

# 同步池的大小

Daniel A. Wiley and Steven H. Strogatz

康奈尔大学应用数学中心, 伊萨卡, 纽约 14853

Michelle Girvan

圣达菲学院, 圣达菲, 新墨西哥州 87501

2005年9月30日收到; 2005年12月19日接受; 2006年3月31日在线发布

我们提出了一个新的研究方向, 希望能吸引非线性动力学界, 特别是这一焦点问题的读者。考虑一个由相同振荡器组成的网络。假设同步状态是局部稳定的而不是全局稳定的; 它与其他吸引子竞争可用的相空间。从随机初始条件开始, 系统同步的可能性有多大? 同步的概率如何取决于网络的连接方式? 一方面, 这类问题本身就很困难, 因为它们需要计算全局几何量、“同步盆地”的大小, 或者更正式地说, 同步状态的吸引盆地的度量。另一方面, 这些问题是广泛开放的, 在许多现实世界中都很重要, 并且可以通过各种动力系统和网络拓扑组合的数值实验来解决。为了在这个方向上给出一个实例研究, 我们报道了  $n \gg 1$  个正弦耦合同相位振荡器环的同步盆的结果。每一个振荡器与它的  $k$  个最近邻在任意一边进行相等的相互作用。当  $k/n$  大于临界值 (约 0.34) 时, 我们证明了同步盆是整个相空间, 除了一组测量零点。当  $k/n$  低于这个临界值时, 共存吸引子以一个明确的序列诞生。它们采用均匀扭曲波的形式, 每一个都有一个整数绕组数  $q$ , 即环周围一个电路中完整相位扭曲的数量。最大稳定捻度与  $n/k$  成正比; 分析得到了比例常数。对于较大的  $n/k$  值, 对应于大环或短程耦合, 许多不同的扭曲态争夺它们的相空间份额。我们的模拟显示, 它们的盆地大小遵循一个相当简单的统计规律: 最终状态具有  $q$  扭曲的概率相

对于 $q$ 服从高斯分布。此外,随着 $n/k$ 的增加,该分布的标准偏差随 $n/k$ 线性增长。我们无法用挥手的论据来解释这两个结果中的任何一个。

在过去的几年中,许多研究人员对一个涉及非线性动力学与网络理论融合的问题产生了极大的兴趣。问题是探讨振荡器网络的同步性如何取决于这些振荡器的互连方式。通过从局部角度研究这个问题,我们学到了很多,使用线性化来检验同步状态的稳定谱如何取决于网络拓扑。在这里,我们提出了另一种方法,它关注于相空间的一个更全局的特性:同步态的吸引盆。这个盆地的大小控制着网络同步的可能性。我们认为,这里有许多有趣的发现,特别是如果一个混合和匹配各种网络和动力系统,并进行数值实验,以探讨它们如何影响同步性。为了说明人们可能会问的各种问题,我们给出了一个相同相位振荡器环的案例研究,并发现即使在这里,有趣的模式和困惑弹出一开始寻找他们。

## 一、导言

当今科学中许多最有趣的问题,将大量的动力系统集合在复杂的网络中连接在一起[1-3]。从分子生物学到神经科学,从凝聚态物理到互联网,研究人员正在解开复杂网络的结构,学习它们是如何进化和运作的,探索他们的建筑如何影响他们的集体行为。非线性科学正是在这最后一个领域做出了巨大贡献[4-22]。

举一个最简单的例子,考虑一个相同或几乎相同的动力系统网络。在什么情况下,这样一个网络会同步,其所有元素都是一个整体?

网络的自同步能力如何取决于其布线图？什么是实现同步或在不需要同步时避免同步的最佳拓扑？从应用的角度，更好地理解连通性如何影响同步可以在多个领域产生效益。例如：

- 在计算机科学领域，Kornis 等人最近提出了一种方法，为大规模并行离散事件模拟构建更快、更有效的体系结构。他们的分析表明，除了通常的本地连接外，在处理器之间加入一些随机的远程通信链路，将有助于保持分布式计算在整个网络上同步前进，从而避免经常困扰此类模拟的数据通信瓶颈。每种情况的寓意是，网络的体系结构都会强烈地影响其同步的倾向。

- 在应用物理学中，稀疏随机连接的类似使用预计将促进超导约瑟夫森阶梯阵列的相干操作[21]。另一方面，这种远程连接在同步二维阵列方面的效果要差得多。

- 在脑科学中，海马体两个区域的不同布线模式似乎决定了它们更容易表现出哪种形式的癫痫活动[22]。具体来说，CA1 区域中的突触连接数量较少，更容易癫痫发作，而 CA3 区域，由于其更大的循环连接性，更容易显示同步突发代替。

现在的挑战是找出在这里起作用的数学机制。获得洞察力的一种自然方法是观察具有相同振荡器的线性耦合系统，然后询问同步状态的局部稳定性如何取决于耦合矩阵的结构[4 - 12]。正如 Pecora 及其同事所开创的，[4, 5]这种方法揭示了同步状态可能是稳定的，也可能不是稳定的，取决于耦合矩阵的特征值的位置，一个拓扑概念与“主稳定函数”的根有关，一个动力学概念。从这个意义上说，同步性确

实与网络拓扑结构有关。

但由于这一框架是基于局部分析的，因此无法阐明一个关键的全局性问题：假设振荡器网络具有稳定的同步状态，那么它同步的可能性有多大？这是一个关于同步状态吸引盆的问题，我们称之为“同步盆”。

关键是线性稳定性分析并没有告诉我们这个盆地有多大或多小。同步性可能非常稳定，但也不太可能，就像一个高尔夫球一旦到达高尔夫球场第 18 洞的底部就非常稳定一样，但它不太可能沿着随机轨迹到达那里。

由于其全局性，同步性的可能性问题远不如局部稳定性问题那么容易处理和探讨。事实上，盆地的整个主题在动力系统理论中是个谜。我们确实知道一些数值方法来近似它们的边界，即使在高维系统中也是如此 [23]。我们知道这些边界可以是光滑的或分形的，我们知道，盆地本身可能被其他吸引子盆地的点所迷惑 [24]。但我们不知道的是如何计算盆地的总体积或“测度”，它决定了随机初始状态被吸引到相关吸引子的概率。对于我们感兴趣的问题，我们也不知道当网络拓扑发生变化时，同步盆地会如何扩展或收缩。

我们在 1999 年夏天开始考虑同步盆地，当时我们对小世界网络的环模型非常感兴趣 [25]。我们想知道，随着环从晶格逐渐重新连接到一个小世界，同步的可能性是否会显著增加，也许会显著增加。他们的想法是，通过随机地将一些本地连接更改为远程连接，由于新创建的横跨整个网络的通信信道，系统可能以更加协调的方式运行。神

