

混沌慢-快振荡器小世界网络突发同步的盆稳定性

Oleg V. Maslennikov,¹ Vladimir I. Nekorkin,¹ and Jürgen Kurths^{1,2}

¹ 俄罗斯科学院应用物理研究所, 603950, 俄国

² 波茨坦气候影响研究所, D-14415, 德国波茨坦

(2015年5月6日收到; 2015年9月9日修改; 2015年10月6日出版)

本文研究了连接性和个体动力学对由混沌慢-快振子组成的小世界网络中突发同步区盆稳定性的影响。结果表明, 存在对应于最大盆地稳定性的重连概率, 这揭示了在真实神经网络中发现小世界拓扑的原因。研究了耦合密度、耦合强度以及节点参数对松弛性和激励性的影响。揭示了对突发同步区盆地稳定性影响最大的动力学机制。

一、引言

神经网络中的集体现象爆发振荡对于理解大脑和细胞培养中的许多重要过程有着特殊的意义[1]。爆发振荡由一组尖峰和一组静止的交替周期组成。从非线性动力学的观点来看, 这种振荡模式是一种弛豫; i、例如, 它的特点是两个不同的时间尺度, 快和慢。另一个可能是爆破振荡固有的动力学特征是它们的混沌性质。在分析大规模神经电路时, 通常需要使用复杂网络理论[2 - 5]的概念和方法, 将这些电路视为通过链路耦合的节点集, 并研究它们之间的相互作用。在神经网络中, 一个重要的集体效应就是突发同步。不同神经元的尖峰期在相同(接近)时刻开始和结束, 而脉冲中的单个尖峰通常在不同时刻出现[6 - 10] (另见参考文献) [11, 12])。它在参考文献中显示[13 - 15]网络机制, 即连接性模式和耦合强度, 对于突发同步非

常重要，特别是在像小世界网络这样的复杂网络中。

“小世界”的性质[16, 17]被认为是非常重要的性质，技术和社会由于其普遍性。许多不同脑区的解剖和功能网络被证实是小世界的，并且在一级近似下可以被描述为小世界的 Watts-Strogatz 网络（参见参考文献）[18 - 20]。应该指出的是，为什么真实网络的小世界特征在普通网络和随机网络之间居于中间位置，这一点在很长一段时间内都不清楚。直到最近才在参考文献中提出了一个理由[21, 22]，即小世界振荡网络显示同步机制的最大可能盆地稳定性。盆地稳定性表征相空间的相对体积，包含初始条件，从初始条件开始，轨迹趋向于决定同步状态的吸引子（另见参考文献[23]）。在参考文献[21]中，对于 Rossler 振荡器，表明了盆地的稳定性同步机制快速增长，然后随着重连概率的增加呈指数下降。

在这项工作中，我们考虑小世界网络，其中节点的振子表现为混沌尖峰-突发振荡，即快-慢系统，这是网络中重要的振荡模式之一神经网络。我们研究了爆发的盆地稳定性同步机制取决于拓扑特征，耦合强度，以及单位节点的动态特性。第二节描述了节点动力学的主要性质。介绍了第三次突发同步，并说明了估算盆地稳定性的过程。第四节和第五节分别研究连通性和节点动力学对突发同步盆地稳定性的影响。最后，在第六部分，我们给出结论并讨论了主要结果。

二、节点动力学

节点的动力学用离散时间模型描述系统[24, 25]：

$$\begin{aligned}x_{i,n+1} &= x_{i,n} + F_H(x_{i,n}) - y_{i,n} + I_{i,n}, \\y_{i,n+1} &= y_{i,n} + \varepsilon(x_{i,n} - J_i), i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{1}$$

这里 $n=0,1,2\dots$ 是离散时间, 变量 $x_{i,n}$ 和 $y_{i,n}$ 表征的状态下的第 i 个振荡器在 n 时刻。非线性函数 $F_H(x)=x(x-a)(1-x)-\beta H(x-d)$, 其中 $H(x)$ 是 Heaviside 阶跃函数。参数 α, β 控制动态振荡政体。参数 ε 确定变量 y_i 的速率, J_i 表征振荡器 i 的兴奋特性, 而项 I_i 是对第 i 个振荡器的外部影响。系统 (1) 由 FitzHugh-Nagumo 模型的离散版本构成, 另外引入了不连续性, 表示为 $-\beta H(x-d)$ 。取决于它所再现的参数值, 真实神经元所表现出的一系列动态状态, 如可兴奋状态、周期性尖峰、阈下振荡、尖峰爆发等。产生的信号的形状由 a 控制, 其周期由一个 ε 决定, 不连续项允许我们获得标准 FitzHugh-Nagumo 型系统中所没有的混沌区域, 即混沌尖峰脉冲振荡。这个属性是由于快子系统 (即基本模型 (1), $\varepsilon = 0$) 是特定参数值的 Lorenz 型映射。通过改变 β 我们可以修改脉冲的幅度和数量 (更多细节见参考文献) [24, 25]。图 1 中示出了由式 (1) 生成的混沌尖峰突发性行为的示例, 其中图 1 中示出了混沌吸引子和相应的波形。1 (a) 和 1 (b), 分别。在这项工作中, 我们处理振荡器显示这种类型的活动。因为我们学习, 除了其他人, 还有对集体现象的节点效应, 应该知道单个爆破动态特性, 如平均周期和每次爆破的峰值数量取决于 ε 。图 2 显示了尖峰脉冲振荡的平均周期、产生尖峰的活跃阶段的平均持续时间以及每个脉冲的平均尖峰数。取决于 ε 这些特征是相当光滑的, 这表明混沌吸引子的性质对于参数变化是结构稳定的。

