3 南非大学圣保罗第三研究所，南卡罗来纳州，巴西圣保罗
4 阿普里卡达和埃斯塔特学院，南非大学圣保罗
5 英国阿伯丁大学复杂系统与数学生物学研究所，阿伯丁 AB24 3UE

（2013 年 1 月 22 日收到；2013 年 4 月 29 日收到修订稿；2013 年 5 月 23 日出版）

爆炸同步的出现被报道为一阶 Kuramoto 振子复杂网络中的一种突变。在这封信中，我们证明了一个二阶 Kuramoto 模型中的节点向一个同步的宏观状态进行了级联跃迁，这是一种我们称之为簇爆炸同步的新现象。我们提供了一个严格的分析处理使用不相关网络的平均场分析。我们的发现与数值模拟吻合良好，从根本上加深了对同步微观机制的理解。

在过去的几年中，许多研究致力于研究网络组织对动态过程的影响，如随机游动[1]、拥塞[2,3]、流行病传播[3]和同步[4,5]。关于耦合振子的同步，已经证明这些结构中集体行为的出现取决于底层网络的连通性模式。例如，通过平均场分析，已经发现 Kuramoto 振荡器显示到同步状态的二阶相变，其临界耦合强度取决于网络拓扑结构[5]。

最近，在 SF 网络中观察到相位同步的不连续转变[6–9]。这种现象被称为爆炸性同步，被证明完全是由网络拓扑结构和每个振荡器的固有动力学之间的微观关联引起的。更具体地说，Go´mez-Garden˜ez 等人[6]认为固有频率与网络的度分布正相关，将每个振荡器的固有频率定义为等于其连接数。

在这封信中，我们将[6]中使用的一阶 Kuramoto 模型扩展为二阶 Kuramoto 模型[10–13]，考虑到每个节点的固有频率与其阶数成比例[14–16]，我们对其进行了修改，以分析全局同步。在这个模型中，我们发现了一个不连续的相变，其中小度数节点同时加入同步分量，而其他节点则根据其度数依次同步（与[6]中所有节点突然加入同步分量不同）。这是一种新的现象，我们称之为簇爆炸同步。

通过发展平均场理论，我们导出了产生与不相关网络同步滞后行为相关的上、下临界耦合强度的自洽方程。分析结果与数值模拟结果吻合较好。此外，我们还发现降低网络平均频率和提高耦合强度是导致簇爆炸同步的关键因素。

二阶 Kuramoto 模型由以下方程组组成[10–13]：

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = -\alpha\frac{d\theta_i}{dt} + \Omega_i + \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}A_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i), \qquad (1)$$

其中θ_i是振荡器的相位$i=1,2,\ldots,N$，α耗散参数，Ω_i以给定概率密度，分布的固有频率$g(\Omega)$，λ_{ij}耦合强度和A_{ij}网络邻接矩阵的元素。这里我们假设所有连接都具有相同的耦合，从而导致均匀的耦合强度$\lambda_{ij}=\lambda$。为了研究动力学和结构对全局同步的影响，我们假设

$$\Omega_i = D(k_i - \langle k\rangle), \qquad (2)$$

其中k_i是节点i的度数，$\langle k\rangle$是网络平均度数，D是比例常数。平均场分析使我们能够研究模型的动力学。

我们遵循[17]中提出的连续极限方法，并假设网络中节点之间的相关性为零。表示$\rho(k,\theta,t)$表示在t时刻具有相位的k阶节点的分数。分配型$\rho(k,\theta,t)$，根据标准化$\int_0^{2\pi}\rho(k;\theta,t)d\theta = 1$。

在不相关网络中，随机选取的边在时间t时连接到k阶相位节点的概率由$kP(k)\rho(k,\theta,t)/<k>$，其中$P(k)$是学位分布，$<k>$是平均学位。对于网络，序参数$r$被定义为$re^{i\psi(t)}=\sum_i k_i e^{i\theta(t)}/\sum_i k_i$。在连续体极限中，这会产生

$$re^{i\psi} = \int_{k_{\min}}^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\theta P(k)k/\langle k\rangle \rho(k;\theta,t)e^{i\theta(t)}, \qquad (3)$$