经科学的早期研究已经提出了稀疏的长程连接的同步效应, [26, 27] 因此我们的猜测在直觉上似乎是合理的。

对于一个预热问题, 我们研究了一个由  $n$  个相同相位振荡器组成的一维环, 每个振荡器的强度与其两侧的  $k$  个近邻相等:

$$\dot{\phi}_i = \omega + \sum_{j=i-k}^{i+k} \sin(\phi_j - \phi_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

其中  $n \gg 1$  和指数  $i$  是周期模  $n$ 。这个系统总是有一个稳定的同步状态, 对于所有的  $\phi_i = \omega t, i = 1, \dots, n$ 。然而, 我们知道, 在某些条件下, 以均匀扭曲的行波形式存在的其他吸引态也是可能的 [28]。因此, 我们的目的是重新布线这个系统, 通过独立地将每个边改变为概率为  $p$  的随机边, 或以概率为  $1-p$  的随机边、然后研究达到同步状态的可能性作为  $p$  的函数。但我们很快意识到, 我们甚至不了解  $p=0$  的盆地结构, 完全规则的环!

## 二、数值实验

一个自然的第一个问题是询问同步盆的大小如何取决于耦合范围  $k$ 。图 1 显示, 对于较小的  $k$  值, 只有一小部分初始条件导致同步。随着  $k$  值的增加, 同步域不断扩展, 填充了越来越多的相空间, 直到同步成为唯一的吸引子。

通过更近距离地放大跃迁, 我们发现当  $k > k_c(n) \approx 0.34n$ , 或者换句话说, 当每个振荡器与环中其他振荡器的约 68% 耦合时, 同步态变得全局稳定。以秒为单位。我们解析地导出了这个结果, 并证明了前因

子 0.34 是某个超越方程的根。这里可能有一个精确的结果，因为临界值  $k_c$  可以通过局部分析得到，即使涉及盆地的问题是全局性的。其诀窍是将控制方程化为一个梯度系统，在适当的旋转坐标系中，所有吸引子都必然是不动点。对应于原帧中的锁相周期解。当除 sync 之外的所有这些都是线性不稳定的时，我们默认知道 sync 必须是全局吸引的。

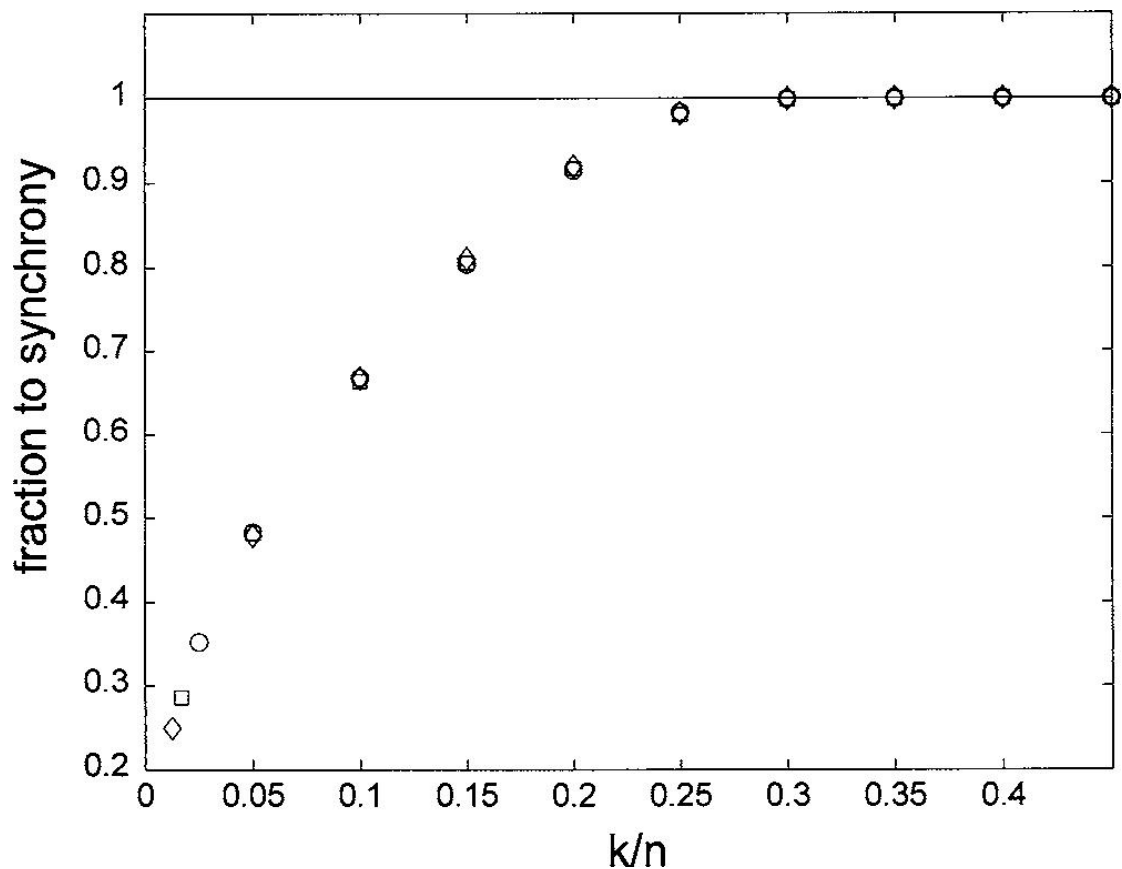


图 1. 导致完美同相同步的初始条件的分数。方程(1)从 100000 个均匀随机初始条件开始，对不同的  $k$  和  $n$  值进行数值积分。圆、菱形和正方形分别表示大小为  $n=80$ 、 $60$  和  $40$  的系统。误差线比标记本身小。请注意，当绘制关于无量纲组  $k/n$  的曲线时，数据会折叠到一条曲线上，该无量纲组  $k/n$  将耦合范围测量为系统大小的一部分。尽管该图似乎表明，当  $k/n=0.30$  时，100%的初始条件达到同步状态，但实际测量的百分比为 99.99%。对于  $k/n=0.35$  的数据点，我们观察到 100%的结果。

