

延迟动力学中的盆地稳定性

Siyang Leng^{1,2}, Wei Lin¹ & Jürgen Kurths^{2,3,4}

1 复旦大学数学科学学院、计算系统生物学研究中心, 上海 200433

2 波茨坦气候影响研究所 (PIK), 波茨坦 14473, 德国

3 德国柏林洪堡大学物理系, 邮编: 12489

4 英国阿伯丁大学复杂系统与数学生物学研究所, 阿伯丁 AB24 3UE

材料可以联系: W.L. (电子邮件: wlin@fudan.edu.cn)

盆地稳定性是复杂系统研究中的一个普遍概念, 它以吸引盆地的体积代替传统的线性化方法。它在现实系统中有着广泛的应用, 特别是在具有多重稳定现象的动力系统中, 更普遍地存在于诸如神经元放电、气候过程和电网等延迟动力学中。由于初始值空间的无限维性质, 如何正确地定义时滞动力学的盆地体积仍然是一个基本问题。本文提出了一种将无限维初始状态空间投影到有限维欧氏空间的方法, 该方法通过将初始函数沿不同的正交基或非正交基展开。本文提出了延迟动力学中盆地体积的广义概念和一种高度实用的计算算法, 并采用交叉验证方法对延迟动力学中的吸引盆地进行了数值估算。我们将此方法应用于研究几个具有生物或物理意义的典型系统, 包括具有多稳态的延迟 Hopfield 神经元模型和具有同步动力学的延迟复杂网络, 展示了此方法的潜在适用性。

线性稳定性理论在复杂系统科学中占有重要地位, 它描述了系统在受到小扰动后的稳态 (如平衡点和周期轨道) 的长期行为。这种基于线性化的方法在理论上和实际中都有许多应用, 通过确定稳态是否稳定 (根据 Lyapunov 指数的符号) [1]。然而, 由于这种方法的局部性, 它只在扰动被限制在很小的范围内时才有效。由于非小扰动在实际系统中无处不在, 因此需要开发一种补充线性稳定性范式的全局方

法。尽管经典的具有不变性原理的 Lyapunov 函数方法可以作为 [2-6] 的候选方法，但这种方法通常需要精细的构造技术，并且高度依赖于所研究系统的精确形式，具有一定的理论意义，但缺乏广泛的实用价值。幸运的是，孟克等人最近提出的盆地稳定性 (BS) 成为了一种全局方法，它使用吸引盆来完全评估稳定状态的稳定性 [7]。这种方法着重于吸引盆的体积，作为在受到任何随机扰动 [8] 后恢复到稳定状态的可能性的度量，从而解释了在概率意义上稳定状态的程度。

BS 方法已成为复杂系统研究的有力工具，并已成功应用于许多科学领域，尤其是在具有多稳定性的系统中。事实上，多稳定性现象在时滞动力系统 [9, 12 - 14] 中更为普遍。而且，由于信号传输有一定的持续时间，如有限的开关速度和记忆效应，几乎每个真实系统 [15 - 18] 都存在时滞。因此，在时滞动力学中考虑 BS 具有重要意义。为此，我们需要在时滞意义下定义盆地体积，而时滞微分方程 (DDE) 的初值空间是一个维数为无穷大的函数空间。尽管通过测度理论，可以构造分析测度，如豪斯道夫测度，来评估盆地的“体积” [20]，但在传统的 BS 常微分方程理论中，这些测度不如盆地面积或体积那样具有几何直观性或数值计算性。

为了克服这些困难，我们在下文中通过一种技术来阐明 BS 的概念，该技术将 DDE 的无限维初始状态空间投影到有限维欧氏空间。初始值的函数与其在正交基或非正交基展开下的系数有关。在此基础上，从理论上提出了盆地体积的广义概念，并介绍了一种实用的计算算法和交叉验证过程。然后，我们应用所发展的方法来研究一个具有

