

重新审视同步池的大小

Robin Delabays,1,2 Melvyn Tyloo,1,3 and Philippe Jacquod1

1 瑞士西部应用科学大学工程学院, CH-1950, 瑞士

2 瑞士日内瓦大学数学研究部, CH-1211 Gene`ve

3 瑞士洛桑理工学院物理研究所 (EPFL), CH-1015 洛桑

2017年6月2日收到; 2017年9月22日接受; 2017年10月9日在线发布

在动力系统中, 不动点解的完全稳定性取决于它们的吸引盆。一般来说, 对这些盆地的结构进行表征是一项复杂的任务, 特别是在高维方面。最近的工作主张通过相关吸引盆地的相对体积来量化动力系统不动点的非线性稳定性[Wiley et al., *Chaos* 16, 015103 (2006) and Menck et al. *Nat. Phys.* 9, 89 (2013)]. 在这里, 我们重新讨论这个问题, 并提出一个有效的数值方法来估计这些体积。该算法首先识别稳定的不动点。其次, 考虑了一组初始条件, 这些初始条件随机分布在以每个不动点为中心的超立方体表面上。这些初始条件是动态演化的。每个吸引池的线性大小最终由收敛到不动点的初始条件的比例决定。有了这个算法, 我们重新讨论了 Wiley 等人在一篇开创性论文[*Chaos* 16, 015103 (2006)]中考虑的问题, 该论文启发了本手稿的标题, 并考虑了循环上的等频率 Kuramoto 模型。该模型的不动点由整数绕组数 q 和振子数 n 表征 $(1-4q/n)^n$ 。我们发现盆地体积的比例、与高斯分布形成对比 Wiley 等人研究中假设的行为。最后, 我们证明了我们的方法对具有不同固有频率的耦合振子的复杂模型和网状网络的适用性。

<https://doi.org/10.1063/1.4986156>

许多自然系统的耦合元素, 如萤火虫, 起搏器细胞, 或电网, 表现出

同步现象。当一个系统同步时，由于它们之间的耦合，它的每个组件相对于其他组件的行为是一致的。科学和工程各个领域的一个中心问题是了解这种同步状态对系统中的外部扰动或不完善有多强的鲁棒性。从数学上讲，这个问题通常很难解决。在这里，我们提出一种易于处理的数值方法，首先确定同步状态，然后计算使系统收敛回其初始同步状态。我们的这种方法使我们能够以一种简单的方式处理大型复杂系统合理的计算时间和良好的分辨率，而对于所提出的数值方法，到目前为止情况并非如此。

一、引言

耦合动力系统模型应用广泛研究复杂系统中的集体行为。一个尤其令人费解的是同步现象，其中，不同的单个动力系统在充分强耦合时开始表现出一致的行为。文献[3-7]引入了 Kuramoto 模型来描述这种同步行为[8,9]。这个模型考虑了一组 n 个耦合谐振子，具有角度坐标 θ_i 和固有频率 P_i

$$\dot{\theta}_i = P_i - \sum_j K_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

其中 $K_{i,j} \in R$ 是振荡器 i 之间的耦合常数和 j 。在其原始公式中，Kuramoto 模型考虑了完全相同的全对全耦合， $K_{i,j} \in K/n$ 。[8,9] 发现对于超过临界值 K_c 的耦合常数 K ，有限的非空集 $F \subset \{1, \dots, n\}$ ；振荡器同步，即 $\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j = 0, i, j \in F$ 。这种同步，振荡器以相同的频率旋转 $\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j = 0$ 但不一定是同一相位，称为频率同步。相位同步，其中 $\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j = 0$ ，一

一般来说，对于不均匀的固有频率是无法实现的。在这篇手稿中，“同步”指的是“频率同步”。

K_c 的值可以通过求解隐式方程来计算。文献 [7, 10 - 12] 临界耦合 K_c 取决于固有频率 $g(P)$ 的分布。特别地，如果分布 $g(P)$ 的支持是紧凑的，则是完全同步的，即 $\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j = 0, i, j \in F$ 。

Kuramoto 模型在不同的版本中已经进化成为研究同步行为的范例。它的流行源于它的简单公式，它允许一个易于处理的分析处理，同时仍然捕捉到许多真实系统的同步行为的本质，在不同的领域，如物理，化学，生物学或电学这两个优点解释了科学与工程中的黑本模型，参考文献中回顾了许多概括 [6-7]。

Kuramoto 模型中的全频率同步是在公式 (1.1) 的固定点达到。一个自然的问题是然后评估这些不动点的稳定性。大多数作品关于动力系统不动点的稳定性 Lyapunov [19, 20] 在第十九世纪末的开创性工作世纪。李雅普诺夫首先研究了线性稳定性，通过线性化动力学在一个给定的不动点。对于小偏差，动力学由一个稳定矩阵确定，其特征值称为 Lyapunov 指数。当不动点的 Lyapunov 指数均为非正时，不动点是线性稳定的。这保证了足够小的偏差以指数级的速度变为零。然而，线性稳定性是一个局部概念，没有给出系统在大扰动下的稳定性信息。

李雅普诺夫用他的第二个定理超越了线性稳定性方法，该方法基于现在被称为 Lyapunov 函数。[19, 20] 后者推广了动力系统状态的能量概念。系统的 Lyapunov 函数可用于确定给定不动点 [21, 22] 的吸

引盆，该不动点是动态收敛到该不动点的所有初始条件的集合。一个固定点的稳定性的整体度量是由其吸引盆地的体积给出的，这被称为盆地稳定性[1, 2, 23]。显然，吸引盆地越大，它就越有可能动态地到达相应的固定点。这给出了不动点稳定性的全局测度。

在全对全耦合振子网络中，已知同步态吸引盆体积的严密估计。[24]关于循环网络吸引盆的了解要少得多。正如 Korsak[25]在 1972 年指出的，在电网的背景下，循环网络上的 Kuramoto 模型允许几个稳定的不动点，其特征是绕组数（见第二）是的。在参考文献 1 中，Wiley 等人考虑了这样一个具有相同频率的网络拓扑，并研究了稳定不动点吸引盆的体积与其绕组数的关系。特别是，他们对系统达到阶段的可能性感兴趣同步状态。这种可能性与相位同步状态吸引盆的体积直接相关，他们称之为“同步盆”。从随机初始条件开始，他们对系统进行数值演化，直到收敛到一个稳定的不动点。然后根据收敛到每个不动点的初始条件的比例来估计吸引池的体积。发现吸引盆的体积相对于卷绕数 q 服从高斯分布，如图 1（红点）所示。这个程序有一个问题随机选择初始条件的绕组数也服从高斯分布。

$$p(q) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \exp(-q^2/2\sigma^2). \quad (1.2)$$

从图 1 所示的数据中，我们得到了标准偏差 $\sigma=2.63$ ，用于初始条件下的绕组数分布和较窄分布收敛不动点的 $\sigma=1.63$ （后者的值与参考文献 1 一致）。一旦人们意识到选取一个初始条件类似于一个随机变量，就可以很容易地理解初始条件的高斯分布沿着循环的节点指数对应于一个时间步长指数，每个节点上的角度给出了随机游走的程度和