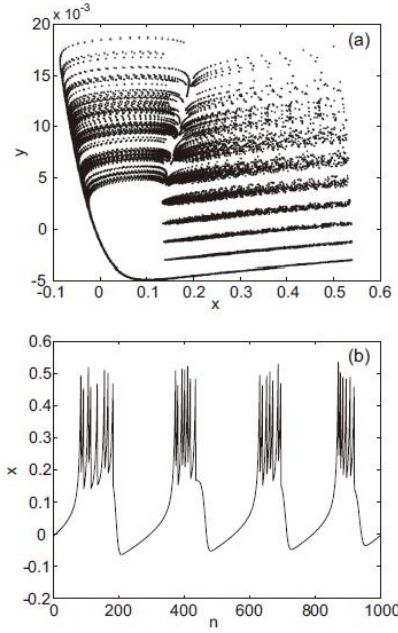


图 1. (a) 当 $a=0.1$ 时, 单个映射 (1) 的混沌吸引子, $\beta=0.3$, $d=0.45$, $\varepsilon=0.001$, $J=0.1$, $I=0$ 。(b) 相应的尖峰脉冲振荡。

现在考虑一个由 N 个节点的振荡器组成的小世界网络由式 (1) 表示, 通过无向连接相互连接。小世界拓扑是由 Watts-Strogatz 算法的平均值[16]。我们从一种规则的环形网络, 其中每个节点都连接在一起到 $2k$ 个相邻节点; i 。例如, 每个节点的度是等于 $2k$ 。然后我们查看所有现有的链接和概率预测节点 i 和节点 i 之间的连接 j 中断, 在节点 i 和另一个随机选择的节点 h 之间创建一个新连接。注意, 总数网络中的链路数 (kN) 不变, 因此参数 P_{rew} 是网络拓扑规则性和随机性的度量: $P_{rew}=0$ 对应于规则网络, $P_{rew}=1$ 对应于绝对随机网络, P_{rew} 在 0 和 1 之间的网络具有这两个特征。我们感兴趣的一个问题是影响力是什么拓扑参数 (P_{rew}, K) 对这类网络在流域稳定性方面的同步特性有重要影响。

式 (1) 中 I_i 项表示的节间相互作用模型采用最简单的耦合方案,

其中节点由具有相同耦合强度的无向链路扩散连接； i 。例如，耦合项为

$$I_{i,n} = \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N G_{i,j}(x_{j,n} - x_{i,n}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

其中 c 控制全局耦合强度，矩阵 g 的元素 $G_{i,j}$ 决定网络拓扑： $G_{i,j}=1$ （如果节点 i 和 j 之间存在连接）， $G_{i,j}=0$ （否则）。

应该注意的是，我们考虑的是不完全相同的网络具有不同 J_j 值且具有平均 J_0 和方差的高斯分布的振荡器 δJ 。这种振荡器的网络动力学产生的波形如图 3 所示。可以看出，在纯规则网络[图 3 (a)]中，有源相位的尖峰以移位的方式出现，而在具有重新布线的链路的网络中，尖峰在更近的瞬间出现[图 3 (b)]。

三、突发同步与盆地稳定

通常估计突发同步的方法是为每个振荡器引入一个相位变量，并计算 Kuramoto 意义上的复序参数，其时间平均幅度表征了脉冲群的相位同步[28]。定义相位的一种可能方法是，假设每个脉冲的开始是零相位的一个时刻，在两个时刻之间，相位从零线性增加到一。显然，对于这种方法，需要知道振荡周期，它是变化的，并且是先验未知的，因此通常很难明确地定义相位。在这里，我们使用参考文献中提出的另一种相当简单的方法[29, 30]并在参考文献[31]中发展，给出了类似的结果，但是，不需要引入相位，而是基于寻找一致的活动相位。

估计突发同步度的过程如下所示。因为我们处理的是非同一振子

对于不同的 J_i 值，我们确定最小值网络中的这个参数：

$J_{\min} = \min_{1,2,\dots,N}\{J_i\}$ 。我们说，如果 $x_{i,n} \geq J_{\min}$ ，则 i 振荡器处于活动阶段，否则它处于被动（或静止）阶段。我们用辅助变量来描述第 i 个振荡器的状态 χ_i ，在 $\chi_i=1$ ，此时 $\chi_i > J_{\min}$ ， $\chi_i=0$ ，此时有 $\chi_i \leq J_{\min}$ 。对于足够长的时间序列 $\{x_{i,n}, i=1,2,\dots,N, n=0\dots T\}$ ，我们计算如下量：

$$T_{\text{act}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^T \chi_{i,n}, \quad (3)$$