时滞的多稳态 Hopfield 神经元模型。一些进一步的应用，包括调查对时滞复杂网络的同步以及时滞振子平衡点和周期轨道的多稳定性的研究，显示了这种方法的广泛应用前景。

结果

考虑一个由延迟微分方程描述的系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1)$$

其中 x 是一个 s 维状态变量， $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]$ 表示 τ 是一个时间延迟。集合，用 C 表示 $[-\tau, 0]$ 对于系统 (1) 的初始值，是由连续函数组成的空间。我们用 $\|\cdot\|$ 来表示 n 维的欧几里德范数。现在，我们给出了一个稳态吸引盆的定义，这个稳态可以是平衡轨道，也可以是周期轨道。

延迟动力学的吸引盆。假设 $\phi^* \in C[-\tau, 0]$ 是系统 (1) 的孤立渐近稳定平衡轨道或周期轨道。如果存在区域 $B \subset C[-\tau, 0]$ 对于初始值，使得对于任何 $z \in B$ ，从 z 开始的系统的解（用 $x_t(\cdot, z)$ 表示）一致收敛到 ϕ^* 作为 $t \rightarrow +\infty$ ，也就是说， $B \equiv \{z \in C[-\tau, 0] \mid \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |x_t(\theta, z) - \phi^*(\theta)| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\}$ ，则 B 称为相对于稳定状态的吸引盆（或吸引盆） ϕ^* 。

由于考虑了初值的函数空间，系统 (1) 的吸引盆是无穷维的。直接计算测量这种 BS 是不可能的，因此应采用近似算法。请注意，对于任何一个给定的标准正交基类 $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\} \subset C[-\tau, 0]$ ，存在唯一的数字序列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ，以至于

$$g_n \triangleq a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n \rightarrow g, \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

在这里，极限可以用上的平方积分来解释 $[-\tau, 0]$ 和 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

是 $\sum_1^\infty a_i^2 < +\infty^{21}$ 的傅里叶系数。有关我们在本文中使用的具体基，请参阅方法一节。因此，我们通过构造下面的一个集合，如下所示：那么

$$C_{(n,\alpha)} = \{z = a_1 f_1 + a_2 f_2, \dots + a_n f_n \mid \sum_1^n a_i^2 \leq \alpha^2\} \subset C[-\tau, 0],$$

其中 α 是一个足够大的正常数

和 $C_{(n,\alpha)} \subset C_{(n+1,\alpha)}$ 。由于 $C_{(n,\alpha)}$ 之间的一对一性质，有界集

$$C = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid \sum_1^n a_i^2 \leq \alpha^2\},$$

我们用传统的 Lebesgue 测度 m 来计算

$$C_{(n,\alpha)} \text{ 作为 } \text{Vol}(C_{(n,\alpha)}) = \int_C dm.$$

我们称几何体 $C_{(n,\alpha)} \cap B$ 的体积为相对于

给定标准正交基的 n 阶广义盆地体积（如果不混淆，也称作盆地体积）。我们进一步通过

$$\text{Vol}(C_{(n,\alpha)} \cap \mathfrak{B}) / \text{Vol}(C_{(n,\alpha)}) \in [0, 1] \tag{3}$$

然后用 $S_B^{(n,\alpha)}$ 表示这个归一化值，然后 $S_B^{(n,\alpha)}$ 用它来表示延迟动力学

(1) 中盆地 B 的 n 阶近似 BS。

为了实际应用，我们介绍了如何数值计算上述广义 BS。我们将系统 (1) 与 T 初始函数相对应的 C 随机随机绘制的 T 点进行积分 [a 点 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 映射到 (2) 中定义的函数 g_n ，然后计算最终达到稳定稳态的初始函数的 M 个数 ϕ^* 。（当 T 足够大时，可以将 $S_B^{(n,\alpha)}$ 估计为 M/T 。在补充材料中，我们分析地说明了如何选择合适的 T 值，从而得到 n 阶近似 BS 的可信估计。