方向。大的绕组数对应于具有大偏移的随机游动。这个类比解释了获得的初始绕组数的高斯分布。

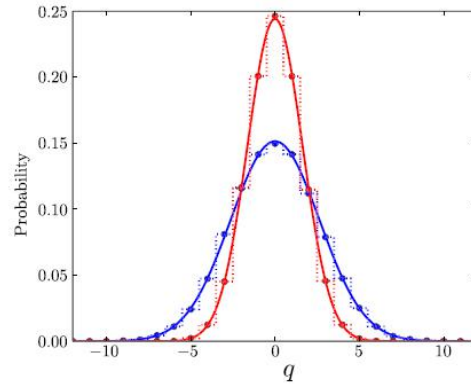


图 1. 等频率 Kuramoto 模型的初始(蓝色)和最终(红色)绕组数在循环中的分布[等式(2.1)], $n=83$ 个节点。初始状态是随机选择的。连续曲线是用拟合的高斯曲线 $\sigma=2.63$ (蓝色) 和 $\sigma=1.63$ (红色)。

我们还观察到初始绕组的绕组数, 收敛不动点的条件和性质显著相关, 相关系数为 0.47。因此, 如果对初始条件没有足够的分辨力, 则终态缠绕数的分布至少可以部分地反映 q 的初始分布, 而不是吸引盆的体积。由于状态空间的高维性 (图 1 $n=83$ 和 $n=80$), 随机初始条件下的模拟将需要不可行的运行次数来代表性地覆盖整个状态空间。

据我们所知, 除了参考文献 1 之外, 唯一的一篇论文, 特别关注循环网络上的 Kuramoto 模型参考文献 [27], 它解析地获得了单向耦合 Kuramoto 振子循环吸引池体积的下界。

因此, 我们通过构建一个新的系统数值方法。我们的方法是首先找到方程 (1.1) 中描述所有可能频率同步状态的所有稳定不动点, 然后在随机方向上以增加的幅度扰动它们, 以评估它们吸引盆的体积。体积是由仍然收敛到初始不动点的最大扰动的大小来估计的。在频率相同的单周期情况下, 可以解析地识别所有稳定的不动点, 并且问题足够容易处理, 可以得到吸引池体积的解析估计, 我们用数值方

法证实了这一点。我们证明了当 $n \gg 1$ 和 q 不太小时，吸引池的体积按 $V_q \approx (1-4q/n)^n$ 而不是 Wiley 等人研究中的高斯定律。[等式 (1.2)]。我们然后将微扰过程推广到循环网络，频率不相同的网络相同的频率。我们的数值方法保证了我们用一系列具有代表性的初始条件来研究每个吸引盆地。它是基于 (i) 一个数值程序系统地寻找方程 (1.1) 在任何网状网络上的稳定不动点和 (ii) 上述摄动程序。我们相信我们的方法可以应用于其他领域的研究，如平面自旋玻璃[28]或凝聚态物理中的无序约瑟夫森结阵列[29]。

二、单循环

我们首先回顾了参考文献 1 中的模型，并考虑了一个周期上的 Kuramoto 模型，其中 n 个节点的频率为 $P_j \equiv P_0$ ，对于所有 i 和相同的耦合 $K_{i,j} \equiv K$ ，对于所有连接的节点 i 和 j 。在以角频率 P_0 旋转的一帧中，变量发生变化后 $\theta_i \rightarrow \theta_i + P_0 t$ ，等式 (1.1) 减少到

$$\dot{\theta}_i = -K \sin(\theta_i - \theta_{i-1}) - K \sin(\theta_i - \theta_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

其中指数取 n 模。

我们定义角度差 $\theta_i - \theta_j$ 取区间中的模 2π 。式 (2.1) 的不动点满足

$$\Delta_{i,i+1} = \Delta_{i-1,i} \quad \text{or} \quad \Delta_{i,i+1} = \pm\pi - \Delta_{i-1,i}, \quad (2.2)$$

选择右侧前面的标志，以确保 (2.2) 式子成立。

给定一个角向量 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 我们定义了圈上的整数圈数

$$q(\vec{\theta}) := (2\pi)^{-1} \sum_{k=1}^n \Delta_{k+1,k}. \quad (2.3)$$

当求循环中角度差的和时，我们必须以 2π 的整数倍结束，以保证角度的单值性。因此， $q(\theta) \in Z$ 。

注 1. 对于任何图拓扑，我们总是可以在每个循环上定义一个绕组数。一个不动点的特征是一个绕组向量，它的分量是每个周期上的绕组数。

根据参考文献 30，式 (2.1) 的任何稳定不动点，必须有所有的角度差在相邻的振荡器 $[-\pi/2, \pi/2]$ 。方程 (2.2) 意味着有一个唯一的稳定不动点， q 带绕组号。

$$\Delta = 2\pi q/n \iff \theta_i^{(q)} = 2\pi qi/n + \theta_0^{(q)}, \quad (2.4)$$

对我来说 $i=1, \dots, n$ 、其中 θ 是任意均匀角度偏移。这意味着要使固定点稳定，绕组数不能大于 $q_{\max} = \text{Int}(n/4)$ ，否则意味着角度差大于 $p=2$ 。稳定固定点的绕组数从 $-q_{\max}$ 到 q_{\max} ，等于 $2q_{\max} + 1$ 稳定不动点[30]，注意如果 n 是4的倍数绕组数 q_{\max} 的点的的所有 Lyapunov 指数均为零，其吸引盆的测度为 0[31]。

如果一个 30 或 32 个以上的角差大于 $\pi/2$ ，则公式 (2.1) 的固定点是不稳定的。在这种情况下，固定点具有 $n-j$ 角差。在以下的角叉之下， $\Delta_{k+1,k} \equiv \Delta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ， $\Delta_{k+1,k} \equiv \pm\pi - \Delta$ ， $j > 0$ ， $\sum_k \Delta_{k+1,k} = 2\pi q$ 。

A. 相同频率：分析方法

对于具有相同频率的长度为 n 的循环网络，我们导出了吸引池体积的解析表达式。我们的方法是用以不动点为中心的超立方体近似给

定稳定不动点的吸引盆, 超立方体的半径是到最近不稳定不动点的距离。

因为式 (2.1) 在所有角度 θ 的恒定位移下是不变的 $\theta_0^{(q)}$, 我们将在与向量正交的超平面 H_{n-1} 中工作 $(1; \dots; 1)$. 角向量 $\theta_0^{(q)}$ 式 (2.4) 中投影在 H_{n-1} 上的

$$\theta_i^{(q)} = \frac{2\pi q}{n} i - \frac{n-1}{n} q\pi. \quad (2.5)$$

根据参考文献 33, 式 (2.1) 中的不动点在角空间中具有唯一的不稳定方向, 当且仅当它在相邻振子之间具有大于 $\pi/2$ 的单个角差时。这种不稳定不动点称为 1 鞍点。然后, 考虑一个绕组编号为 q' 的 1 鞍点, 其中第 k 个角差大于 $\pi/2$ (2.2) 和 (2.3), 其绕组号 q' 由下式给出

$$(n-1) \cdot \Delta' + \pi - \Delta' = 2\pi q' \iff \Delta' = \frac{2q' - 1}{n-2} \pi. \quad (2.6)$$