它测量网络上所有活动阶段的平均持续时间。接下来，我们计算数量

$$T_{\text{coin}} = \sum_{n=0}^T \prod_{i=1}^N \chi_{i,n}, \quad (4)$$

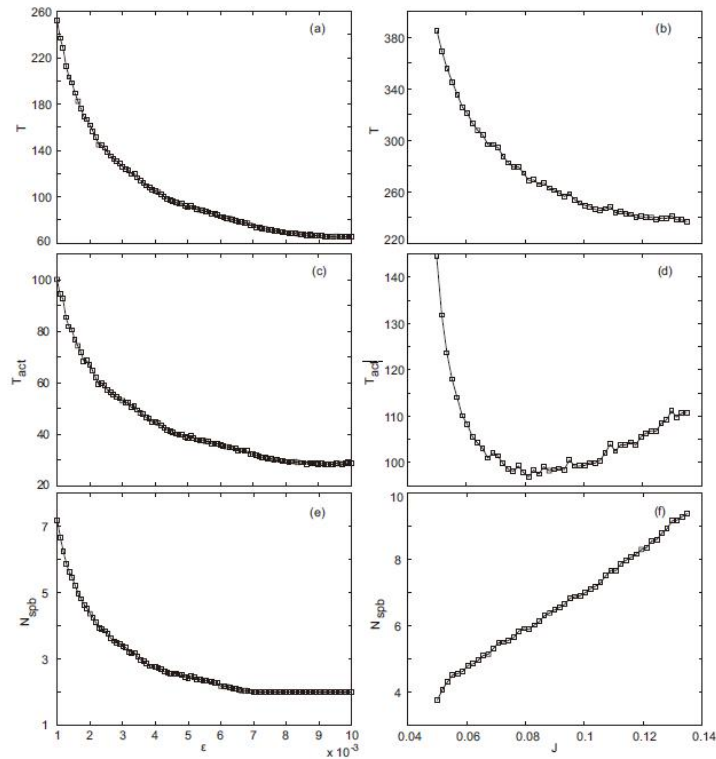


图 2. 由式 (1) 产生的混沌尖峰脉冲群振荡的特性：(a,b) 它们的平均周期，(c,d) 活跃相的平均持续时间，和 (e,f) 每个脉冲群的平均尖峰数，取决于 (a,c,e) ϵ （对于 $J=0.1$ ）和

$(b, d, f) J$ (对于 $\varepsilon = 0.001$). 其他参数 $\alpha=0.1, \beta=0.3, d=0.45, I=0$.

等于所有振荡器同时处于一个有效相位的时间。很明显, 这两个量

$$\sigma = T_{\text{coin}}/T_{\text{act}}, \quad (5)$$

确定同时生成的平均分数, 所有活动阶段的总持续时间中的活动阶段数。在换句话说, δ 当不同振荡器的活动相位在时间的闭合时刻开始和结束时, 接近 1 对应于突发同步; 越接近 δ 为 0 时, 突发同步度越低。我们将这种方法与相位法进行了比较, 发现它们给出的结果在质量上是相似的 (另见参考文献 [30, 31])。

同步机制的盆地稳定性提供了信息, 对应于这个区域的吸引子吸引盆的相对体积。我们的意思是不计算它的体积绝对值, 但我们量化它相对的相空间区域, 在研究中的动力学发生后, 足够长的瞬变时间。选择该区域作为均匀分布初始条件的区域。自从我们达成协议在非同一振荡器的突发同步中, 它是定义突发同步的含义所必需的政体。

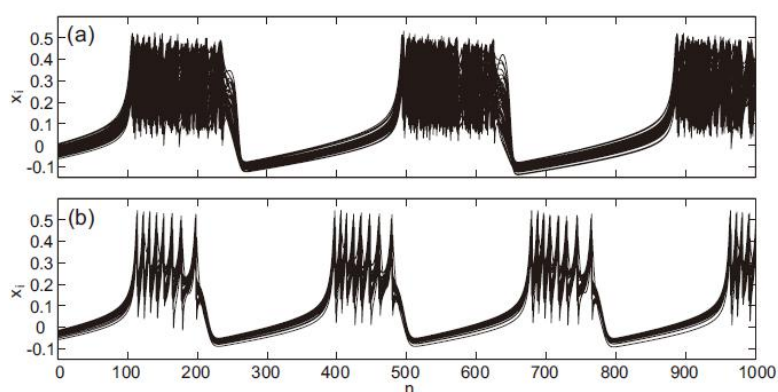


图 3. $N=50$ 的小世界网络中的突发振荡不同重连概率的节点: (a) $P_{\text{rew}}=0$; (b) $P_{\text{rew}}=0.3$. 其他参数为 $c=1, k=11, J_0=0.1$ 和 $\delta J=0.015$ 。