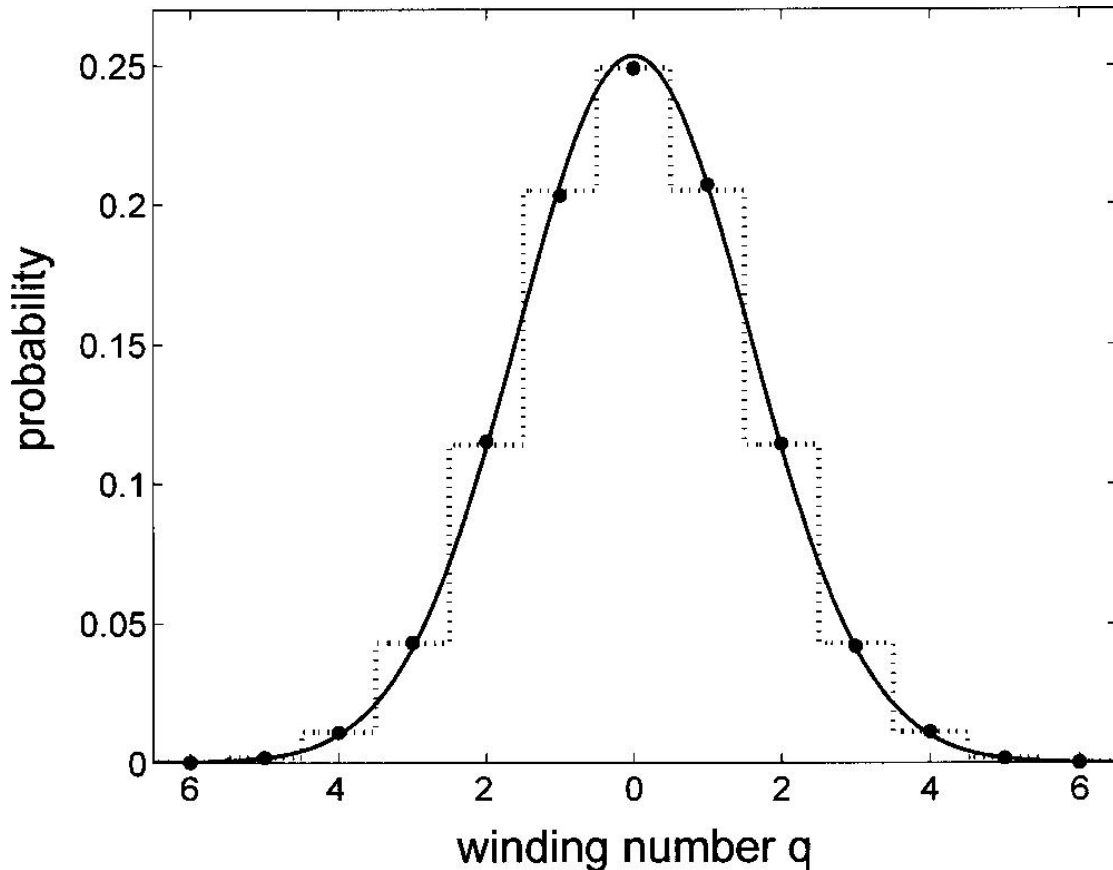


图 2. 不同扭曲状态下的盆地尺寸分布。这些状态的特征是它们的绕组数  $q$ 。数据点表示从 100000 均匀随机初始条件开始，对参数  $n=80$ ,  $k=1$  进行数值积分得到的结果。由于绕组数只能取整数值，我们将数据拟合为一个单参数离散高斯分布，其中最终状态具有绕组数  $q$  的概率由  $(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \int_{q-1/2}^{q+1/2} \exp[-x^2/(2\sigma^2)] dx$  定义。离散分布显示为点直方图，表示数据的最佳最小二乘拟合，标准偏差  $\sigma=1.63 \pm 0.01$ 。连续曲线反映了  $\sigma$  值对应的连续高斯分布。

当  $k$  降低到  $k_c$  以下时，会产生其他竞争吸引子。它们以均匀扭曲波的形式出现：

$$\phi_j = \omega t + 2\pi q j/n + C,$$

对于  $j=1, \dots, n$ 。这里  $C$  是任意常数， $q$  是一个卷绕数，一个整数，当我们绕着圆环绕一圈时，它测量相位上的全捻数。模拟结果表明，最平缓的扭曲态， $q=\pm 1$ ，随着  $k$  的减少，第一个变得稳定。然后，随着  $k$  值的进一步减小，更多的高扭曲态依次稳定。这些结果来自于对  $q$  扭曲状态的线性稳定性分析，如第三节所示。

这就提出了盆地相对大小的问题，对于稳定的 $q$ 扭曲态，与同步盆相比较。图 2 显示了系统进入最终状态的概率与 $q$ 扭曲密切遵循 $q$ 的正态分布。此外，随着 $k$ 的减小，分布以一种简单的方式变宽：它的标准差很好地近似于 $\sigma \approx 0.19\sqrt{n/k} - 0.11$ ，如图 3 所示。

我们对这些统计模式没有任何解释，我们将它们作为谜题提供给本文的读者。

到目前为止，人们提出的最好的观点是我们的同事 Jimsethna 提出的以下启发性论点。根据假设，振荡器的相位最初是随机地从一个站点到另一个站点，因此在 $t=0$ 时，绕组数的概念是没有意义的。但几乎立刻，大量剧烈的相位转移发生；当相邻的振子试图与相邻振子对齐时，相位图变得粗糙和平滑。由于每一个振子在任意一边与 $k$ 个其它振子相互作用，因此在这个阶段系统的特征相干长度应该大致为 $k$ 。因此，也许整个环现在可以被看作是 $n/k$ 域的集合，每个域的相位模式中都有合理定义的扭曲数。假设从现在起解中的相位扭曲的总数是守恒的，我们可以估计卷绕数，通过将每个卷绕所贡献的捻度相加得到 $n/k$ 域的。根据中心极限定理，这个总扭曲度应该是正态分布的，其标准差的增长类似于域数的平方根，即 $n/k$ 。显然，这一论点还有许多有待改进之处，例如，除了缺乏严谨性之外，它没有考虑系数 0.19。我们希望有人能想出更好的办法。