这允许我们计算 1 鞍角向量的分量, φ' 问题, H_{n-1} 预测 (见附录

A)

$$\varphi_i^{(q')} = \pi \left[\frac{2q' - 1}{n-2} i + \frac{-2n^2 k + 2nk - 8q'k - n}{2n(n-2)} + T_i^{(k)} \right], \quad (2.7)$$

其中,

$$T_i^{(k)} = \begin{cases} \frac{10nq' - n^2}{2n(n-2)}, & \text{if } i < k, \\ \frac{2nq' + n^2}{2n(n-2)}, & \text{if } i \geq k. \end{cases} \quad (2.8)$$

我们在数值上发现, 当稳定不动点和 1 鞍具有相同的绕组数时,

它们最接近（见附录 C）。因此，我们调查案件 $q=q'$ 问题。角度之间的差异很容易得到

$$\theta_i^{(q)} - \varphi_i^{(q)} = \begin{cases} \frac{(1+2i-2k+n)(n-4q)}{2(n-2)n} \pi, & \text{if } i < k, \\ \frac{(1+2i-2k-n)(n-4q)}{2(n-2)n} \pi, & \text{if } i \geq k, \end{cases} \quad (2.9)$$

给出了稳定不动点和不稳定 1 鞍点之间的距离。

$$\|\vec{\theta}^{(q)} - \vec{\varphi}^{(q)}\|_{\infty} = \frac{(n-1)(n-4q)}{2(n-2)n} \pi. \quad (2.10)$$

特别是，大 n 极限是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{\theta}^{(q)} - \vec{\varphi}^{(q)}\|_{\infty} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{q}{q_{\max}} \right). \quad (2.11)$$

我们注意到我们失去了对 k 的依赖，这意味着稳定不动点 $\theta(q)$ 与具有相同绕组编号的所有 1 鞍座等距。这表明吸引盆在 1 鞍点方向上是各向同性的。

自从 $\theta(q)$ 对于 $n \gg 1$ ，吸引盆的体积 V_q 很好地近似于边的超立方体 $\|\theta(q) - \varphi(q)\|_{\infty}$ ，直到一个常数因子，即

$$V_q \sim \|\vec{\theta}^{(q)} - \vec{\varphi}^{(q)}\|_{\infty}^n \sim (1 - q/q_{\max})^n. \quad (2.12)$$

作为 $q_{\max} = \text{Int}(n/4)$ ；在极限 $n \rightarrow \infty$ 表示固定 q 。

我们在数值上进一步发现，1 鞍比 p 鞍更接近稳定不动点， $p > 1$ （见附录 C）。这表明公式（2.12）低估了吸引盆地的体积。

注 2. 在我们的惯例中，角度差取间隔 $[-\pi, \pi]$ 。尝试构造一个 1 鞍 $q'=0$ ，一个获得

$$\Delta' = -\frac{\pi}{n-2} \iff \pi - \Delta' = \frac{n-1}{n-2}\pi > \pi. \quad (2.13)$$

以这种方式获得的角矢量具有绕组编号 $q'=1$. 这意味着没有绕组编号为零的 1 鞍。方程式 (2.9) 适用于 $q \geq 0$. 可以检查是否存在绕组号为 $q=0$ 表示任何 $p \geq 1$.

B. 相同频率：数值方法

为了验证公式 (2.12) 的标度，我们用数值方法估计了公式 (2.1) 中每个稳定不动点的吸引池体积。对于具有相同频率的长度为 n 的循环网络，所有稳定的不动点都已知并由式 (2.5) 给出。估计每小时吸引池的体积 $\theta_0^{(q)}$ ，我们将会进行随机选取 d 个归一化扰动向量 $\vec{\epsilon}_j \in \mathcal{H}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ，然后我们考虑扰动态

$$\vec{\eta}_{q,j,\alpha} := \vec{\theta}^{(q)} + \pi\alpha\vec{\epsilon}_j, \quad (2.14)$$

作为方程 (2.1) 动力学的初始条件 $\alpha \geq 0$ 级。参数 α 从零增加到 $\alpha_{q,j}$ ，我们将其定义为最大值，使得 $\eta_{q,j}$ 会聚回 $\theta_0^{(q)}$ 在方程 (2.1) 的动力学下。稳定不动 $\theta^{(q)}$ 之间的距离其在 ϵ_j 方向的吸引盆边界由 $\pi\alpha_{q,j}$ 给出。

我们对 n 的方程 (2.1) 的动力学进行了四阶龙格库塔模拟 $n=23$; 43; 83; 163; 和 323。选择这些值是为了使最大绕组数的吸引盆体积最大化 $q_{\max} = \text{Int}(n/4)$ ，如上所述，当 n 是 4[31] 的倍数，我们取 $d=1000$ 时，它就消失个随机选择的扰动方向，并以 0.01 的步长增加 α 。对于每一个 q ，我们就可以估计 α 边以 $\theta_0^{(q)}$ 为中心的超立方体的比

例 $\theta_0^{(q)}$ 属于它的吸引盆地

$$p_q(\alpha) := \frac{\text{Card}\{\vec{\eta}_{q,j,\alpha} | \vec{\theta}(0) = \eta_{q,j,\alpha}, \vec{\theta}(t \rightarrow \infty) = \vec{\theta}^{(q)}\}}{d}, \quad (2.15)$$

这张卡代表了乐队的基本阵容。在图 2 中，我们看到，对于 α 的小值，这个比例仍然接近 1，并且在 α 的某个 q 相关值附近迅速下降到零。给定阈值 $\tau \in [0,1]$ ，然后我们可以定义

$$\alpha_\tau(q) := \sup\{\alpha | p_q(\alpha) \geq \tau\}, \quad (2.16)$$

作为一个典型的线性大小的吸引盆地。图 2 中曲线的突然下降意味着 τ 的精确值对于理解 $\alpha_{q,j}$ 的行为不太重要； j 关于 q ，假设 τ 既不接近 1 也不接近 0，我们任意选择 $\tau=0.7$ ，但检查了 τ 的类似结论 $\tau=0.6$ 和 $\tau=0.8$ 。

在图 3 中，我们绘制为 $\alpha_\tau(q)$ 适用于各种系统尺寸。除了一个饱和和对于小 q 值，我们观察到 α_τ 相对于 q 的线性行为。此外，当根据 $q=q_{\max}$ 绘制曲线时， n 的不同值变化超过一个数量级的曲线几乎被重新缩放到彼此的顶部。两个发现都证实了公式 (2.10)。图 4 显示了每个 $\alpha_{q,j}$ 值的四分位数；定义为 $\alpha_\tau(q)$ 对于 $\tau=0.25,0.5,0.75$ 和极值 $\alpha_{q,j}$ ；对于 $n=323$ ，以及稳定不动点之间的距离 $\theta_0^{(q)}$ 还有 1 鞍 $\phi_0^{(q)}$ 由式 (2.10) 给出（虚线）。除小 q 外，所有曲线都具有线性行为。数值计算和公式 (2.10) 之间的差异来自这样一个事实，即随机扰动不是以最短距离的方向对准一个单鞍。换句话说，式 (2.10) 是稳定不动点之间距离的下界 $\theta_0^{(q)}$ 以及吸引盆地的边界。如上所述，1 鞍点比其他鞍点更接近稳定不动点，这些鞍点也在吸引盆的边界上。我们用 1 鞍估计吸