换句话说, 应该指定一个阈值 σ 这样的什么时候 $\sigma > \sigma_{th}$ 然后我们说存

在突发同步机制。对于从不同初始条件和（或）不同结构配置开始的时间序列，通常可以得到不同的 σ 由于混沌动力学、非同一性和拓扑可变性。分布 σ 's对于不同的 ε 表明这些曲线的宽度和最大值存在较大差异。选择 σ 然而，这是相当武断的，从图4可以看出，如果一个人选择， $\sigma_{th}=0.95$ ，则全部 σ 's低于这个值，因此在任何初始条件下都不能达到这种标准的突发同步。在大多数情况下，我们使用 $\sigma_{th}=0.85$ ，这使我们能够在不同参数下监测盆地稳定性的变化，在某些情况下，我们讨论如果考虑其他可能性（例如， $\sigma_{th}=0.9,0.8$ ）。

为了描述突发同步机制吸引盆的相对体积，我们执行以下操作程序。对于每一组网络参数，我们生成 M 个不同的实现，并计算每一个网络参数的值 σ 。之后，我们计算实现的数量 M_s ， $\sigma > \sigma_{th}$ 则 M_s 与 M 的比值给出了盆地稳定性 S_B 的估计值：

$$S_B = M_s/M. \quad (6)$$

很明显， S_B 值在0到1之间变化； S_B 越接近1，盆地稳定性越高，网络进入突发同步状态的可能性越大。

注意，对于 M 个实现中的每一个，每个振荡器的初始条件是从区域内的均匀分布中随机选择的 $A=\{-0.12 < x_i < 0.5, -0.005 < y_i < 0.035\}, i=1, \dots, N$ 。其中，混沌吸引子是局部的，而且，一个新的网络结构为具有相同特征的拓扑生成（如果有多个）。因此，式（6）考虑了初始条件的平均值 (x_i, y_i) 以及在具有相同拓扑参数 (N, k, P_{rew}) 的不同网络的集合上。还应注意的，在计算 σ ，席的第一个 T_0 值被忽略，剩余的 $T-T_0$ 值被忽略。

四、连接参数的影响

首先，我们考察了网络连通性对集体动力学的影响；例如，我们对重连概率 P_{rew} 、节点度 k 和耦合强度 c 的作用感兴趣。图 5 显示了不同类型的 $S_B(P_{rew})$ 参数的小值 ε 。可以看出，其中三条曲线在某个临界值 P 以下有相当陡峭的增长部分以上和平面递减部分重写。另外两条曲线比前三条曲线要低得多；然而，人们可以区分相似但不太明显的增加和减少部分。 $S_B(P_{rew})$ 的这些特征在性质上类似于小世界网络 Rossler 振子在这个意义上的曲线有一个最大值对应于提供最大盆地稳定性的重连概率。

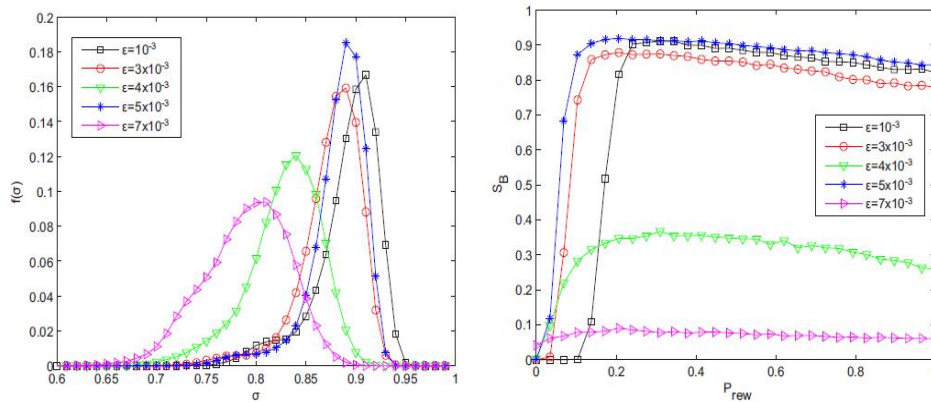


图 4(在线颜色)颜色分布 σ 不同类型的值 ε 值。参数为 $N=50$, $P_{rew}=0.3$, $k=11$, $c=1$, $J_0=0.1$, 和 $\delta J=0.01$ 。图 5(彩色在线)不同的颜色值的盆地稳定性与重新布线概率 P_{rew} 。参数为 $N=50$, $k=11$, $c=1$, $J_0=0.1$, 和 $\delta J=0.01$ 。