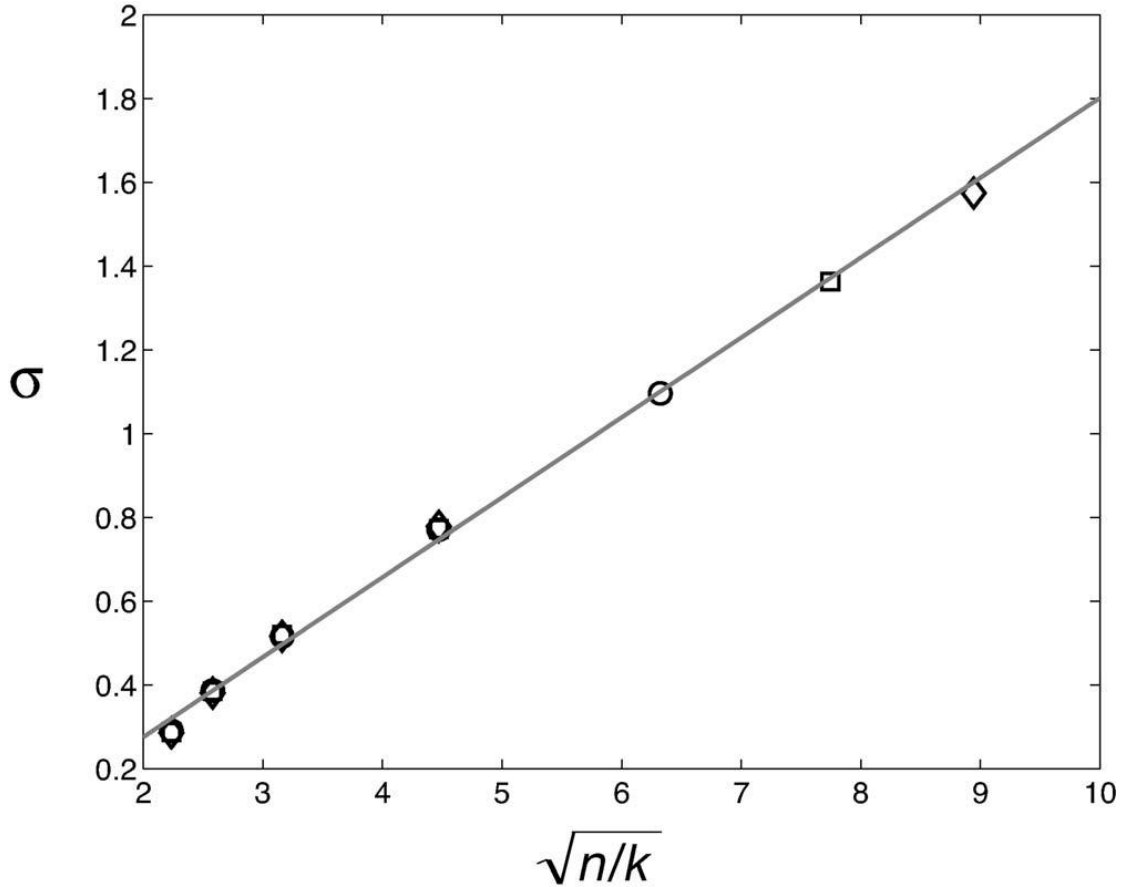


图 3. 不同  $n/k$  值下流域大小分布的标准差。圆、菱形和正方形分别表示大小为  $n=80$ 、 $60$  和  $40$  的系统。点上的误差线比标记本身小。每个条件的标准偏差是使用图 2 标题中描述的程序计算的。与之前一样，使用 100000 个随机初始条件来生成每个数据点。实线表示数据的最小二乘拟合  $\sigma = a\sqrt{n/k} + b$ ，其中  $a = 0.191 \pm 0.007$  和  $b = -0.11 \pm 0.03$ 。

最后，我们也概述了一个研究计划，探索同步盆地及其依赖于网络拓扑结构在一个更一般的设置。我们还详细说明了为什么我们认为这些问题可能是富有成效的和潜在重要的。

### 三、 分析结果

从现在开始，我们将在旋转的坐标系中观察，这样，锁相周期解就减少到不动点。因此，让  $\theta_i = \phi_i - \omega t$ 。然后  $\theta_i$  满足了

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=i-k}^{i+k} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

稍微概括一下，假设振子  $i$  和  $j$  之间的耦合强度不一定是 0 或 1，而是由某个权  $G_{i,j}$  给出。为了保持 (2) 的旋转对称性和反射对称性，假设权重仅依赖于分离  $i-j$ 。然后系统变成

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=i-n/2}^{i+n/2} G_{i-j} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

用有符号分隔符表示  $s=i-j$ 、我们假设重量  $G_s$ ，对于  $s=-n/2, \dots, n/2$  是非负的，关于  $s=0$  是对称的，并且随着  $s$  的增加而减小，直到最大的  $\pm n/2$  截然相反的分离不适用。

方程 (3) 是一个梯度系统。要看到这个，让表示向量  $\theta$ 。然后可以检查是否等于  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ，势函数为

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{i-j} \cos(\theta_j - \theta_i). \quad (4)$$

因此 (3) 流的所有轨迹在这个势面上单调下山，并渐近逼近不动点。特别是，我们不需要考虑更复杂的长期行为的可能性，例如极限环、吸引环面或 (3) 的奇怪吸引子。注意，不动点可以是  $V$  的局部极小值，在这种情况下它们是稳定的，也可以是鞍点或局部极大值，在这种情况下它们是不稳定的。

函数  $V$  也有一个很好的物理解释：它给出了零温度下  $XY$  自旋系统的势能，自旋态和相互作用强度和连接拓扑由  $G$  决定。那么动力学 3 意味着自旋会重新定向，从而稳定地降低系统的能量。

虽然剩下的分析可以在离散系统 (3) 上进行，但更简单、更清晰的是用它的连续极限。两种情况下的结论基本相同，一旦  $n$  变得中等大。从现在开始，考虑 (3) 的空间连续版本，由

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \sin[\theta(y,t) - \theta(x,t)] dy, \quad (5)$$

其中  $\theta(x,t)$  是振荡器  $x$  在时间  $t$  的相位。索引变量  $x$  从  $-\pi$  到  $\pi$  具有周期性边界条件。如上所述，核  $G$  在振荡器之间提供非局部耦合。它是对称的，非负的，并且随着间隔  $x$  减小—沿着圆环旋转。为了方便起见， $G(x)$  被归一化为单位积分。我们的耦合函数  $-\sin(x)$  是有吸引力的，因为它倾向于将相邻的振荡器拉入彼此的相位。

### A. 扭曲态

很容易验证，

$$\theta(x,t) = qx$$

求解任意整数  $q$  的连续系统 (5)。这依赖于  $G$  的均匀性和正弦耦合函数的奇异性。我们将这种特殊的解称为“ $q$ -扭曲态”。

我们现在分析它的线性稳定性。让

$$\theta(x,t) = qx + \eta(x,t), \quad (6)$$

其中， $\eta \ll 1$ ，在  $\eta$  中只保留线性项会产生以下等式：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \cos[q(y-x)] [\eta(y,t) - \eta(x,t)] dy. \quad (7)$$

将右翼分成两个条款产生收益

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \cos[q(x-y)] \eta(y,t) dy \\ & - \eta(x,t) \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \cos[q(x-y)] dy. \end{aligned} \quad (8)$$

为了简化这个方程，我们定义了一个新的函数  $H(x,q) = G(x) \cos(qx)$ 。然后将 (8) 系统减少到

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = H * \eta - \hat{G}(q)\eta, \quad (9)$$

其中\*表示卷积和 $\hat{G}$ 表示 $G$ 的傅里叶变换, 定义为

$$\hat{G}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} G(y) e^{iqy} dy$$