引盆体积的方法低估了它，但清楚地给出了它对 n 和 q 的参数依赖关系。

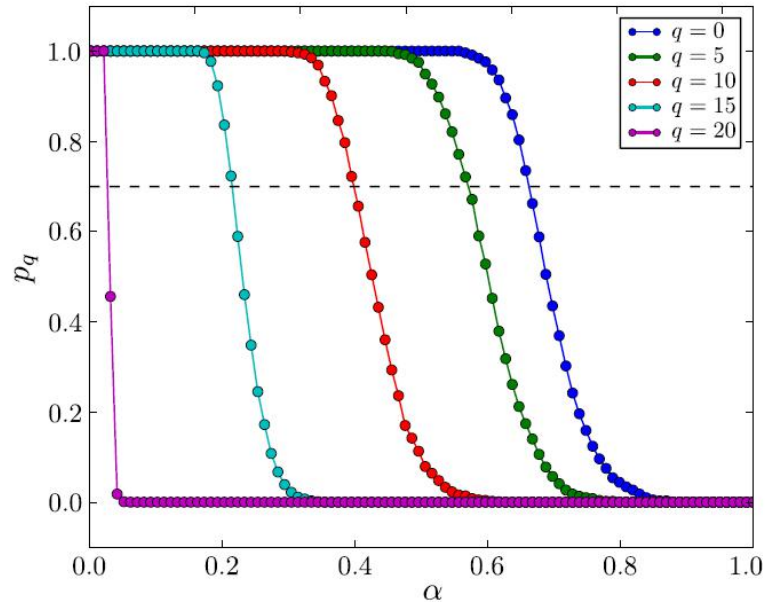


图 2. 关于等式 (2.14) 中的参数 α ，对于单周期上具有 n 的等频率 Kuramoto 模型，收敛到其参考稳定不动点的扰动状态的比例 $n=83$ 节点和绕组编号 $q=0; 5; 10; 15$ ；从右到左各 20 个。

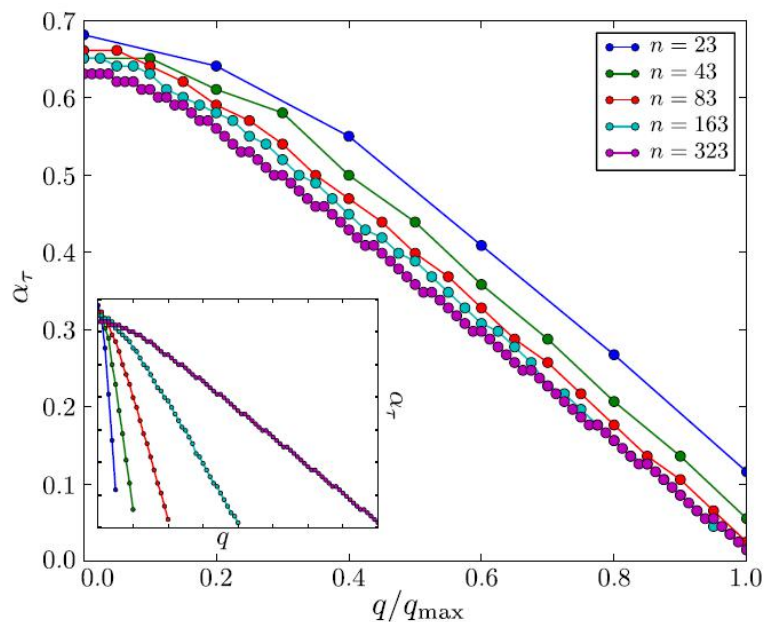


图 3. 关于式 (2.1) 模型的绕组数，吸引池的典型线性尺寸。阈值 τ_α 的定义使得 70% 的 1000 个扰动态 $\eta_{q,\alpha,j}$ 收敛到 θ_q 绘制为 $q=q_{\max}$ (主面板) 和 q (插入) 的函数， $n=23; 43; 83; 163$ 和 323。

C. 重新审视同步池的大小

公式 (2.12) 中获得的标度, 对于较大的 n 值, 不同于参考文献 1 中假设的高斯标度。此处使用的数值方法在角度空间中随机选取初始条件 $[-\pi, \pi]^n$, 这需要为了达成一个解决方案, 需要进行大量的运行, 这样就可以对吸引人的盆地的体积进行公平的估计。即使每个角度方向的中等分辨率为 0.5, 一个人大概需要 $(2\pi/0.5)^{83} \approx 10^{91}$ 不同的初始条件, 这在数值上显然是不可行的。因此, 基于蛮力数值方法的估计无法捕捉到大维动力系统的标度行为, 特别是对于具有很小吸引域的大缠绕数。

我们的方法克服了这个困难。利用我们对稳定不动点的认识, 我们可以把吸引盆地的勘探限制在稳定不动点的附近。避免了扫描整个角度空间, 大大减少了计算时间, 提高了方法的精度。