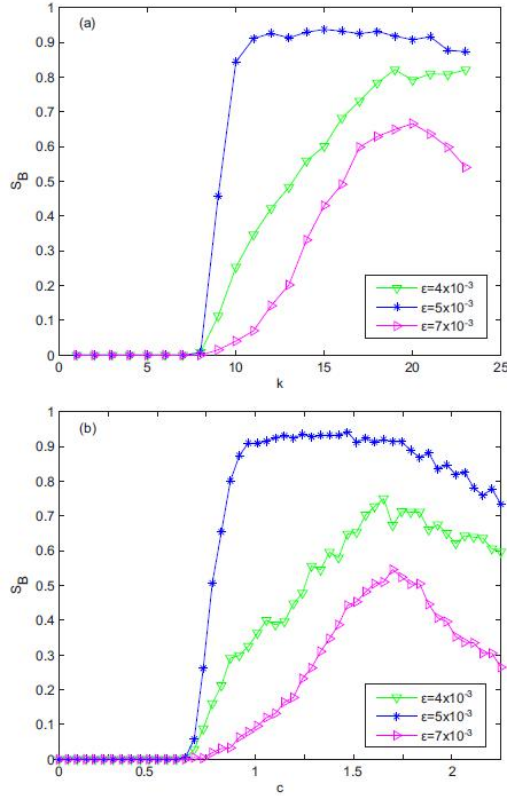


图 6. (彩色在线) 不同的温度值下, 盆地稳定性与 (a) k 度 (对于 $c=1$) 和 (b) 耦合强度 c (对于 $k=11$) 的关系 ε . 参数为 $N=50$, $P_{rew}=0.3$, $J_0=0.1$ 和 $\delta J=0.01$.

然而, 在我们的例子中一个重要的区别是 $S_B(P_{rew})$ 的衰减不是指数的, 而是接近线性的, 并且在曲线中没有这样明显的峰值。就像在 Rossler 振子网络。因此, 有相当大的 P_{rew} 间隔, S_B 取其最大值。注意曲线对节点参数很敏感 ε . 特别是最大的盆地稳定性 $\varepsilon=10^{-3}$, $\varepsilon=4 \times 10^{-3}$; 曲线 $\varepsilon=5 \times 10^{-3}$ 比高 $\varepsilon=4 \times 10^{-3}$ 表示所有重新布线的概率, 以及在以下情况下达到最大值的阈值: $\varepsilon=5 \times 10^{-3}$ 比 $\varepsilon=10^{-3}$ 。下面我们更详细地考虑了节点动力学对突发同步盆地稳定性的影响。

下一个问题是以 k 为特征的网络密度的影响。图 6 (a) 显示, 对于非常稀疏的网络, 突发同步机制的盆地稳定性接近于零。只有在 k

的某一阈值以上，盆地的稳定性才开始迅速增长。重要的一点是，对于非常密集的网络[参见图 6 (a) 中的 $k > 20$]， S_B 开始减少。随着网络中链接数量的增加。在其他参数不变的情况下，系统 (1) 中的耦合项 I_i 增大，尖峰脉冲振荡畸变，出现从主动混沌到被动混沌的爆发。根据我们的突发同步标准，这意味着同时产生突发的持续时间减少；因此， σ 也会降低，可能无法达到同步状态。

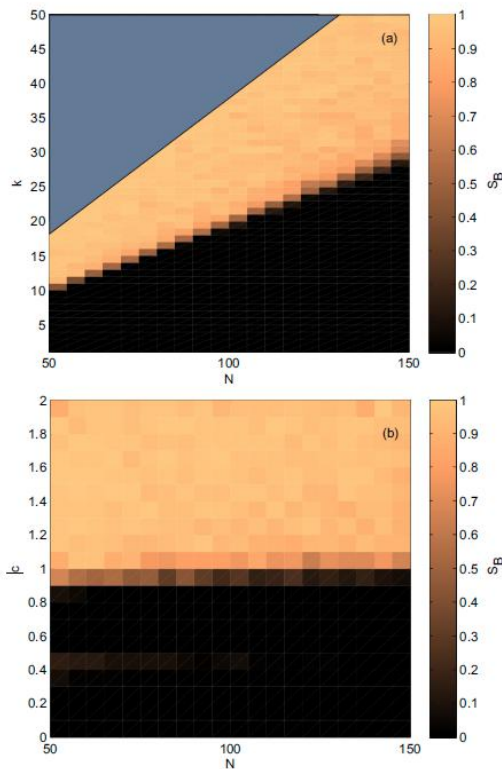


图 7 (在线彩色) 盆地稳定性与 (a) N 和 k ($c=1$) 和 (b) N 和 c ($k=0.2 \times N$) 是的。参数为 $\varepsilon=10^{-3}$, $P_{rew}=0.3$, $J_0=0.1$ 和 $\delta J=0.01$ 。

在增加耦合方面也观察到类似的效果强度[见图 6 (b)]。在所有况下，都存在一个阈值 c ，高于该阈值 S_B 逐渐增大并达到其最大值。注意，当耦合强度足够大时，盆地稳定性降低，这是由于与前面讨论的 k 效应相同的因素引起的。 c 越大，耦合项越大，并且从一些 c 开始

存在突发的失真，并且对于耦合强度的进一步增加[图 6 (b) 中未示出]，耦合项 I_i 可以如此大以至于单个振荡器离开部分混沌吸引子并且走向无穷大。

我们根据网络大小检查了这些影响，发现对于 $N=50 \div 150$ ，从低到低的转变 $k \approx 0.2N$ 附近盆地稳定性较高，对于大范围的参数[图 7 (a) 中示出了一个示例]，而就耦合强度而言，这发生在约 $c=1.0$ 处。