此外，如 (3) 中所定义的广义 BS 取决于 n 和系数 a_i 的范围。BS 收敛性随 n 或取值范围的增加而增加的解析证明是目前比较困难的。然而，这种收敛性的数值验证可以在应用中采用，这在下面的例子以

及补充材料中的例子中都有体现。事实上，当 $S_B^{(n,\alpha)}$ 的波动在较大的 n 或更宽的范围内持续地低于预先规定的允许偏差时，我们取这类 n 的最小值作为从标准正交基中连续取的基函数的数目，取这些边界的最小值作为 $C_{(n,\alpha)}$ 。

显然，上述定义和计算延迟动力学广义 BS 的过程不仅可以用正交基（如三角基和勒让德基）执行（参见方法部分），还可以用非正交基（包括 Bernstein 基）执行 22（参见补充材料）。然后，为了避免在计算中丢失初值的基本函数，我们在应用中通过交叉验证程序确定了 n 和系数的取值范围，即，它们取的值使得上述对近似 BS 的收敛要求对于三个不同的基同时满足。有趣的是，如下面的例子所示，尽管不同基的 BS 的精确值并不一致，但是随着一些参数的变化，例如时延，它们显示出几乎相同的变化趋势。

迟发性 Hopfield 神经元模型。 我们首先将广义 BS 方法应用于延迟神经元模型。多稳定性广泛存在于神经网络中，特别是当应用于联想记忆时 [23, 24]。多个样本模式（以平衡点表示）被存储在网络的权值中，联想记忆被用来借助网络动力学从一个不完整或损坏的版本恢复到它的完整模式。平衡点的个数代表了记忆库容，而盆地体积则是误差修正量决定哪种记忆最有可能被记住的能力。