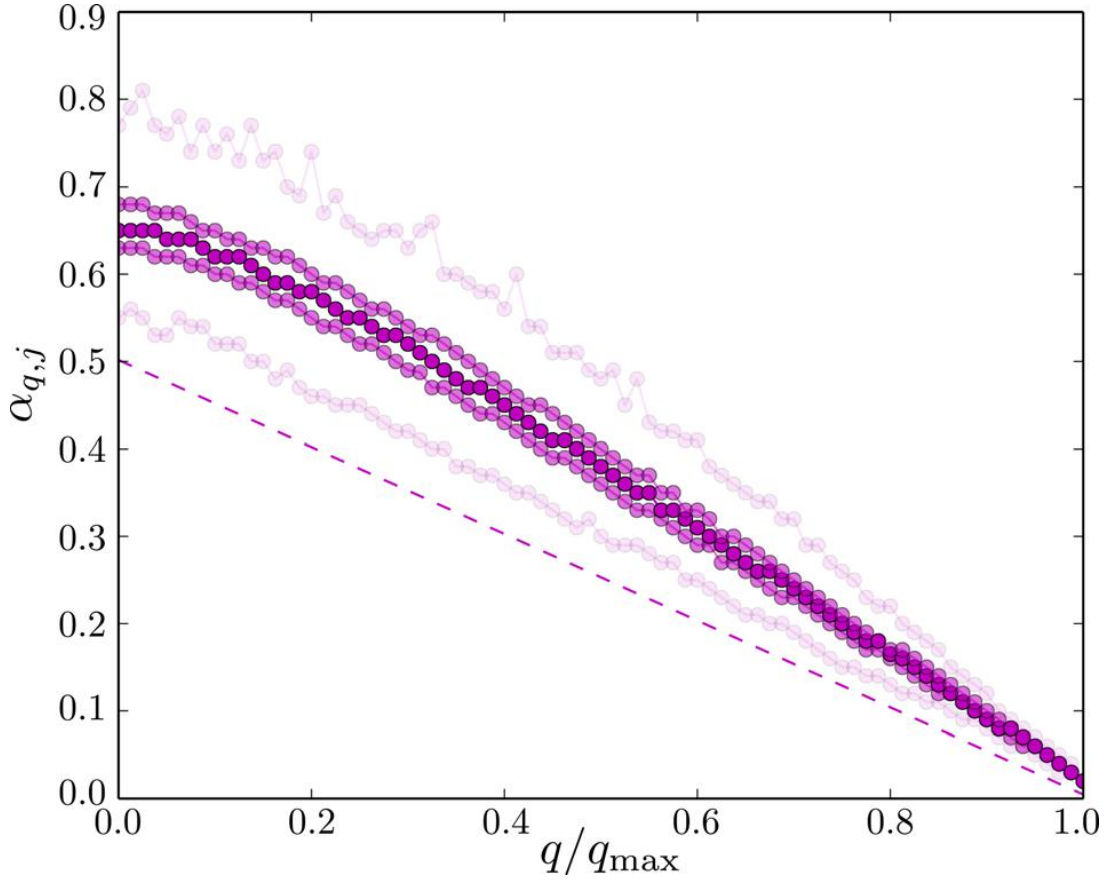


图 4. $\alpha_{q,j}$ 值的四分位数, 从 1000 个随机方向获得紫色点, 表示 $n=323$. $\alpha_{q,j}$ 的值在两个垂直连续点之间。虚线: 稳定定点之间的距离 $\theta_0^{(q)}$ 还有马鞍按 $\varphi_0^{(q)}$ 式 (2.10) 计算。

D. 不相同频率

我们介绍了我们的方法在最简单的情况下, 一个周期网络具有相同的频率。为了概括我们对这个问题的理解, 我们现在将不相同的频率添加到同一循环网络中。即使我们不能解析地得到稳定的不动点, 我们也可以用数值方法找到它们, 然后应用与相同频率情况相同的数值方法。取代公式 (2.1), 我们的单循环模型现在定义为

$$\dot{\theta}_i = P_i - K \sin(\theta_i - \theta_{i-1}) - K \sin(\theta_i - \theta_{i+1}), \quad (2.17)$$

随机均匀地取, 满足 P_i . 对于较小的 $[-\beta, \beta]$ 值, 不相同的频率几乎

总是导致不动点的微小变化，因此 $\sum_i P_i = 0$ ，吸引盆的体积应该不会有太大的变化。为了找到式 (2.17) 的稳定不动点，我们从 β 的不动点开始在公式 (2.5) 中给出 $\beta=0$ ，然后用公式 (2.17) 的四阶龙格-库塔实现，同时逐渐增加 β 至所需值。这使我们能够识别并在数值上跟踪稳定不动点的位置 $\theta_0^{(q)}\{P_i\}$ ，它不再由式 (2.5) 给出，但仍以绕组数 q 为特征。然后，我们在 1000 个随机方向上扰动这个稳定的不动点，其幅度如式 (2.14) 所示，并采用与第 2.2 节相同的程序。在第二部分 B 中评估了吸引盆地的体积。

结果如图 5 所示 $n=83$ 和 $\beta=0,0.01,0.02,0.05,0.1$ ；对于既不太小也不太大的 q 值， α_τ 的线性行为保持不变，特别是对于小 β 。可以预料，当我们加上一些有限的固有频率时， q 值大的不动点就会失去稳定性。更令人惊讶的是，乍一看，大 q 的 α_τ 突然下降，而小 q 几乎没有变化。我们为这种行为提供了解释。

方程 (1.1) 的动力学由 Lyapunov 函数的梯度给出

$$\mathcal{V}(\vec{\theta}) = - \sum_i P_i \theta_i - \sum_{i < j} K_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j), \quad (2.18)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta_i} = \dot{\theta}_i. \quad (2.19)$$

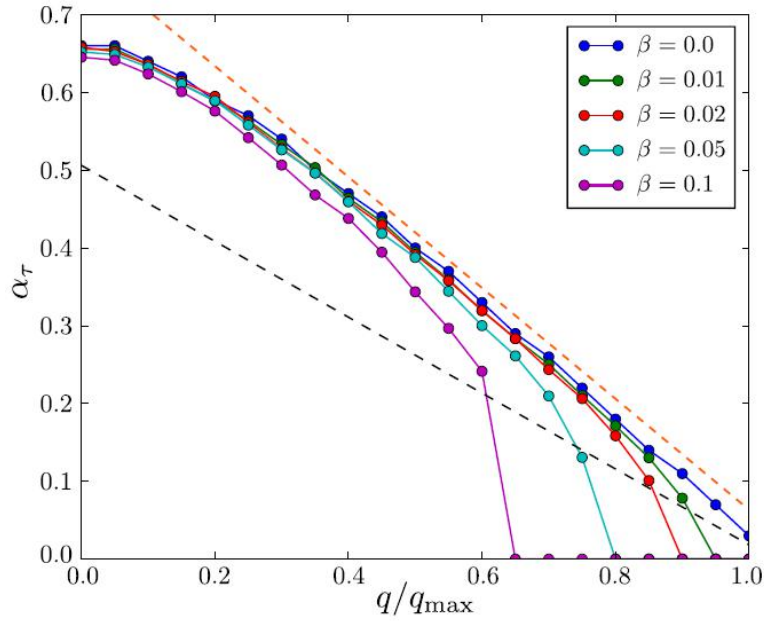


图 5. 关于式 (2.17) 模型的绕组数, 吸引池的典型线性尺寸。阈值 α_τ 的定义使得 70% 的 1000 个扰动态 $\eta_{q,j,\alpha}$ 收敛到 $\theta_0^{(q)}$ 绘制作为 n 的 $q=q_{\max}$ 的函数频率分布 $\beta=0,0.01,0.02,0.05,0.1$; 黑色虚线是等式 (2.10), 橙色虚线是眼睛的线性引导线。

增加 β 修改 V [等式 (2.18) 右侧的第一项], 并使不动点在角度空间中移动。最终得到一个稳定的不动点 $\theta_0^{(q)}$ 会遇到一个不稳定的不动点, 然后通过鞍形分叉而失去稳定性。在图 6 中, 我们给出了一个周期上 V 的示意图, 在角空间中投影到一个适当的方向上, 使得稳定和不稳定的固定点在一个角维度上对齐。只要一个固定点保持稳定, 它吸引盆地的体积就不会有太大的变化 [比较图中的绿色部分]。6(a) 和 6(b)]。当 β 变得太大时, 不动点突然消失。由于 α_τ 是许多随机选择方向上的平均值, 当稳定不动点消失时, 它的值突然下降。