其中$k_{\min}$是网络的最小度数，ψ是平均相位。当相位随机分布时，$r\approx 0$。另一方面，当振荡器以相似相位演化时，$r\approx 1$。

求写出方程（1）的连续极限形式，其固有频率为$D(k-<k>)$，常数关于平均场量r和ψ，我们将式（3）的两边乘以$e^{-i\theta}$，取虚部，得到

$$\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} + D(k - \langle k\rangle) + k\lambda r \sin(\psi - \theta), \qquad (4)$$

这和描述阻尼驱动摆运动的方程是一样的。

为了得到同步的充分条件，我们选择了一个与系统平均相位ψ旋转的坐标系，定义了$\phi(t)=\theta(t)-\psi(t)$．代入变换变量$C(\lambda r)=(\ddot{\psi}+\alpha\dot{\psi})/D$，转化为运动方程式（4）,我们得到

$$\ddot{\phi} = -\alpha\dot{\phi} + D(k - \langle k\rangle - C(\lambda r)) - k\lambda r \sin\phi. \qquad (5)$$

方程（5）可以解释为[6]中最近提出的模型的二阶情形的扩展。文献[6]中研究的一阶 Kuramoto 模型只有在考虑 SF 拓扑时才会出现滞后现象，其中每个节点的固有频率与其阶数成正比。相比之下，已知由二阶 Kuramoto 模型描述的系统呈现滞后，与自然频率分布的选择无关[18,19].

为了得到方程（3）的同步解存在的充分条件，我们导出了序参量r的自洽方程，它可以表示为对平均场锁相的振子的贡献r_{drift}和非锁定漂移振子的贡献之和即$r = r_{lock} + r_{\text{drift}}$。

锁定振荡器的特征是$\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$在一定的范围内拥有度$k \in [k_1, k_2]$每个锁定振荡器都有一个依赖于$k$的恒定相位

$$\phi = \arcsin(|D(k - \langle k \rangle - C(\lambda r))| / k\lambda r), \quad \text{i.e.,} \quad \rho(k; \phi, t)$$

是与时间无关的单峰分布。对于锁定振子，我们得到

$$r_{\text{lock}} = \frac{1}{\langle k \rangle} \int_{k_1}^{k_2} kP(k) \sqrt{1 - \left(\frac{D(k - \langle k \rangle - C(\lambda r))}{k\lambda r} \right)^2}. \quad (6)$$

另一方面，在静止状态下，漂移振荡器的相位随周期T旋转，因此它们的密度$\rho(k, \theta, t)$。这意味着$\oint \rho(k; \phi) d\phi = \int_0^T \rho(k; \phi) \dot{\phi} dt = 1$，在式（3）中，并根据[18]进行一些数学运算，我们得到

$$r_{\text{drift}} = \left(-\int_{k_{\min}}^{k_1} + \int_{k_2}^{\infty} \right) \frac{-rk^2 \lambda \alpha^4 P(k)}{D^3 (k - C(\lambda r) - \langle k \rangle)^3 \langle k \rangle} dk. \quad (7)$$

序参数r由等式之和(6)和（7）决定。

众所周知，当λ变化时，受式（4）给出的运动方程约束的系统会呈现滞后现象[18, 20]。因此，我们在下面考虑两种不同情况下的系统动力学(i)增加耦合强度。在这种情况下，系统启动时没有同步$r \approx 0$，并且随着λ增加，接近同步状态$r \approx 1$(ii)降低耦合强度。现在系统从同步状态$r \approx 1$开始，随着λ的减小，越来越多的振荡器失去同步，落入漂移状态。