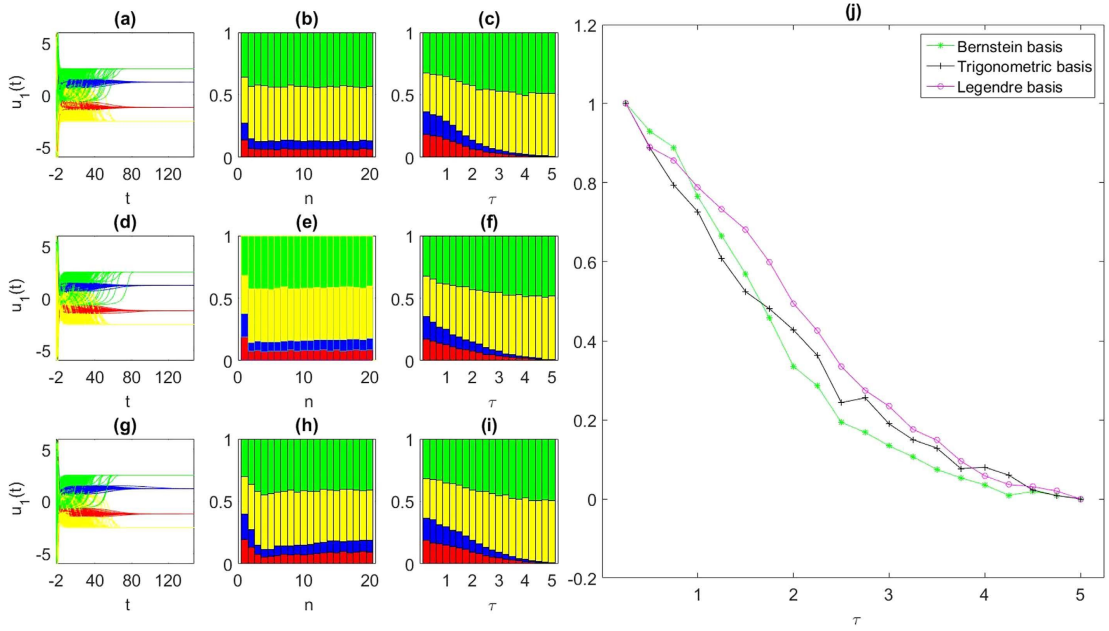


图 1. 延迟 Hopfield 神经元模型相对于三种不同碱基的盆稳定性。上、中、下图分别对应于 Bernstein 基、三角基和 Legendre 基(a,d,g)显示模型 (4) 中的积分轨迹，从不同的函数空间中选择初始函数开始 $\tau = 2$ 。所有的轨迹都收敛到四个不同的平衡点 $E_{1,2,3,4}$ ，它们分别用红色，蓝色，绿色和黄色表示(b,e,h)表明，对于所有碱，当 n 足够大时， $S_B^{(n,6)}$ 的波动趋于轻微(c,f,i)显示了类似的景观，其中平衡 $E_{1,2}$ 的 S_B^{20} 比例随着 τ ，而其他两个平衡点 $E_{3,4}$ 的比例主要相等。对于平衡点 E_1 ， S_B^{20} 随时间的归一化变化 τ 对所有的基础都有一个高度的共识。

通过这种方法，我们可以相对地估计几种模式的体积，并发现其与神经元参数的关系。我们通过考虑一个简单的二维延迟 Hopfield 神经元模型 [25] 来证明：

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -bu_1(t) + af(u_1(t - \tau_s)) + a_{12}f(u_2(t - \tau_{12})) + I_1, \\ \dot{u}_2(t) &= -bu_2(t) + a_{21}f(u_1(t - \tau_{21})) + af(u_2(t - \tau_s)) + I_2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $u_i(t)$ 是神经元 i 在时间 t 的状态。参数 $a, b, a_{12}, a_{21}, I_1, I_2$ 是常数 ≥ 0 表示一个非线性的神经元激活函数。这里，参数被设置为以下的形式： $a_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, i \neq j$ ， $f(\cdot): R \rightarrow R$ 。方程中的时间延迟表示不同神经元之间的传输时间，这里我们让 $\tau_s = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau$ 。根据线性稳定性理论，模型 (4)

中的 $[0, 5]$ 有四个渐近稳定的平衡点, 即 $E_1(-1.2156, 1.2156)$, $E_2(1.2156, -1.2156)$ 、 $E_3(2.5170, 2.5170)$ 和 $E_4(-2.5170, -2.5170)$, 如图 1 (a, d, g) 所示。为了 $\tau > 0$ 这些平衡点对应于区间上的四个常数函数向量, 分别为 $[-\tau, 0]$ 。同时, 通过对平衡态的研究, 我们发现除了这些平衡态是否稳定之外, 还有更有趣的关于这些平衡态的详细信息。

首先, 为了在计算四个平衡点的 n 阶近似 BS 时找到适当数量的基函数, 我们使用了上述算法和交叉验证程序。特别是同时考虑 Bernstein 基、三角基和 Legendre 基 α , 为简单起见, 用 $s_B^n = s_B^{(n,6)}$ 表示。如图 1 (b, e, h) 所示, 当 n 足够大时, 每个基的 s_B^n 的波动趋于稳定, 因此对于模型 (4), 我们取 $n=20$ 作为从给定基中依次选择的基函数的数目。由于 s_B^{20} 代表了一种可能被记忆的模式, 因此研究其值随某些参数的变化成为一个重要的问题。如图 1 (c, f, i) 所示, 当时间延迟时, 两个平衡点 $E_{1,2}$ 的 s_B^{20} 的值越来越小 τ 增加 (显示被记住的概率降低), 最后, 另外两种模式 $E_{3,4}$ 以几乎相等的比例占据主导地位。对于所有三个基, 图 1 (j) 描绘了 s_B^{20} 随时间变化的归一化曲线 τ 对于吸引子 E_1 。如上所述, 尽管不同基的 s_B^{20} 值并不完全一致, 但这些值随时间延迟的变化接近高度一致。