在附录 B 中, 我们进一步估计了给定频率分布宽度 β 下可能的最大绕组数, 并发现它与数值观测的最大绕组数在定性上是一致的。

三、 网状网络

最后，我们将上述微扰方法推广到更复杂的网状网络。这是一个两阶段的方法，我们首先在复图上用数值方法确定方程 (1.1) 的不动点，然后用与第二部分中相同的方法扰动得到的稳定不动点。

A. 确定稳定不动点

在复曲面上，稳定的不动点很难找到。除了 $\theta^{(0)}=(0,0,\dots,0)$ 对于相同频率的不动点，它们通常不可能解析地找到。为了解决这个问题，我们构造了一个与文献 31 中提出的算法相似但不同的数值算法。

参考文献 18 和 30，我们知道式 (1.1) 中的两个不动点的不同之处在于它们的卷绕数（类似于超导体中的漩涡）量化的环路流的集合。我们定义一个由图 G 的每个圈上的圈数组成的向量为

$$\vec{q}_G(\vec{\theta}) = (q_1, q_2, \dots, q_m), \quad (3.1)$$

其中 m 是循环总数，单位为 G 。假设所有连接节点 $|\theta_i - \theta_j| < \pi/2$ ，则每个稳定不动点可以由其卷绕向量 $q_G(\theta)$ 唯一标记 [18, 30, 31]。对于 $P_i \equiv 0$ ，Lyapunov 函数，公式 (2.18) 减少到

$$V(\vec{\theta}) = - \sum_{i < j} K_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j), \quad (3.2)$$

它是 XY 模型的哈密顿量，描述平面经典自旋的相互作用 [29]。稳定不动点是该能量函数的局部极小值，已知它们对应于涡旋携带态，即具有非零卷绕矢量态 $q_G(\theta)$ 。因此，我们通过一个迭代过程来寻找稳定的不动点，这个迭代过程是从

$$\theta_i = q \arctan\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right), \quad (3.3)$$

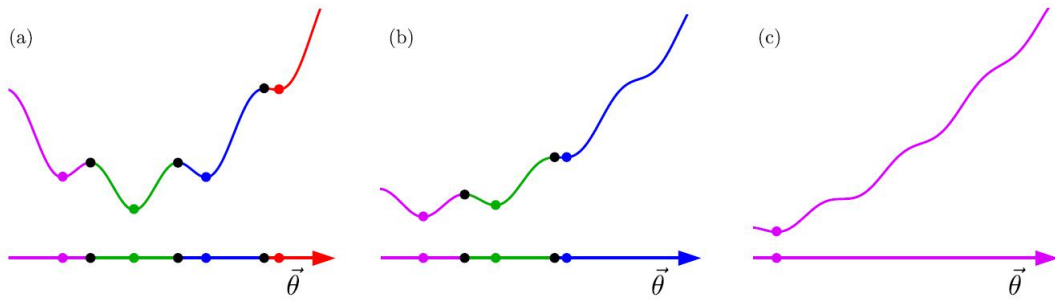


图 6. 等式 (2.18) 的 Lyapunov 函数 V 在一维中的投影示意图，其中 $P_i \in [-\beta, \beta]$ 。 β 值由左向右增大，导致鞍结分叉。彩色的点和线是稳定的不动点和它们各自的吸引盆。黑点是不稳定的不动点。每个稳定的不动点都接近一个不稳定的不动点[图 (a) 和 (b)]，但是吸引盆地的体积变化不大，除非一个不动点失去稳定性[图 (c)]。绕组数较大的固定点[面板 (a) 中的红色区域]在绕组数较低的固定点（蓝色和绿色区域）之前失去稳定性。

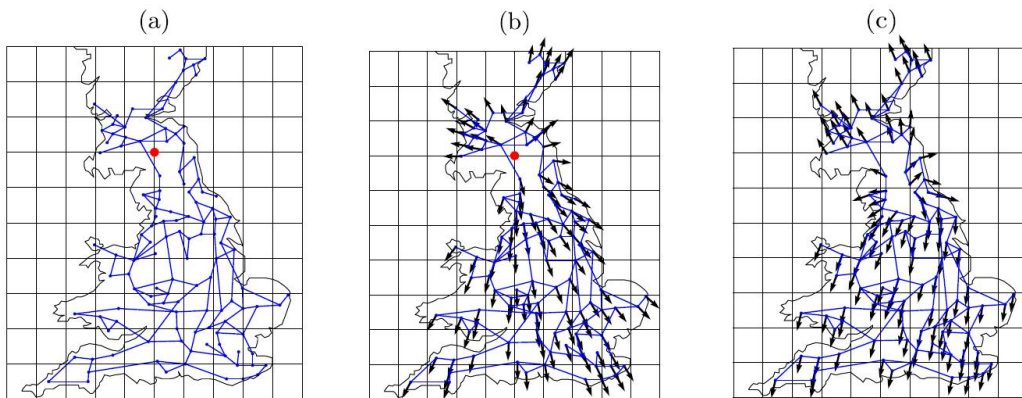


图 7. (a) 英国高压电网方形网格的地理嵌入 (b) 带 $q=1$ 的初始条件一个以红点为中心的漩涡 (c) 在方程 (1.1) 的动力学条件下，板 (b) 的初始状态收敛的稳定不动点 $P_i=0$ 。

其中 (x_0, y_0) 是涡的中心与荷 $q \in \mathbb{Z}$ 涡度 (x_i, y_i) 坐标位置的坐标。为了找到稳定的不动点，算法如下：

1. 定义网络的二维嵌入。使用此选项可以在网络上叠加规则的坐标晶格。如图 7 (a) 所示。
2. 将 (x_0, y_0) 设为正则格的一个节点。

(a) 使用公式 (3.3)，定义一个新的初始状态。

(b) 在所考虑的情况下，数值上遵循等式 (1.1) 直到达到一个稳定的不动点。

(c) 每个稳定的不动点都可以通过它的卷绕向量来明确地识别。使用此选项确定刚找到的固定点是否是新的。如果是，请储存。

3. 返回步骤 2。

作为一个复杂的网状网络，我们认为英国高由 120 个节点和 165 条线路组成的电压网。为了说明刚才描述的算法，图 7 (b) 和 7 (c) 分别显示了它动态收敛的初始条件和稳定状态。通过将 $|q|$ 设为大值，我们的例子是 $q \in \{-50, \dots, 50\}$ ，得到了具有许多涡的稳定不动点。然后，动力学会将这个初始漩涡分裂成几个 q 值较小的漩涡，这些漩涡位于网络的不同周期上。该方法适用于任何复杂或规则网络。英国网格上的时间演化方程 (1.1) 在这个初始条件下只返回稳定的不动点。这样，我们就找到了等式 (1.1) 中有 $P_i = 0$ 的 4000 多个不同的稳定不动点。