对于耦合强度λ增加的情况，同步状态在越过阈值λ_c^{I}之后出现。这里我们导出了自洽方程，它允许我们计算λ_c^{I}。为了做到这一点，我

们首先研究了在平均场中央带的振子的k阶范围是如何依赖于λ. 为方便起见，我们将式（5）中的时间标度改为t，从而得出

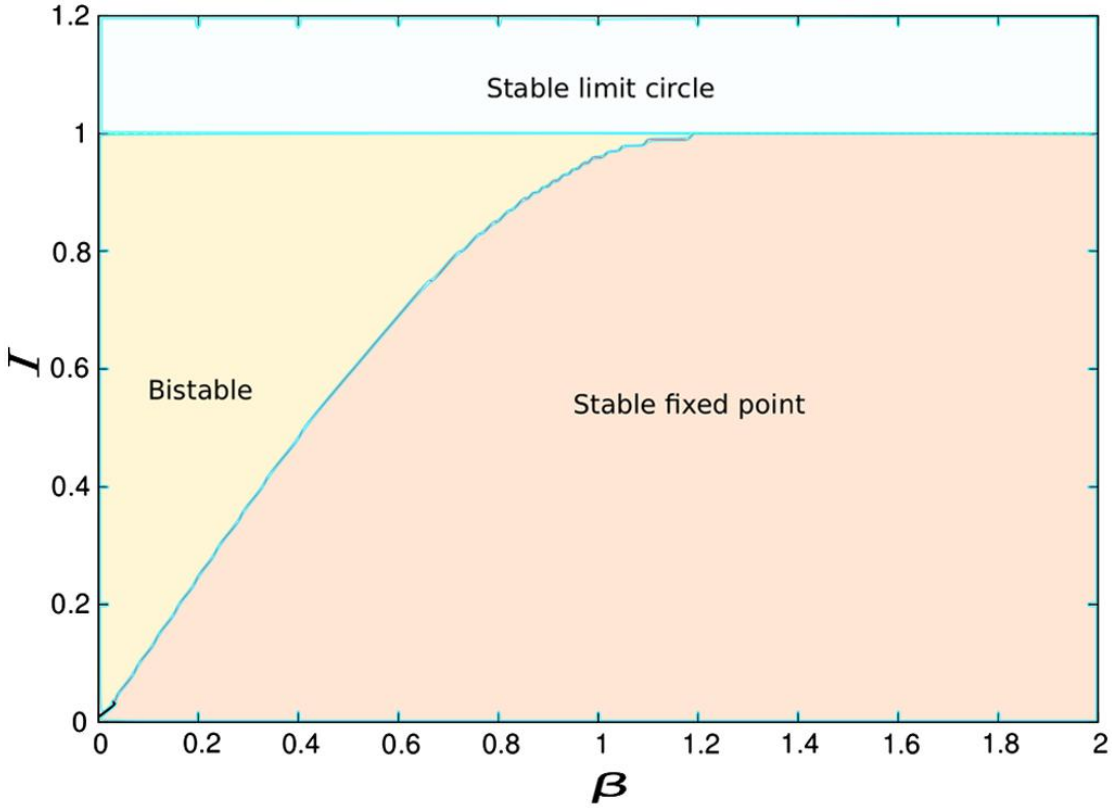

图 1（彩色在线）。摆锤的参数空间[式（8）]。绘制的是外部恒定扭矩与阻尼强度。红色区域表示产生全局稳定不动点的参数组合。在白色区域，只有一个稳定的极限环存在。黄色表示双稳定区域：不动点和极限环都是稳定的。

$$\frac{d^2\phi}{d^2\tau} + \beta\frac{d\phi}{d\tau} + \sin\phi = I, \qquad (8)$$

我们定义$\beta \equiv \alpha/\sqrt{\lambda k r}$和$D(k - \langle k\rangle - C(\lambda r)) - k\lambda r\sin\phi$. 变量$\beta$是阻尼强度，$I$对应于恒定转矩（参见阻尼驱动摆[20, 21]）。时间尺度的变化允许我们利用梅尔尼科夫的分析[21]来确定积分的范围$k\in[k^I{}_1,k^I{}_2]$的计算中$r^I = r^I{}_{lock} + r^I{}_{\mathrm{drift}}$。

利用 Melnikov 的分析[18,20,21]，我们发现，对于$I>1$，等式（8）只有一个稳定的极限环解（见图 1）。如果$4\beta/\pi\le I\le 1$，系统是双稳态