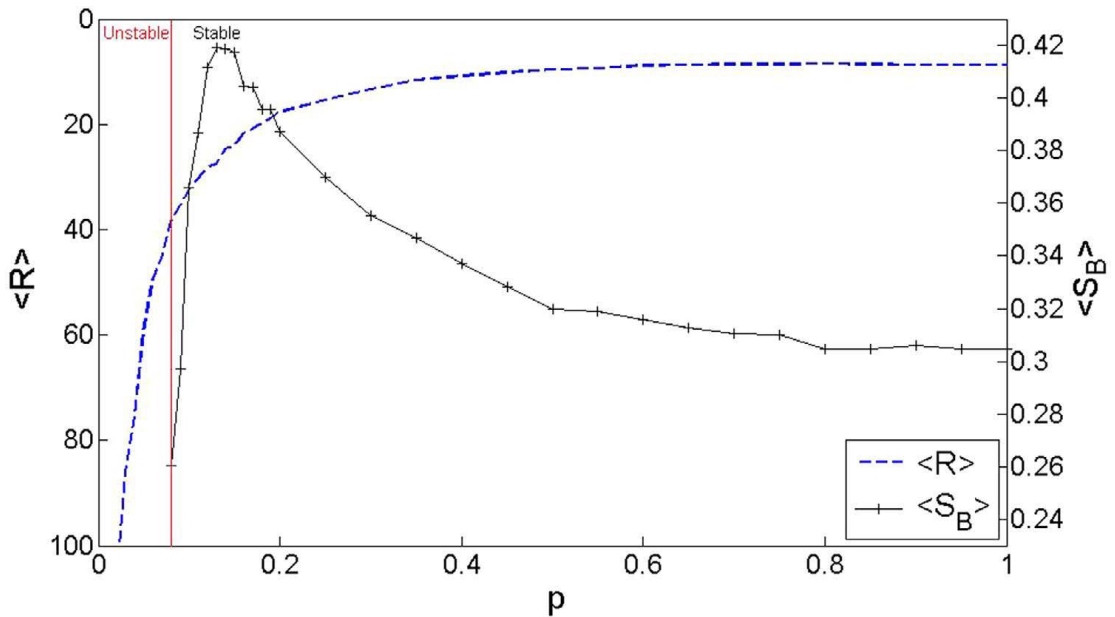


图2. 由延迟耦合聚合组成的 Watts-Strogatz 网络的盆地稳定性 Rössler 振荡器。得到了 $N=100$ 个振子的结果，每个振子平均有 6 个相邻振子。红色的垂直线分隔了不稳定和稳定的状态。

虽然人脑中有大量的神经元，但记忆储存的能力却非常巨大。如例子所示，BS 为我们提供了一种充分发现多吸引子及其盆地的潜在方法。与线性化方法相比，BS 证明了自己是一个实用的工具，它提供了系统在概率意义上的全局视图。

应用于具有时滞耦合的复杂网络。为了证明这种方法对延迟复杂网络的适用性，我们将其应用于同步现象的研究。同步是一种基本的非线性行为 [26]，可以在许多系统中观察到，如放电神经元 [13]、人类心肺系统 [27]、唱歌的蟋蟀和电网 [9]。原始的 BS 理论向我们展示了当扰动发生时，系统将在多大程度上保持同步行为，以及网络拓扑与流域体积之间的关系。一个惊人的发现是，一个网络的 BS 与 Watts-Strogatz 网络的参数 p 呈现出完全不同的趋势，而传统的指标 R 通常用来衡量网络达到同步的能力。

因此，我们研究了复杂网络的广义 BS，其中我们考虑了时延，

这可能会影响系统的同步稳定性，甚至改变同步模型[28, 29]。我们考虑了一个具有 N 个时延耦合相同节点的无向复杂网络，其表示为：

$$\dot{X}_i(t) = F[X_i(t)] - \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} h[X_j(t - \tau)], \quad (5)$$