接下来我们计算(9)的特征值。将特征解 $e^{\lambda t} e^{imx}$ 写成的形式, 可以检验特征值是实的, 并且由

$$\lambda(m, q) = \frac{\hat{G}(q+m) + \hat{G}(q-m)}{2} - \hat{G}(q). \quad (10)$$

这里 $m=1, 2, \dots$ 是扰动的振型数,  $q$ 是任意整数。我们忽略了平凡的情况 $m=0$ , 它对应于一个微扰, 在这个微扰中, 相同的均匀常数被加到所有的相位上。通过旋转对称, 这样的扰动相当于沿 $q$ -扭曲解的时间平移, 因此所有 $q=0$ , 与我们从等式(10)得到的结果一致。

因此我们看到 $q$ 扭曲态,  $\theta(x, t) = qx$ 是线性稳定的当且仅当

$$\hat{G}(q+m) - 2\hat{G}(q) + \hat{G}(q-m) < 0, \quad (11)$$

对于所有 $m=1, 2, \dots$ 从这个意义上说, 稳定性是由一组可数无限的条件决定的, 这并不奇怪, 因为扭曲态必须对每一个可能的模数 $m$ 的扰动都是稳定的。一般来说, 对于任意的内核 $G$ , 检查所有这些条件都是困难的。但幸运的是, 对于我们这里特别感兴趣的 $G$ , 结果发现其中一个条件比所有其他条件都严格; 如果满意, 其他所有的都会自动保持。

## B. 稳定性的一个充分条件

系统(11)的形式类似于二阶导数的有限差分近似。很明显,  $q$ -扭曲态的稳定性凸性性质, 必须是密切相关的。让我们把这个想法用

于系统 (1) 的连续模拟。在这种特殊情况下，每一个振荡器都与它的所有相邻振荡器相等地耦合到一定的范围内。我们将相关的内核编写为

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r}, & -\pi r \leq x \leq \pi r \\ 0, & |x| > \pi r, \end{cases} \quad (12)$$

这意味着每个振荡器耦合到强度为  $1/(2\pi r)$  的环的一部分，并且不与环的其余部分相互作用。傅里叶变换是

$$\hat{G}(q) = \frac{\sin(\pi q r)}{\pi q r}. \quad (13)$$

现在我们引入几个新变量来简化表示法。如果我们让

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z},$$

则稳定性条件 (11) 变为

$$\frac{1}{2}[f(qr + mr) + f(qr - mr)] < f(qr), \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

这一点可以通过写作进一步澄清

$$Q = qr$$

和

$$M = mr.$$

系统 (14) 变成

$$\frac{1}{2}[f(Q + M) + f(Q - M)] < f(Q), \quad M = r, 2r, \dots \quad (15)$$

令

$$S_Q(M) = \frac{1}{2}[f(Q + M) + f(Q - M)] - f(Q). \quad (16)$$

稳定性问题现在可以用以下方式重新表述：给定绕组数  $q$  和耦合范围

$r$  的值,  $q$ -扭曲状态是稳定的当且仅当

$$S_Q(M) < 0, \quad M = r, 2r, \dots, \quad (17)$$

式中  $Q=qr$ 。所以下一步是提取足够的关于函数  $S_Q(M)$  的信息来确定这些不等式在什么条件下成立。

它有助于将  $S_Q(M)$  视为在整个实数行上定义的函数, 即使我们只需要在一组离散的  $M$  值上计算它。如果不等式  $S_Q(M)$ , 适用于所有实  $M$ , 那么它肯定适用于离散值  $\{r, 2r, 3r, \dots\}$  这正是我们确保稳定所需要的。换句话说, 这种方法将很快给我们一个稳定的充分条件。获得一个既必要又充分的条件要稍微复杂一点, 下一步就会出现。

为了直观了解函数  $S_Q(M)$  的行为, 我们在图 4 中绘制了两个  $Q$  值的曲线图。注意, 在这两种情况下, 图形具有均匀的对称性, 并以零斜率通过原点, 这些事实紧接着从 16 开始。对于足够小的  $Q$ , 假设  $Q=0.64$ , 如图 4a, 除原点外,  $S_Q(M)$  在任何地方都为负。但当  $Q$  增加到 0.70。图 4b 时, 该图会产生两个支撑原点的正凸起。因此, 通过对  $Q$  的连续性, 函数  $S_Q(M)$  必须在值  $Q=0.64-0.7$  的某个地方失去其负确定性。

事实上, 正如这些图片所显示的,  $S_Q(M)$  保持负定, 直到它的图形在原点凹上, 当  $S''_Q(0)$  从负变为正时发生这种情况。从 16 我们计算出  $S''_Q(0)=f''(0)$ 。此外, 我们可以证明  $f(Q)$  的二阶导数在区间 中是负的, 当

$$\mu \approx 0.6626.$$

这里是  $f''(Q)$  的最小正根, 可以通过求解

$$\tan(\pi\mu) = \frac{2\pi\mu}{2 - (\pi\mu)^2}. \quad (18)$$

现在记住  $Q=qr$ ，我们得到了稳定所需的充分条件：

定理 1：给定  $r>0$ ， $q$ -扭曲态是稳定的，如果  $|q|r < \mu$ 。

为了了解这对于原始系统(1)有  $n$  个振子的意义，每一个振子都与两边的  $k$  个近邻耦合，我们注意到  $2k/n$  与  $r$  起着相同的作用；它表示单个振荡器感觉到的整个环的分数。因此，当  $r=2k/n$  时，充分条件变为  $|q|k < \omega n/2$ 。例如，如果耦合是最近邻  $k=1$ ，则当扭态不超过  $\omega n/2 \approx 0.33n$  时，扭态是稳定的扭转。实际上，在失去稳定性之前，可以容忍稍微多一些的扭曲，我们将在下面看到。