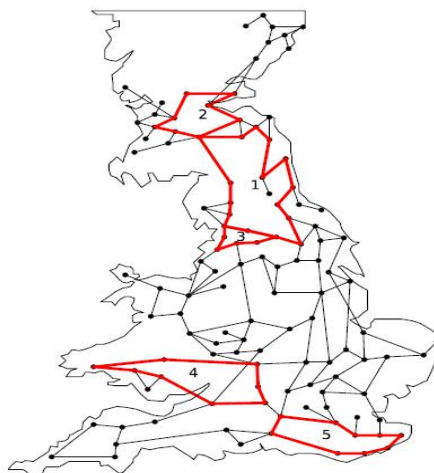


图 8. 高压英国交流输电网用作网状网络。我们关注的五个周期用红色表示。请注意，循环 4 被遍历，但不会被边打断。

B. 估算吸引盆地的体积

确定了稳定不动点 $\theta(q)$ 式 (1.1) 中, 在英国电网, 我们下一步将遵循与第二部分 B 相同的程序。然后测量吸引池的体积。我们主要研究具有非零绕组的稳定不动点, 仅在图 8 中红色的五个循环上编号。我们介绍仅用这些循环的绕组编号的速记法

$$\vec{q}_{sh} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5). \quad (3.4)$$

独立地进行每个循环, 最大绕组数为

$$q_{\max}^1 = 4, q_{\max}^2 = 2, q_{\max}^3 = 1, q_{\max}^4 = 2, q_{\max}^5 = 2.$$

在图 9 中, 我们显示了公式 (2.16) $\tau=0.5$ 和由绕组编号的唯一组合确定的各种稳定不动点的四分位值。对于 $P_i=0$, 等式 (1.1) 在 $\theta_i \rightarrow -\theta_i, \forall i$ 下是对称的。这意味着每个吸引池的体积在 $q_G \rightarrow -q_G$ 下是不变的。这种对称性可以在图 9 (a) 中看到, 它在 $q_1 \rightarrow -q_1$ 下是对称的, 因为只有一个非零绕组编号循环。或者, $q_G \rightarrow -q_G$ 将面板 (b) 和 (c) 与 $q_1 \rightarrow -q_1$ 。对于具有多个周期且绕组数非零的不动点, $q_1 \rightarrow -q_1$ 没有对称性 [见图 9 (b-f)], 如果漩涡彼此靠近, 不对称性更为显著 [见图 9 (b) 和 9 (d)]。

在图 9 (d) 中, 我们没有发现任何绕线向量 $q_{sh}=(1,0,1,0,0)$ 的不动点 $q_{sh}=(-1,0,1,0,0)$ 但我们发现为了理解这一点, 考虑了尺寸为 m 和 n 的两个连通环共享边的简化情况, 如图 10 所示 $q^{(n)}=1$ 和 $q^{(m)}=0$ 。在固定点, 等式 (1.1) 表示

$$\sin(\Delta) = \sin(\Delta') + \sin(\Delta''), \quad (3.5)$$

等式 (2.3) 给出

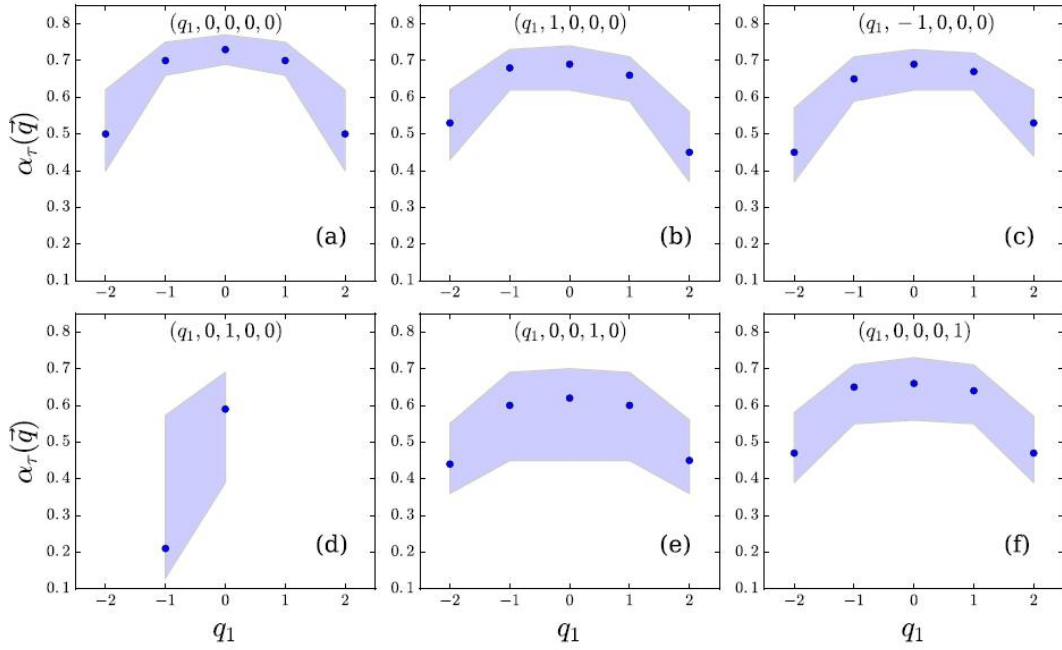


图 9. $\alpha_{q,j}$ 值的中位数 (蓝点) 和四分位间距 (蓝色区域); 由等式 (1.1) 的不动点的 1000 个随机扰动 ε_j 得到图 8 的英国电网上的 $P_i=0$ 是循环 1 (q_1) 上绕组数的函数。

$$(m - \ell) \cdot \Delta'' - \ell \cdot \Delta' = 2\pi q^{(m)} = 0. \quad (3.6)$$

从参考文献 36, 如果 $l > 1$, 我们得到 $|\Delta|, |\Delta'|, |\Delta''| \leq \pi/2$ 。方程 (3.5) 和 (3.6) 表示 $\Delta > \Delta'$ 。因此, 要有 $q^{(n)}=1$, 我们必须有 $\Delta > 2\pi/n$ 。因此, 如果我们把零圈数的边共享圈加到非零圈数的主圈中, 一些角度差必须增加。当 Δ 较大时, 这会导致 $\Delta > 2\pi/n$, 此时失去稳定性。36 添加带有非消失绕组数的循环使情况更加危急。如果我们把循环 1 和 3 分离出来, 它们对应于图 10 中的 $n=16, m=7, l=2$ 。简单计算表明, 存在稳定的不动点 $(q^{(16)}, q^{(7)})=(1,1)$ 和 $(q^{(16)}, q^{(7)})=(1,-1)$ 。然而, 当我们考虑完整的网络, 只有解决方案 $(q^{(16)}, q^{(7)})=(1,-1)$ 保持稳定。这是因为当两个绕组编号具有相同符号时, 共享边上的角度差只对其中一个周期有利。然后, 另一个循环必须从减少的边数中生成一个缠绕数, 这意味

着角度差较大。最后，当我们得到完整的网络时，我们把循环放在两个初始循环的旁边，使角度差变得更大，直到失去稳定性为止。当绕组编号具有相反的符号时，两个循环都受益于共享边上的角度差，这导致角度差小于前一种情况。这就解释了为什么不动点 $q_{sh} = (-1, 0, 1, 0, 0)$ 是稳定的，而 $q_{sh} = (1, 0, 1, 0, 0)$ 不是稳定的。