的，同步态与极限环解共存。如果耦合强度进一步小幅增加，则同步状态只能存在于$I \le 4\beta/\pi$，其中式（8）具有稳定的定点解，即使阻尼值接近[18,20,21]。通过求解不等式$\beta \cong 1$，我们得到了锁相振荡器k^I的以下范围

$$k^I \in [k_1^I, k_2^I] \equiv \left[\frac{B - \sqrt{B^2 - 4D^4(\langle k\rangle + C(\lambda r))^2}}{2D^2}, \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D^4(\langle k\rangle + C(\lambda r))^2}}{2D^2}\right] \tag{9}$$

其中

$$B = 2D^2(\langle k\rangle + C(\lambda r)) + \frac{16\alpha^2\lambda r}{\pi^2}.$$

如果我们现在将式（9）代入自洽式(6）式和（7）式得到γ^I和λ_c^I。

当耦合强度λ减小时，振荡器开始于锁相同步状态，在阈值λ_c^D之后达到异步状态。为了计算阈值，我们再次研究了锁相振荡器的k阶范围。施加式（5）中的锁相解，我们得到$\sin\phi = \frac{|D(k-\langle k\rangle - C(\lambda r))|}{k\lambda r} \le 1$，并发现锁定振子是以下范围内$k$阶作为$\lambda r$函数的节点

$$k^D \in [k_1^D, k_2^D] \equiv \left[\frac{\langle k\rangle + C(\lambda r)}{1 + \frac{\lambda r}{D}}, \frac{\langle k\rangle + C(\lambda r)}{1 - \frac{\lambda r}{D}}\right]. \tag{10}$$

这使得我们可以从自洽方程计算(6）和（7）的r^D和λ_c^D。

为了验证我们的平均场分析的有效性，我们对模型进行了数值模拟$\alpha = 0.1$和$D = 0.1$以 N=3000 为特征的 SF 网络上的，$<k>=10$，$k_{\min} = 5$。以及$P(k) \sim k^{-\gamma}$。同样，由于我们预期滞后，我们必须区分两种情况：首先，我们从 0 逐渐增加$\delta\lambda$，计算递增阶参数$\delta\lambda = 0.1$，其中我们知道$\lambda = \lambda_0, \lambda_0 + \delta\lambda, \ldots, \lambda_0 + n\delta\lambda$。第二，我们从 0 逐渐减少$\delta\lambda = 0.1$，这一次计算降阶参数$\lambda_0$。在每一步之前，我们模拟系统足够长的时间，以得到一个吸引子。

根据图 2，模拟的序参数r的依赖性确实显示了预期的滞后：对于增加λ_c^I，到同步的不连续转变发生在远大于阈值的λ_c^I处减少的向后转换的λ_c^D。为了将这些模拟结果与我们的平均场分析进行比较，我们同时求解方程(6)，(7）和（9）[分别方程式(6)（7）和（10）]分别减少）的情况下，数字获得分析曲线的r。

溶解过程的关键成分是$C(\lambda\gamma)$我们从模拟数据中检索到的。更具体地说$C(\lambda\gamma)$这取决于$\ddot{\psi},\dot{\psi}$，我们假设（i）$C(\lambda\gamma)\approx 0$，在过渡到同步之前，当节点独立振荡并产生不变的零平均场时，(ii）$C(\lambda\gamma)\approx\alpha\dot{\psi}/D$

在过渡到同步之后，因为同步节点占据主导地位并产生一个以恒定频率旋转的平均场，我们从模拟中获得了该平均场，参见图 3。图 2 显示，我们的平均场分析非常好地预测了临界阈值λ_c^I和λ_c^D。