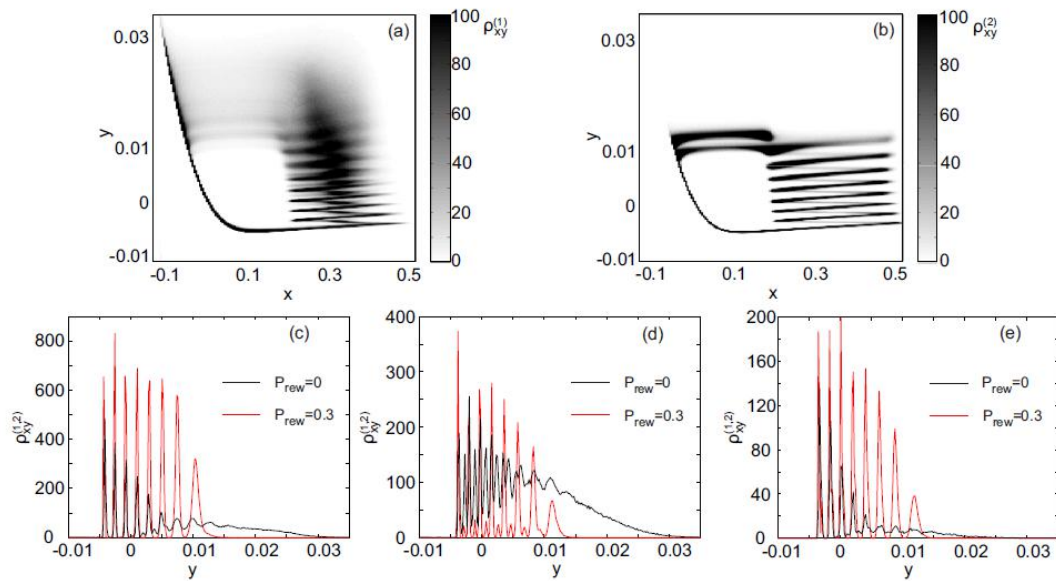


图 8. (彩色在线) 概率分布 $\rho_{x,y}$ 、在 (a) $P_{rew}=0$ 和 (b) $P_{rew}=0.3$ ($N=50$, $k=11$, $c=1$, $J_0=0.1$ 和 $\delta J=0.01$)。这些分布在 (c) $x=0.2$ ，(d) $x=0.3$ 和 (e) $x=0.4$ 线上的投影。

为了关联相空间几何的变形，利用网络重连，我们研究了概率密度分布。我们研究了相平面 (x,y) 中的轨迹运动 (x_{mean}, y_{mean}) ，其中 $x_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$, $y_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j$ 。第三、我们计算了 (x_{mean}, y_{mean}) 的时间序列的 M 个不同的实现，表征了一个特定的网络结构。我们用矩形 $R_{x,y}$ 放置一个分区网格，大小为 $\Delta x \times \Delta y$ 到区域 A ，并计算相位点落

入每个 $R_{x,y}$ 的频率。矩形 $R_{x,y}$ 中点的数目与点 M 总数的比值, 给出了轨迹进入 $R_{x,y}$ 的概率估计。我们将概率密度定义为 $\rho_{x,y}$ 并绘制不同网络的图, 与相应的盆地稳定性值进行比较。图 8 (a) 和 8 (b) 显示 $\rho_{x,y}$ 表示两种不同的重新布线概率 $P_{rew}=0$ (规则网络) 和 $P_{rew}=0.3$ (小世界网络)。这些分布与单个振子的混沌吸引子有一些相似之处 [参见图 1 (a)], 例如, 它们具有慢规则运动的左手分支和快混沌运动的右手区域。然而, 分配 $\rho^{(1)}_{x,y}$ 图 8 (a) 中的 $\rho^{(2)}_{x,y}$ 8 (b) 中在某些关键点上不同。一是分配问题 $\rho^{(2)}_{x,y}$ 在混沌区域有更明显的条纹, 对应于最有可能轨迹的相空间区域。这由图 8 (c)、8 (d) 和 8 (e) 支持, 图 8 (c)、8 (d) 和 8 (e) 显示了 $\rho^{(1,2)}_{x,y}$ 在不同的垂直线上。其次, 与 $P_{rew}=0.3$ 的情形相比, $P_{rew}=0$ 对应的分布在其规则部分和混沌部分的 y 方向上具有更大的尺寸。由于图 8 (b) 对应于盆地稳定性最高的情况, 这些相轨迹主要在 $\rho^{(2)}_{x,y}$ 根据给出的定义确定突发同步的机制。三、注意, 在 $\rho^{(1)}_{x,y}$, 轨迹花了很长时间在上面的区域移动 $\rho^{(2)}_{x,y}$ 因此, 这些轨迹对爆发同步机制没有贡献, 相应的盆地稳定性接近于零。比较分配 $\rho^{(2)}_{x,y}$ 对应于具有 $\rho^{(2)}_{x,y}$, 我们可以得出结论, 这种拓扑结构是否会导致突发同步的高盆地稳定性 (如果 $\rho_{x,y}$ 类似于 $\rho^{(2)}_{x,y}$) 或在低位 (如果 $\rho_{x,y}$ 接近 $\rho^{(1)}_{x,y}$)。