其中 $X_i \in R^m$ 和 $i=1, \dots, N$ 。单个单元的动力学由函数 F 控制， σ 表示总耦合强度常数，网络的拉普拉斯 $G=g_{ij}$ 为 $N \times N$ 矩阵，它决定了网络的拓扑结构。 h 是一个耦合函数（我们在这里选择它作为恒等图），并且 τ 是耦合延迟。在 $\sum_{j=1}^N g_{ij}=0$ 的条件下，系统 (5) 的同步流形为

$X_1(t)=X_2(t)=\dots=X_N(t)=X_s(t)$ 。通过考虑主稳定函数 (MSF) [31] 的最大横向 Lyapunov 指数，我们可以得到大量网络的归一化耦合参数范围 ε 这取决于耦合强度 σ 耦合矩阵 G (见方法)。在该范围内，系统 (5) 能够稳定地同步。在下面的讨论中，Watts-Strogatz 网络由范例组成 Rössler 振荡器被考虑给定参数振荡器由

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + 0.2y, \quad \dot{z} = 0.2 + z(x - 9.0).$$

给 $x \rightarrow x$ 分量耦合用于构建网络[30]。根据 MSF 方法，在没有耦合延迟的情况下，稳定同步状态仅存在于归一化耦合参数 (0.18, 4.61) 的范围内。作为 τ 增加到 0.24，第二个稳定状态 $\varepsilon > 7.38$ 何时出现 τ 达到 0.4 时，仍然只存在一个稳定区，且 (0.18, 7.38) [33]。很容易计算 σ 根据 ε 以及不同的网络拓扑 (参见方法)。下面我们集中讨论这个政权 $\tau=0.4$ 。通过改变 Watts-Strogatz 网络中的重连概率 p (规则格为 $p=0$ ，随机图为 $p=1$) 来观察网络拓扑结构与其同步性之间的关系。

从传统的观点来看，网络的同步能力，定义为 $\gamma_{\max}/\gamma_{\min}$ ，矩阵 G

的最大非零特征值与最小非零特征值之比 (R 越小, 网络的可同步性越高), 总是表示随着 p 的增加 (从不稳定区域到稳定区域) 有所改善, 如图 2 蓝色虚线所示。然而, 与无延迟网络 7 的结果类似, 当 p 很小时, 平均流域稳定性 (详见方法) 迅速上升, 并达到峰值。之后, 与 R 随 p 的变化正好相反, 可以观察到平均盆地稳定性的指数下降, 这意味着网络变得更加可同步, 而同步流形的盆地则在下降。显然, 广义 BS 方法在延迟网络中的应用也补充了线性同步的研究。

此外, 这种广义 BS 方法还可以应用于具有周期轨道甚至混沌吸引子的系统, 这将揭示更微妙的非线性特性 (参考补充材料的例子, 包括延迟 Van der Pol-Duffing 振子模型和延迟耦合 Stuart-Landau 系统)。所有这些例子表明, 广义 BS 方法可以提供一个相对全面的知识盆地的稳定状态, 并表明扰动是否允许, 这是非常必要的工程。

结论

线性稳定性理论为判断一个状态是否稳定提供了一种局部方法。然而, 由于受到初始状态空间维数的限制, 对时滞动力学中吸引子的全面理解仍然是一个难点。虽然 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法可以用来分析多吸引子的多稳定性和多吸引子的盆, 但该方法仍然给出了一个充分条件, 缺乏描述吸引子基的精确形状的能力, 而且这种方法在本质上仍然限制了在有限维空间中的讨论, 只描述了零点为 [34,35] 时的初值条件。为了克服这些困难, 本文提出了一种将盆地稳定性应用于延迟动力学的近似方法。BS 方法将我们的目光从传统的局部线性化稳定性的观点转向了全局检查。我们的方法扩展了它的应用范