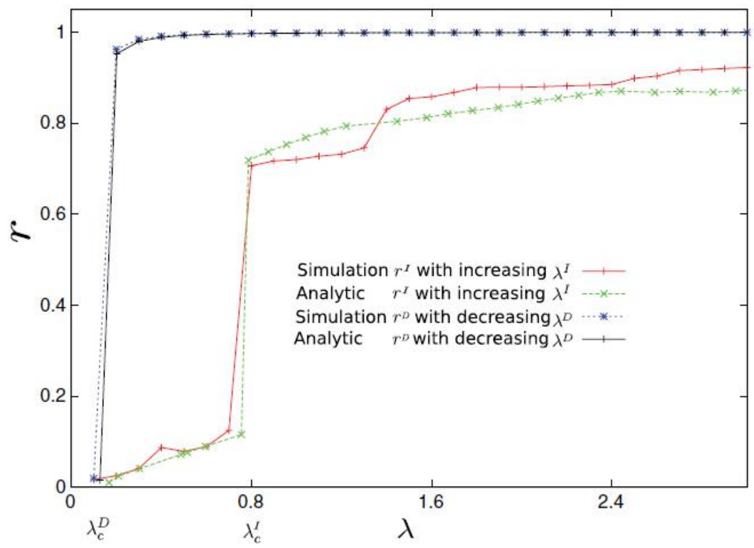

图 2（在线彩色）。数值结果与解析结果的比较。所示为增加（减少）的顺序参数，基于：(i）模拟、红（蓝）线和（ii）自洽方程(7） 和（6）具有式（10）中的同步度[式（9）中的k^D]，绿色（黑色）线。

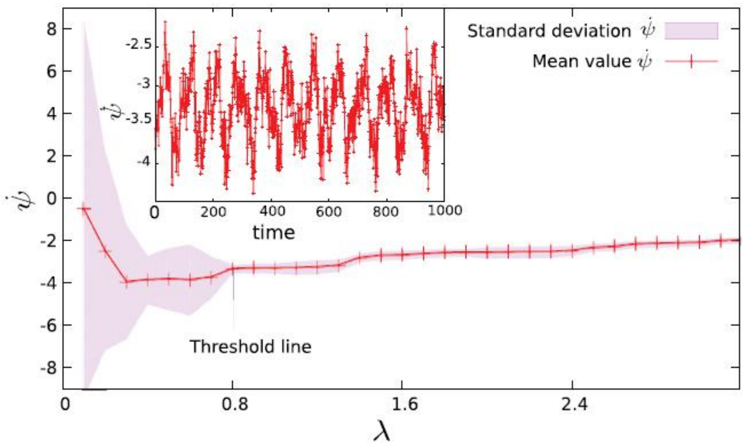

图 3（彩色在线）。数值模拟结果表明，随着耦合强度的增加。红线表示平均值$\dot{\psi}(\lambda)$，红色阴影表示其标准偏差。插图包含耦合强度为 0.8 时的周期性时间序列。

当转换到同步发生了吗？如前所述，通过$\dot{\psi}$进入方程的平均频率是$C(\lambda\gamma)$一个至关重要的数量。为了了解不同的节点对$\dot{\psi}$的贡献，为了增加γ，我们计算了k，得到了所有节点的平均频率如下所示：$\langle\omega\rangle_k = \sum_{[i|k_i=k]}\omega_i/(NP(k))$。如图 4（a）所示，相同度的节点形成簇，从小度开始依次加入同步组件。这与[6]中观察到的不连续相变形成鲜明对比，其中平均频率$<\omega>_k$在同一时间跳到$\langle k\rangle$。我们称这种新观察到的现象为团簇爆炸同步。

在图 4（b）中，我们展示了作为耦合强度函数的同步度范围的上下限k_1^I和k_2^I的演变。分析和仿真结果再次吻合良好。注意k_1^I和k_2^I的演变过程中的不连续性，这导致了图 2 中的不连续转变。对于$\lambda>\lambda_c^I$，我们保持下限k_1^I保持不变，同步节点的上限k_2^I与λ[图 4（b）]呈线性增长。

总之，我们证明了在二阶 Kuramoto 模型中发生了团簇爆炸同步跃迁。与以往的爆炸同步研究一样，动力学（节点的固有频率）和局部拓扑（节点的阶数）之间的相关性是爆炸同步的必要条件。利用固

有频率与局部拓扑的关系，首次提出了不相关复杂网络中基于平均场方法的簇爆炸同步的解析处理方法。我们的模拟结果与理论相符。此外，我们还证明了相同阶数的节点簇从小阶数开始依次加入同步分量。我们的发现增强了对系统宏观状态下簇爆炸同步的理解，其应用将对更大网络中簇的检测产生重大影响。此外，我们的第一个分析处理可以扩展到应用领域[10－13]，其中使用二阶 Kuramoto 振荡器是相关的。