五、节点参数的影响

下一个重要的问题是节点的影响是盆地稳定性动力学。一个有趣的问题是, 参数控制的混沌吸引子的性质发生变化的后果是什么 ε 和

J_0 。如前一节所述，参数 ε 对盆地稳定性有重大影响（见图 5）。对于固定连接性参数 $P_{rew}=0.3$ 和 $k=11$ 以及耦合强度 $c=1$ ，我们绘制了 S_B 与 ε 对于 $J_0=0.1$ 。图 9（黑色方块）显示了 S_B 的几个明显的最大值和最小值 (ε)，e、 两个最大值 $\varepsilon=3\times 10^{-3}$ 和 $\varepsilon=5\times 10^{-3}$ 和最小值 $\varepsilon=4\times 10^{-3}$ 和 $\varepsilon=8\times 10^{-3}$ （与图 5 比较）。注意，在图 9 中还示出了为其他突发同步准则获得的曲线 σ_{th} （红色圆圈表示 $\sigma_{th}=0.8$ ，蓝色星号表示 $\sigma_{th}=0.9$ ）。这两条曲线重复了第一条曲线的主要特性（对应于 $\sigma_{th}=0.85$ ），即定性表明 ε 对应于低或高盆地稳定性的值。我们可以看到 σ_{th} ， S_B 越小，即到达由特定条件定义的突发同步状态的初始条件的数目越少 σ 第四个标准。

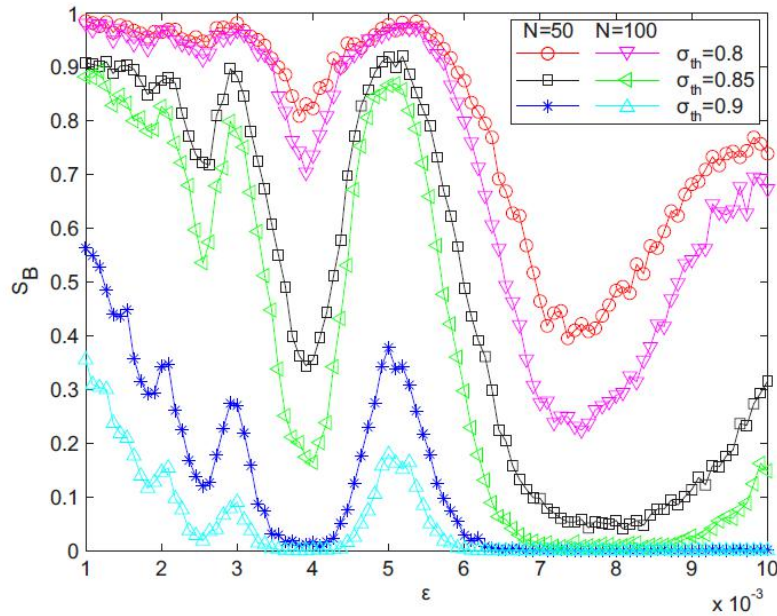


图 9（彩色在线）盆地稳定性与 ε 。影响显示 σ_{th} 和网络大小 N 。 $N=50$ 时， $k=11$ ；对 $N=100$ 的情况， $k=22$ 。在所有情况下， $P_{rew}=0.3$ ， $c=1$ ， $J_0=0.1$ 和 $\delta J=0.01$ 。

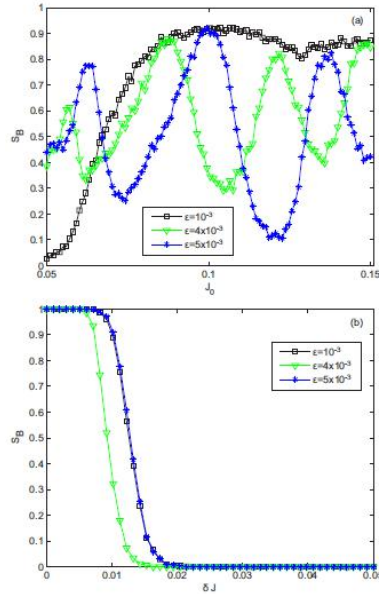


图 10 (彩色在线) 盆地稳定性与 (a) J_0 (适用于 $\delta J = 0.01$) 和 (b) δJ 对于不同的 ϵ . 在这种情况下, $N=50, P_{rew}=0.3, k=11, c=1, J_0=0.1$.