围，将无限维问题转化为一个高度实用的算法，特别是当时滞在实际系统中起着重要作用时。广义 BS 方法甚至为进一步研究时滞动力学中吸引子的非线性性质（如分岔现象）提供了一个机会。此外，本文所提出的广义 BS 计算方法的收敛性的分析证明也具有重要意义，这将成为我们目前和今后工作的一个主题。

方法

正交基。我们分别取三角函数的正交基 $[-\pi, \pi]$ 具体如下：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots,$$

以及勒让德的理论基础 $[-1, 1]$ ，这也是正交基，如下所示：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

在泛函分析的框架内，将函数与给定的标准正交基展开所生成的级数可视为傅里叶级数[21]。此外，为了实现结果部分形式化的交叉验证过程，我们还使用了补充资料中引入的非正交 Bernstein 基。

记住，不同的基础导致不同的 $S_B^{(n, \alpha)}$ 。因此，如果我们需要关注的确切值，我们应该弄清楚使用哪种 $S_B^{(n, \alpha)}$ 基础。如上述例子和补充资料中的例子所示，当考虑广义流域体积随某些参数的变化时，可以得到几乎相同的变化趋势的结果。

掌握稳定功能。同步流形的稳定性由系统的拉普拉斯 G 的特征值和下列变分方程（即 MSF） [31] 决定

$$\dot{\xi}(t) = DF[X_s(t)]\xi(t) - \varepsilon Dh[X_s(t - \tau)]\xi(t - \tau). \quad (6)$$

在这里, ξ 是横向于同步流形的 m 维变分。归一化耦合参数 $\varepsilon = \sigma \gamma_k$ 、其中 γ_k 表示 G 的特征值, $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。因此, 给定网络拓扑 G 的同步状态的稳定性由式 (6) 的最大横向 Lyapunov 指数的负号保证[30]。

平均盆地稳定性的估计。 注意, 稳定的同步状态需要 σ 在特定范围内取其值。在这里, 我们估计了该范围内几个不同等距值的盆地稳定性, 并获得平均值 $S_B^{(n,\alpha)}$ 此外, 为一个概率 p 生成多个网络以获得 $S_B^{(n,\alpha)}$ 的平均值。

参考文献

1. Pikovsky, A., Rosenblum, M. & Kurths, J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, vol. 12 (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).
2. LaSalle, J. P. The Stability of Dynamical Systems (SIAM, Philadelphia, PA, 1976).
3. Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. & Bretas, N. G. Uniform invariance principle and synchronization. Robustness with respect to parameter variation. J. Differential Equations 169, 228–254 (2001).
4. Rabelo, M. & Alberto, L. F. C. An extension of the invariance principle for a class of differential equations with finite delay. Adv. Difference Equations 2010, 496936 (2010).
5. Ge, T., Lin, W. & Feng, J. Invariance principles allowing of non-Lyapunov functions for estimating attractor of discrete dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control 57, 500–505 (2012).
6. Zhong, W., Lin, W. & Ruan, J. The generalized invariance principle for dynamic equations on time scales. Appl. Math. Comput. 184, 557–565 (2007).
7. Menck, P. J., Heitzig, J., Marwan, N. & Kurths, J. How basin stability complements the linear-stability paradigm. Nature Physics 9, 89–92 (2013).
8. Wiley, D. A., Strogatz, S. H. & Girvan, M. The size of the sync basin. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 16, 015103 (2006).
9. Schultz, P., Heitzig, J. & Kurths, J. Detours around basin stability in power networks. New Journal of Physics 16, 125001 (2014).
10. Ji, P. & Kurths, J. Basin stability of the Kuramoto-like model in small networks. The European Physical Journal Special Topics 12,

2483–2491 (2014).