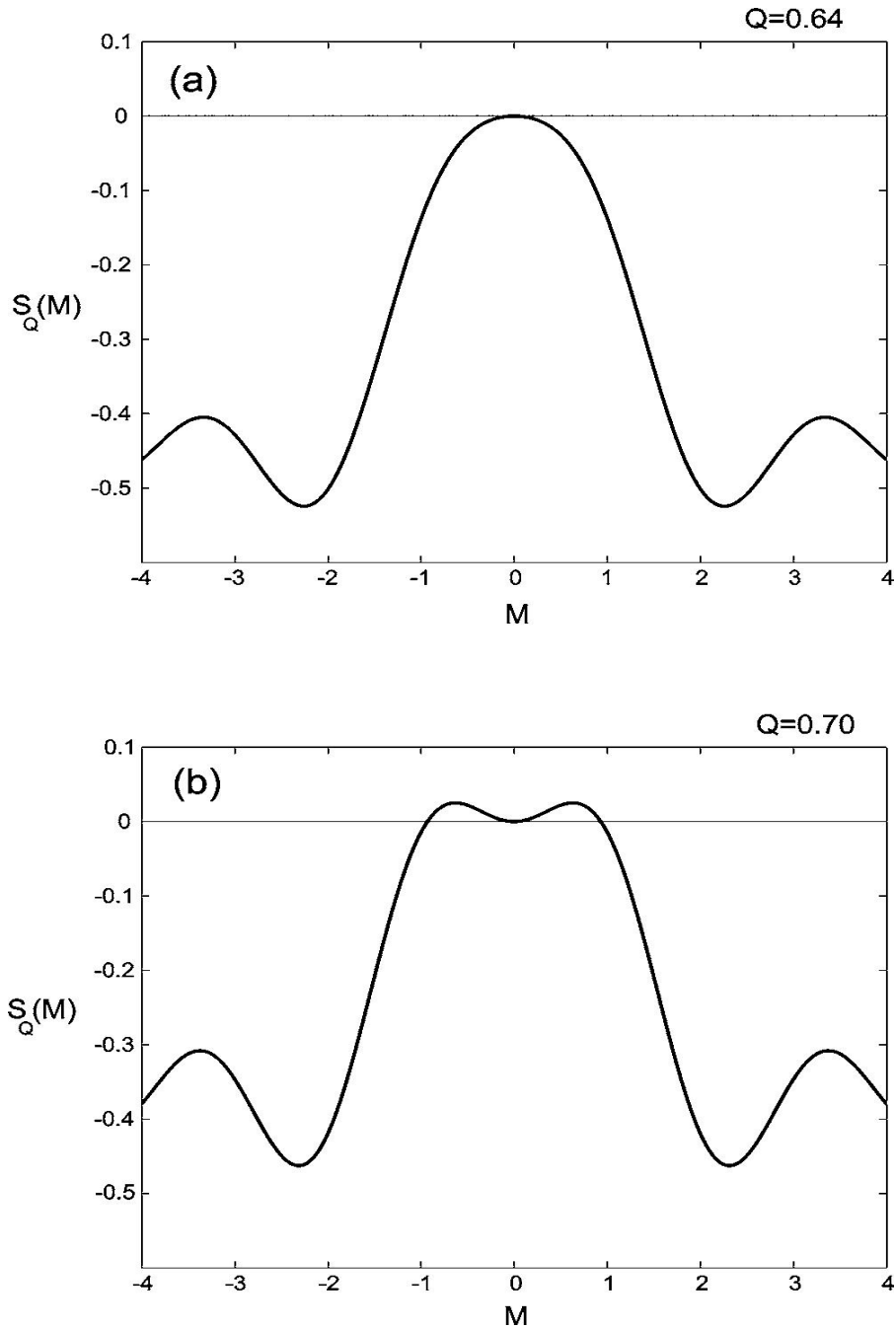


图 4. 两种性质不同的情况下函数  $S_Q(M)$  的图形。A.  $Q=0.64$ : 函数  $S_Q(M)$  在原点处向下凹, 除在  $M=0$  处 ( $S_Q(0)=0$ ) 外, 其余位置均为负。B.  $Q=0.70$ : 图形现在在原点处向上凹, 在  $M=0$  的两侧有两个间隔, 其中  $S_Q(M)$  为正。

### C. 临界第一模式



为了准确地确定  $q$  扭曲态在哪里改变稳定性，我们需要更仔细地检查函数  $S_Q(M)$  的行为。

假设  $Q=qr$  大于，那么  $S_Q(M)$  的图形在原点的两边都有两个正凸点。图 5 a 显示了这种情况 为简单起见，只显示了双边对称图片的右半部分。根据稳定性判据系统 (17)，当且仅当离散集的任意一个成员时， $q$ -扭曲态是不稳定的  $r, 2r$ 。位于  $S_Q(M)$  为正的小间隔内。在图 5 a 所示的示例中，只有最左侧的点  $M=r$  位于凸起下方。这意味着扭曲态对沿第一模  $m=1$  的扰动是不稳定的；换句话说，形式为  $\eta=e^{\lambda t}e^{imx}$  的扰动为 0，因此呈指数增长。