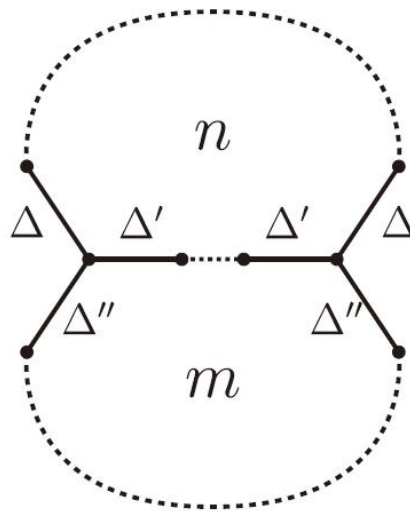


图 10. 两个循环共用 l “边缘”。顶部循环有 n 个节点，底部循环有 m 个节点。对于等式(1.1)，角度差由 Δ , Δ' , Δ'' 给出，此时频率相等。

为了结束这一节，我们注意到网状网络的效果类似于第二部分 D 中考虑的情况。带 $P_i \neq 0$ 其中，与单循环网络相比，(i) 具有大缠绕数的稳定不动点较少，(ii) 具有小缠绕数的不动点的吸引盆体积似乎不受影响。

四、 结论

我们发展了一种数值方法来研究动力系统中不动点吸引盆的体积。我们的方法首先利用一种基于环流概念的算法来定位动力系统的稳定不动点[30]。随着扰动幅度的增加，该方法在随机方向上对不动点进

行扰动。收敛到初始不动点的扰动态的比例允许我们评估吸引盆地的半径，然后是它的体积。

然后，我们用我们的方法研究了具有相同频率的周期上的 Kuramoto 模型。我们得出吸引池的体积与 $(1-4q/n)^n$ 、与文献 1 中提出的高斯分布相比，我们将我们的方法推广到非同频周期上的 Kuramoto 模型和网状网络上的 Kuramoto 模型。这两种概括使得对吸引盆地的研究变得不那么容易处理，这就迫使我们依赖于数值计算。我们相信，我们的方法大大加快了这些调查。

与其他现有的研究吸引盆地的方法相比，我们的方法有三个主要优点：

- 它不需要所考虑的动力系统的 Lyapunov 函数 [37, 38]，这在一般情况下是很复杂的；
- 不限于二次或多项式系统 [39]；
- 调查以我们对系统的了解为指导，避免在状态空间中随机选择初始条件 [1, 2]。

这些优点的缺点是，我们的调查仅限于吸引盆地的体积，对其形状没有任何指示。特别是，我们的方法可能不适用于分形吸引盆的研究 [40]。我们认为我们的方法可能在许多其他情况下有用，包括在平面自旋玻璃 [28] 和无序约瑟夫森结阵列 [29] 等中发现局部能量极小值。

致谢

这项工作得到了瑞士国家科学院的支持 AP 能源基金会。我们感谢吉米在这个项目的早期阶段进行讨论。

参考文献

- 1D. A. Wiley, S. H. Strogatz, and M. Girvan, *Chaos* 16, 015103 (2006).
- 2P. J. Menck, J. Heitzig, N. Marwan, and J. Kurths, *Nat. Phys.* 9, 89 (2013).
- 3E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2002).
- 4S. H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*, Penguin Press Science Series (Penguin Adult, 2004).
- 5S. H. Strogatz, *Physica D* 143, 1 (2000).
- 6J. A. Acebr on, L. L. Bonilla, C. J. P erez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* 77, 137 (2005).
- 7F. D€orfler and F. Bullo, *Automatica* 50, 1539 (2014).
- 8Y. Kuramoto, "Lecture notes in physics," in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, edited by H. Araki (Springer, Berlin, Heidelberg, 1975), Vol. 39, pp. 420–422.
- 9Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 79, 223 (1984).
- 10D. Aeyels and J. A. Rogge, *Prog. Theor. Phys.* 112, 921 (2004).
- 11R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, *Physica D* 205, 249 (2005).
- 12M. Verwoerd and O. Mason, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 7, 134 (2008).
- 13G. B. Ermentrout, *J. Math. Biol.* 22, 1 (1985).
- 14J. L. van Hemmen and W. F. Wreskinski, *J. Stat. Phys.* 72, 145 (1993).
- 15K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* 76, 404 (1996).
- 16Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer Series in Synergetics (Springer, Berlin Heidelberg, 1984), Vol. 19.
- 17H. Sompolinsky, D. Golomb, and D. Kleinfeld, *Phys. Rev. A* 43, 6990 (1991).
- 18F. D€orfler, M. Chertkov, and F. Bullo, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 110, 2005 (2013).
- 19A. M. Lyapunov, "The general problem of the stability of motion," Ph.D. thesis (University of Kharkov, 1892).
- 20A. M. Lyapunov, *Int. J. Control* 55, 531 (1992).
- 21M. Pai, *Power System Stability: Analysis by the Direct Method of Lyapunov* (North-Holland Publishing Company, 1981).
- 22H.-D. Chiang and J. S. Thorp, *IEEE Trans. Autom. Control* 34, 1229 (1989).

- 23P. Schultz, P. J. Menck, J. Heitzig, and J. Kurths, *New J. Phys.* 19, 023005 (2017).
- 24F. D€orfler and F. Bullo, in *American Control Conference (ACC), 2011 (IEEE, 2011)*, pp. 3239–3244.
- 25A. J. Korsak, *IEEE Trans. Power Appar. Syst.* 91, 1093 (1972).
- 26R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics*, 3rd ed. (Elsevier, 2011).
- 27S.-Y. Ha and M.-J. Kang, *SIAM J. Appl. Math.* 72, 1549 (2012).
- 28M. Mezard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1987)*.
- 29R. Fazio and H. van der Zant, *Phys. Rep.* 355, 235 (2001).
- 30R. Delabays, T. Coletta, and P. Jacquod, *J. Math. Phys.* 57, 032701 (2016).
- 31D. Manik, M. Timme, and D. Witthaut, *Chaos* 27, 083123 (2017).
- 32R. Taylor, *J. Phys. A* 45, 055102 (2012).
- 33L. DeVille, *Nonlinearity* 25, 1473 (2012).
- 34R. Gilmore, *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers (Wiley, New York, 1981)*.
- 35T. Coletta, R. Delabays, I. Adagideli, and P. Jacquod, *New J. Phys.* 18, 103042 (2016).
- 36R. Delabays, T. Coletta, and P. Jacquod, *J. Math. Phys.* 58, 032703 (2017).
- 37R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino, *IEEE Trans. Autom. Control* 30, 747 (1985).
- 38E. Najafi, R. Babuka, and G. A. D. Lopes, *Nonlinear Dyn.* 86, 823 (2016).
- 39F. Amato, C. Cosentino, and A. Merola, *Automatica* 43, 2119 (2007).
- 40C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Science* 238, 632 (1987).