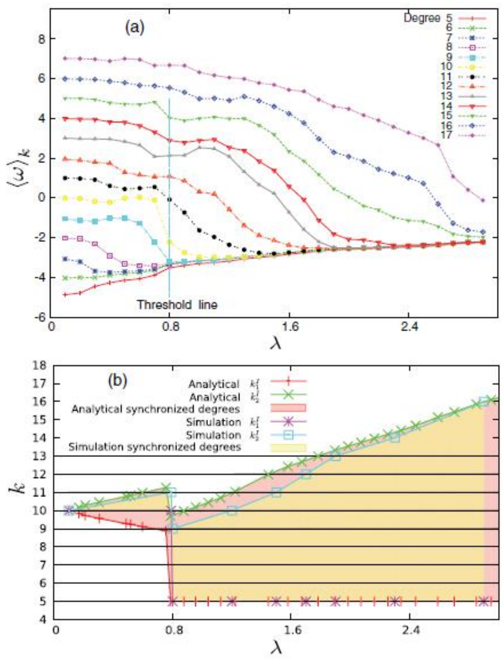

图 4（在线彩色）(a) 随耦合强度增加的数值模拟结果。所示为不同程度的节点相对的平均频率(b) 模拟和平均场分析的同步度。

致谢

我想感谢中国奖学金委员会（CSC）的奖学金。T。佩隆想向法佩斯致谢。F.A.Rodrigues 感谢 CNPq（编号 305940/2010-4）和 FAPESP（编号 2010/19440-2）对本研究的资助。感谢康拉德阿登纳的支持。感谢 IRTG1740（DFG 和 FAPESP）提供的赞助。

*pengji@pik-potsdam.de
†thomas.peron@usp.br
‡francisco@icmc.usp.br

参考文献

[1] J. D. Noh and H. Rieger, Phys. Rev. Lett. 92, 118701 (2004).
[2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. Hwang, Phys. Rep. 424, 175 (2006).
[3] A. Barrat, M. Barthlemy, and A. Vespignani, Dynamical Processes on Complex Networks (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2008).
[4] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Phys. Rev. Lett. 80, 2109 (1998).
[5] A. Arenas, A. Dı´az-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, Phys. Rep. 469, 93 (2008).
[6] J. Go´mez-Garden˜es, S. Go´mez, A. Arenas, and Y. Moreno, Phys. Rev. Lett. 106, 128701 (2011).
[7] I. Leyva, R. Sevilla-Escoboza, J. M. Buldu´, I. Sendin˜a Nadal, J. Go´mez-Garden˜es, A. Arenas, Y. Moreno, S. Go´mez, R. Jaimes-Rea´tegui, and S. Boccaletti, Phys. Rev. Lett. 108, 168702 (2012).
[8] T. K. D. Peron and F. A. Rodrigues, Phys. Rev. E 86, 016102 (2012).
[9] T. K. D. Peron and F. A. Rodrigues, Phys. Rev. E 86, 056108 (2012).
[10] M. Rohden, A. Sorge, M. Timme, and D. Witthaut, Phys. Rev. Lett. 109, 064101 (2012).
[11] J. A. Acebro´n and R. Spigler, Phys. Rev. Lett. 81, 2229 (1998).
[12] F. Dorfler and F. Bullo, SIAM J. Control Optim. 50, 1616 (2012).
[13] B. R. Trees, V. Saranathan, and D. Stroud, Phys. Rev. E 71, 016215 (2005).
[14] J.W. S. Porco, F. Do¨rfler, and F. Bullo (to be published).
[15] A. Pluchino, S. Boccaletti, V. Latora, and A. Rapisarda, Physica (Amsterdam) 372A, 316 (2006).
[16] Z. Ne´da, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet, and A. L. Baraba´si, Phys. Rev. E 61, 6987 (2000).
[17] T. Ichinomiya, Phys. Rev. E 70, 026116 (2004).
[18] H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, Physica (Amsterdam) 100D, 279 (1997).
[19] H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, Phys. Rev.

Lett. 78, 2104 (1997).
[20] S. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
[21] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (Springer-Verlag, Berlin, 1983), Vol. 42.