现在考虑一下，如果我们继续减小耦合范围  $r$ ，保持  $q$  不变，会发生什么。

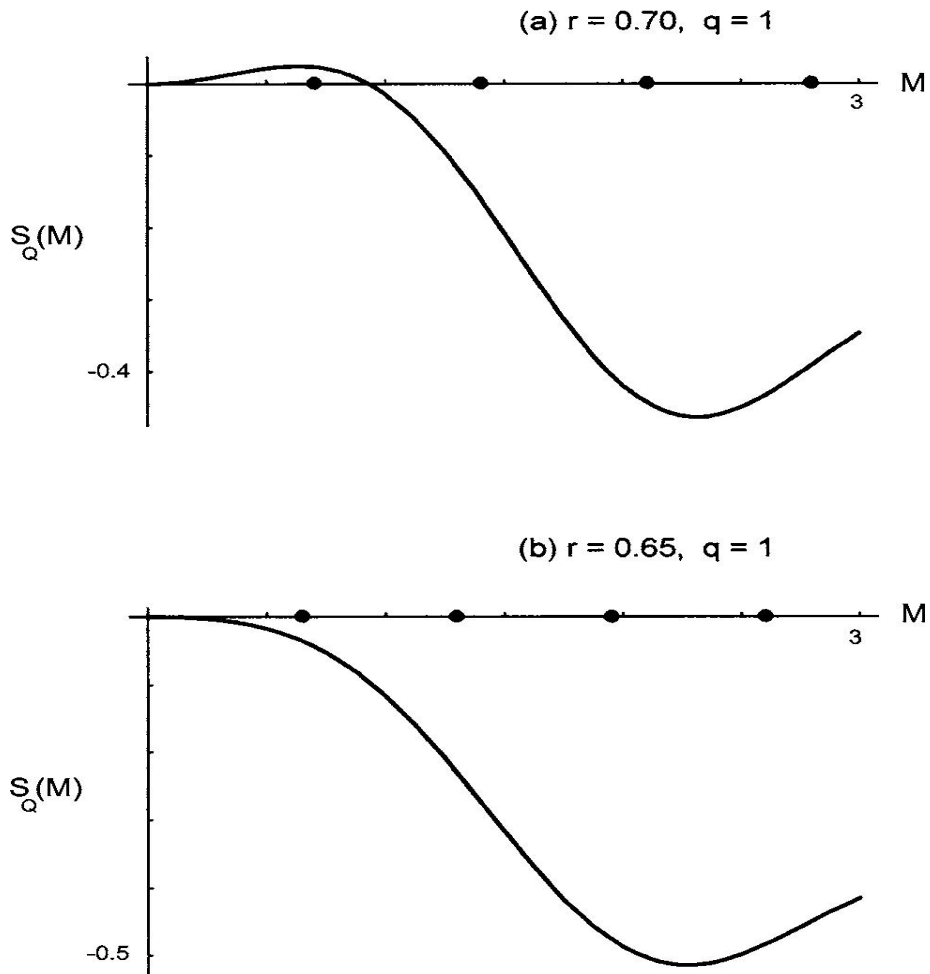


图 5.  $q$ -扭曲态稳定的充要条件的可视化。 $S_Q(M)$  实线的图形与离散集  $M = \{r, 2r, 3r, 4r\}$  黑点的关系表示  $r$  的两个不同值。在这两个例子中,  $q=1$ . a  $r=0.70$ : 这里  $q=q r=0.70$ 。由于  $0.6626$ ,  $S_Q(M)$  的图形在原点处向上凹, 并且在原点右侧有一个正凸点。最左边的黑点, 在  $M=r$  处, 位于  $S_Q(M)$ ; 因此, 如文中所解释的,  $q$  扭曲态对于沿相关模  $m=1$  的扰动是不稳定的。 b  $r=0.65$ , 现在  $Q=q r=0.65$  图形到处都是负数。

图 5 a 将同时以两种方式变化:  $Q=qr$  减小, 将图 5a 中的凸起向下拉到左侧; 同时, 离散集中的所有点  $r, 2r$ 。向左滑动。比赛开始了, 缩小的隆起会在  $M=r$  处最左边的点冲向原点之前吞没它吗? 是的, 通过连续性, 我们知道在  $S_Q(M)$  的图形通过最左边的点的地方一定有一个临界  $r$ , 因为当  $Q$  降到下面时, 图形已经是负定的, 所以所有的点

肯定都在它上图 5b。因此，临界值必须对应于大于  $r_c$ 。

这一论证也表明，第一种模式始终是关键模式；当扭曲态沿着这个模式稳定到无穷小扰动时，它就自动稳定到沿着任何其他模式的扰动。

通过要求临界模式  $m=1$  的稳定性，我们现在可以将等式 (14) 中的无限多个条件归结为  $q$ -扭曲态稳定的以下单个必要充分条件：

**表 1:**  $r_c$  的计算值扭转状态稳定的耦合范围  $r$  的最大值作为  $q$  的函数， $q$  是状态中全扭转的数量。随着  $q$  的增加， $Q_c = qr_c$  的值迅速接近 0.6626。相对误差定义为  $|(Q_c - \mu)/Q_c|$ 。

$q$	$r_c(q)$	$Q_c = qr_c$	Relative error (%)
1	0.6809	0.6809	2.75
2	0.3333	0.6666	0.616
3	0.2214	0.6644	0.268
4	0.1659	0.6636	0.150
5	0.1326	0.6632	0.096

**定理 2:**  $q$ -扭曲态是稳定的当且仅当

$$\frac{1}{2}[f(qr+r) + f(qr-r)] < f(qr). \quad (19)$$

对于给定的  $q$  值，这个不等式在  $r=r_c$  处精确地变成一个等式。从而可以通过数值求解得到  $r_c$

$$f(qr_c+r_c) + f(qr_c-r_c) = 2f(qr_c).$$

表一列出了  $r_c$  作为  $q$  的函数。请注意， $q r_c = 0.6626$ ，正如上面的参数所预期的那样。但差别并不像人们想象的那么大。事实上，表 1 显示，随着  $q$  的增加，乘积  $q r_c$  非常迅速地接近。它们之间的百分比差异如表一所示，即相对误差  $|(qr_c - \mu)/(qr_c)|$ 。

表 1 中最重要的数字是  $r_c=0.6809$ ，即  $q=1$  扭曲状态的稳定边界。这是耦合范围  $r$  的最大值，在该范围内任何扭曲状态都可以稳定。一旦  $r$  超过这个值，我们强烈怀疑唯一可能的吸引子是纯同步。将  $r$  替换为  $2k/n$ ，这意味着

$$k > k_c(n) \approx 0.34n,$$

同步是全局稳定的。注意， $k_{cn}$  的这一理论预测与图 1 前面所示的数值结果一致。

但在提出这一主张时，我们掩盖了一件小事。我们假设吸引子的唯一候选是纯同步和一致扭曲态。我们还没有完全证明这一点。虽然我们从先前的梯度系统论证中知道，所有吸引子都必须是不动点，但我们还没有排除可能存在非均匀扭曲的稳定不动点。似乎一定存在一些具有空间变化扭曲的不动点，它们是唯一可能在均匀扭曲状态失去稳定性时从均匀扭曲状态分叉的物体，但到目前为止，我们还没有证明所有这些状态都是鞍形的。我们也没有排除更奇异的不动点，远离均匀扭曲的不动点。我们推测，如果它们存在的话，其中任何一个都是不稳定的。

#### 四、讨论

我们希望你对上一节的细节没有失去耐心。这里的分析是标准的局部计算，我们这样做一部分是因为我们可以，另一部分是因为这是我们唯一能想到的方法来阐明我们真正感兴趣的全球性问题。具体来说，该分析在很大程度上解释了图 1 中的数值观察，即 sync 对于  $k > k_{cn} \approx 0.34n$  是全局稳定的。但是这种结果比我们想要的要弱得多，

这就是更好地理解系统的流域规模分布图 2，以及它如何随网络结构变化图 3 中的比例  $n/k$  所起的作用。

为什么这些对科学来说更为普遍？有几个原因，既有现实原因，也有理论原因。更好地理解 sync 盆地，即使是非常粗糙和不完整的理解，在不同领域都是有价值的。例如，一个健康的人的心脏至少有两个相互竞争的吸引子：正常的节律，类似于同步，并且可能有一个巨大的吸引子池和心室颤动，一种致命的心律失常，一经发作就稳定，在其他健康个体中每年导致数十万例心脏性猝死。同样，电网，有史以来最大的机器，是动态稳定时，正常运作，但也停电。对这两个例子中的盆地结构有更多的了解，可能有助于我们开发留在理想区域的启发式方法。

诚然，这两个问题是可怕的，可能不是最好的开始。那么，像一个充满贝洛索夫-扎博廷斯基化学反应的培养皿这样理想化的东西怎么样？这种反应的可激发形式与自发振荡形式不同，它有一个稳定的静态，平淡均匀，到处都是锈红色，与有图案的时空状态共存，由一对或多对美丽的蓝色反向旋转螺旋波装饰。任何研究过这种反应的人都知道，如果你从一个复杂的初始条件开始，比如说，通过晃动盘中的液体来剪切一个现有的模式，那么这个系统就更有可能变成螺旋波，而不是均匀静止。为什么？均匀性的概率如何取决于盘子的大小？