11. Menck, P. J. & Kurths, J. Topological identification of weak points in power grids. In *Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Proceedings of NDES 2012*, 1–4 (VDE, 2012).
12. Lucarini, V., Pascale, S., Boschi, R., Kirk, E. & Iro, N. Habitability and multistability in earth-like planets. *Astronomische Nachrichten* 334, 576–588 (2013).
13. Shayer, L. P. & Campbell, S. A. Stability, bifurcation, and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 61, 673–700 (2000).
14. Wang, H., Hu, H. & Wang, Z. Global dynamics of a Duffing oscillator with delayed displacement feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 14, 2753–2775 (2004).
15. Wang, Q., Duan, Z., Perc, M. & Chen, G. Synchronization transitions on small-world neuronal networks: Effects of information transmission delay and rewiring probability. *EPL-Europhysics Letters* 83, 50008 (2008).
16. Wang, Q., Perc, M., Duan, Z. & Chen, G. Delay-induced multiple stochastic resonances on scale-free neuronal networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 19, 023112 (2009).
17. Wang, Q., Perc, M., Duan, Z. & Chen, G. Synchronization transitions on scale-free neuronal networks due to finite information transmission delays. *Physical Review E* 80, 026206 (2009).
18. Lakshmanan, M. & Senthilkumar, D. V. *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems* (Springer, Berlin, 2011).
19. Hale, J. K. *Functional Differential Equations* (Springer, New York, 1971).
20. Xia, D.-X. *Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces* (Elsevier, Academic Press, Massachusetts, 1972).
21. Kolmogorov, A. & Fomin, S. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Dover Publications, New York, 1999).
22. Korovkin, P. P. Bernstein Polynomials, in Hazewinkel, M., *Encyclopedia of Mathematics* (Springer, Berlin, 2001).
23. Kohonen, T. *Self-Organization and Associative Memory*, vol. 8 (Springer, Berlin, 2012).
24. Lin, W. & Chen, G. Large memory capacity in chaotic artificial neural networks: A view of the anti-integrable limit. *IEEE Transactions on Neural Networks* 20, 1340–1351 (2009).
25. Van Den Driessche, P. & Zou, X. Global attractivity in delayed hopfield neural network models. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 58, 1878–1890 (1998).
26. Arenas, A., Daz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y. & Zhou, C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports* 469, 93–153 (2008).
27. Schuster, C., Rosenblum, M. G., Kurths, J. & Abel, H.-H. Heartbeat synchronized

- with ventilation. *Nature* 392, 239–240 (1998).
28. Masoller, C. & Marti, A. C. Random delays and the synchronization of chaotic maps. *Physical Review Letters* 94, 134102 (2005).
29. Lin, W., Pu, Y., Guo, Y. & Kurths, J. Oscillation suppression and synchronization: Frequencies determine the role of control with time delays. *EPL-Europhysics Letters* 102, 20003 (2013).
30. Murugesan, M. S. Delay Effects on Synchronization in Networks of Dynamical Systems. Ph.D. thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I (2013).
31. Pecora, L. M. & Carroll, T. L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters* 80, 2109 (1998).
32. Rössler, O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A* 57, 397–398 (1976).
33. Shrii, M. M., Senthilkumar, D. & Kurths, J. Delay coupling enhances synchronization in complex networks. *EPL-Europhysics Letters* 98, 10003 (2012).
34. Lin, W. & Ma, H. Synchronization between adaptively coupled systems with discrete and distributed time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55, 819–830 (2010).
35. Ma, H. & Lin, W. Realization of parameters identification in only locally Lipschitzian dynamical systems with multiple types of time delays. *SIAM Journal on Control and Optimization* 51, 3692–3721 (2013).

致谢

S. L. 获得中国奖学金委员会 (CSC) 奖学金 (批准号: 501100004543) 的资助。国家自然科学基金 (自然科学基金) 资助项目 (61273014、11322111)。