关键是，几乎没有人问这样的问题，我们也几乎没有任何技巧来回答这些问题，甚至接近它们。这是机会的象征。任何关于复杂网络

或空间扩展系统中盆地的研究都必然会很快发现有趣的东西。

有那么多自然的问题要问。选择您喜欢的动态系统、任何类型的网络拓扑、任何链接的加权方案，并询问同步的概率如何取决于这些因素。虽然我们没有取得分析进展的策略，但在数值实验揭示了基本规律之后，我们可能会有好的想法。

特别是，检查什么规则（如果有的话）控制同步池的大小在数字上应该很简单。代替图 1 中的  $n/k$  或我们最初打算使用的重新布线参数  $p$ ，您可以根据控制网络拓扑的任何参数绘制结果。例如，具有指定度分布 1 - 3 的随机图通常可以用单个参数来表征，例如泊松度分布的平均值， $a$  的指数幂律分布等等。如果运气好的话，也许统计力学的强大方法可以发挥作用。这种方法已经被证明对计算联想记忆神经网络的存储容量或探索布尔基因网络 Kauffman 模型的盆地结构是有用的。研究盆地结构是如何随网络拓扑结构变化的，是一个很有前途的问题。这方面的一些工作已经开始出现。

祝你狩猎愉快。

## 致谢

这项研究部分得到了福特基金会阿尔弗雷德·斯隆基金会和国家科学基金会。这些研究是在康奈尔大学数学和理论生物学研究所和 IGERT 非线性系统项目的赞助下进行的。我们感谢 Carlos Castillo Chavez 的鼓励和支持，感谢 Danny Abrams 在准备手稿时提供的帮助，感谢 Jim Sethna 提出了流域规模分布比例的启发式论证。

## 参考文献

- 1S. H. Strogatz, "Exploring complex networks," *Nature London* 410, 268 2001 .
- 2R. Albert and A.-L. Barabasi, "The statistical mechanics of complex networks," *Rev. Mod. Phys.* 74, 47 2002 .
- 3M. E. J. Newman, "The structure and function of complex networks," *SIAM Rev.* 45, 167 2003 .
- 4L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Master stability functions for synchronized coupled systems," *Phys. Rev. Lett.* 80, 2109 1998 .
- 5M. Barahona and L. M. Pecora, "Synchronization in small-world systems," *Phys. Rev. Lett.* 89, 054101 2002 .
- 6P. M. Gade and C.-K. Hu, "Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions," *Phys. Rev. E* 62, 6409 2000 .
- 7X. F. Wang and G. Chen, "Synchronization in small-world dynamical networks," *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 12, 187 2002 .
- 8H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim, "Synchronization on small-world networks," *Phys. Rev. E* 65, 026139 2002 .
- 9T. Nishikawa, A. E. Motter, Y.-C. Lai, and F. C. Hoppensteadt, "Heterogeneity in oscillator networks: Are smaller worlds easier to synchronize?" *Phys. Rev. Lett.* 91, 014101 2003 .
- 10H. Hong, B. J. Kim, M. Y. Choi, and H. Park, "Factors that predict better synchronizability on complex networks," *Phys. Rev. E* 69, 067105 2004 .
- 11A. E. Motter, C. Zhou, and J. Kurths, "Network synchronization, diffusion, and the paradox of heterogeneity," *Phys. Rev. E* 71, 016116 2005 .
- 12M. Chavez, D.-U. Hwang, A. Amann, H. G. E. Hentschel, and S. Boccaletti, "Synchronization is enhanced in weighted complex networks," *Phys. Rev. Lett.* 94, 218701 2005 .
- 13A. Roxin, H. Riecke, and S. A. Solla, "Self-sustained activity in a smallworld network of excitable neurons," *Phys. Rev. Lett.* 92, 198101 2004 .
- 14X. Guardiola, A. Diaz-Guilera, M. Llas, and C. J. Perez, "Synchronization, diversity, and topology in networks of integrate and fire oscillators," *Phys. Rev. E* 62, 5565 2000 .
- 15Y. Moreno and A. F. Pacheco, "Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks," *Europhys. Lett.* 68, 603 2004 .
- 16H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim, "Phase ordering on small-world networks with nearest-neighbor edges," *Phys. Rev. E* 65, 047104 2002 .
- 17D. He, G. Hu, M. Zhan, W. Ren, and Z. Gao, "Pattern formation of spiral waves in an inhomogeneous medium with small-world connections," *Phys. Rev. E* 65, 055204 2002 .
- 18M. Timme, F. Wolf, and T. Geisel, "Topological speed limits to network synchronization," *Phys. Rev. Lett.* 92, 074101 2004 .
- 19J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt, "Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators," *Phys. Rev. E* 71, 036151 2005 .

- 20G. Korniss, M. A. Novotny, H. Guclu, Z. Toroczkai, and P. A. Rikvold, "Suppressing roughness of virtual times in parallel discrete-event simulations," *Science* 299, 677 2003 .
- 21B. R. Trees, V. Saranathan, and D. Stroud, "Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model," *Phys. Rev. E* 71, 016215 2005 .
- 22T. I. Netoff, R. Clewley, S. Arno, T. Keck, and J. H. White, "Epilepsy in small-world networks," *J. Neurosci.* 24, 8075 2004 .
- 23H.-D. Chiang and J. S. Thorp, "Stability regions of nonlinear dynamical systems: A constructive methodology," *IEEE Trans. Autom. Control* 34, 1229 1989 .
- 24E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, 2nd ed. Cambridge University Press, New York, 2002 .
- 25D. J. Watts and S. H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks," *Nature London* 393, 440 1998 .
- 26N. Kopell, W. Zhang, and G. B. Ermentrout, "Multiple coupling in chains of oscillators," *SIAM J. Math. Anal.* 21, 935 1990 .
- 27E. Niebur, H. G. Schuster, D. M. Kammen, and C. Koch, "Oscillatorphase coupling for different two-dimensional network connectivities," *Phys. Rev. A* 44, 6895 1991 .
- 28G. B. Ermentrout, "The behavior of rings of coupled oscillators," *J. Math. Biol.* 23, 55 1985 .
- 29L. G. Morelli, G. Abramson, and M. N. Kuperman, "Associative memory on a small-world neural network," *Eur. Phys. J. B* 38, 495 2004 .
- 30R. Serra and M. Villani, "Perturbing the regular topology of cellular automata: Implications for the dynamics," in *Cellular Automata: Fifth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, ACRI 2002*, edited by S. Bandini, B. Chopard, and M. Tomassini Lect. Notes Comput. Sci. 2493, 168 2002 .