我们研究了网络大小的影响, 发现对于较大的网络, 盆地稳定性的重要性质保持不变。图 9 显示, 对于 $N=100$, 曲线以不同的三角形表示 σ 这些准则与 $N=50$ 的准则非常相似, 它们的最大值和最小值在相同的 ϵ ; 然而, 对于大多数人来说 ϵ 、较大网络的盆地稳定性低于较小网络的盆地稳定性。

另一个节点参数 J_0 也控制了盆地的稳定性, 如图 10 (a) 所示, 该图显示了 S_B 与 J_0 的对比三种不同的 ϵ . 而对于 $\epsilon=10^{-3}$. 盆地稳定性由小值逐渐增大, 逐渐趋于稳定接近一个, 其他两个我们观察到振荡曲线 $S_B (J_0)$ 。值得注意的是 $\epsilon=4 \times 10^{-3}$ 到 $\epsilon=5 \times 10^{-3}$ 、移动了盆地稳定性最大值和最小值的 J_0 坐标。

需要注意的是, 参数的影响 δJ 作为相似性的度量, 是随着 S_B 的增加而降低盆地的稳定性 δJ 如图 10 (b) 所示。该图表明, 相同的节点以及具有足够小的失配的节点对于突发同步往往比强失配节点具

有更大的盆地稳定性。

理解某人行为复杂的原因与 J_0 相比，我们绘制了突发振荡的特征、每个突发 N_{spb} 的平均尖峰数和活动相 T_{act} 的平均持续时间。这两个量都是随时间和所有振子的平均值，也就是说，它们考虑了节点动力学和节点间复杂相互作用的联合效应。图 11 显示了两种不同的 ε 是 N_{spb} 的依赖性通过与 $S_B(J_0)$ 的比较，我们发现 $T_{act}(J_0)$ 的局部极大值出现在与 $S_B(J_0)$ 的局部极大值相近的 J_0 值处，并且在这些 J_0 处，每个脉冲的平均峰值数突然变化。因此，曲线 $N_{spb}(J_0)$ 具有阶梯状的形式。这些事实意味着，盆地稳定性的局部增强与活动爆发阶段的增加有关，同时与爆发中出现的新峰值有关。

需要注意的是为单个节点动力学计算的每脉冲峰值，单调依赖于 J ；即，在所示区域在图 11 中，单个 N_{spb} 随时间单调增加 J （见图 2 (f)）。然而，如果考虑另一个数量的单个节点动力学，最有可能的值的数量峰值每突发，它有一个阶梯状的形式类似于那些图所示。11 (c) 和 11 (d)。我们可以得出这样的结论，集体网络效应，除其他外，是使分布更加对称，因此，将最有可能的特征转换为平均特征。为了比较网络效应和个体动态特征，我们策划某人与 ε 和 J_0 （见图 12），并显示划分边界的曲线 (ε, J_0) 平面进入具有相应参数的单个振荡器产生，图中显示的 N_{spb} 最可能值的爆发，数字平面 1, 10. 可以看出，一般而言，不同区域之间的边界落在盆地稳定性的局部极大值上，然而，这不是小区域的情况特别 $\varepsilon < 2 \times 10^{-3}$ 。

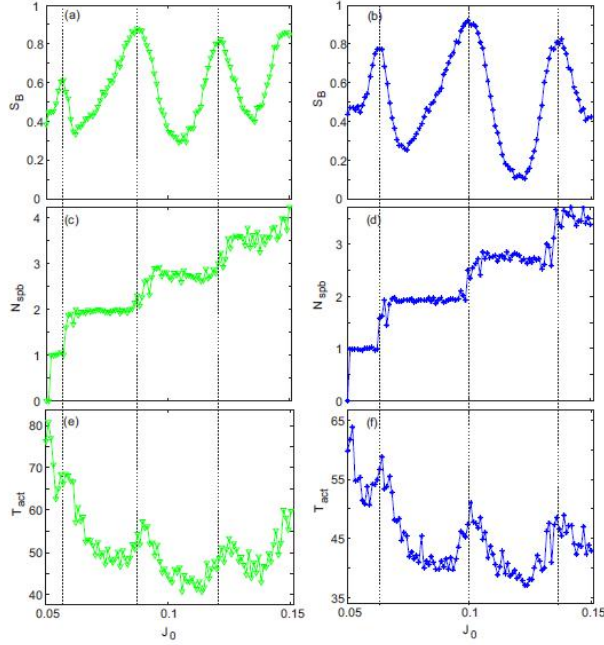


图 11. (彩色在线) (a, b) 盆地稳定性, (c, d) 每次爆发的平均峰值数, 以及 (e, f) 不同的能量值下活跃期与 J_0 的平均持续时间 ε : $\varepsilon = 0.004$ 和 $\varepsilon = 0.005$ 参数为 $N=50$, $P_{rew}=0.3$, $k=11$, $c=1$ 和 $\delta J=0.01$ 。

六、 结论

我们研究了突发同步的性质基于映射的混沌神经元小世界网络盆地稳定性。随着重新布线概率的增加突发同步体制的盆地稳定性增加, 达到最大值, 然后逐渐增加减少。同步系统的稳定性问题, 在神经网络中有一个特殊的意义, 因为在大规模复杂的神经回路通常有多种对于可能的振荡模式, 了解某个区域对外部扰动的鲁棒性是非常重要的 [32, 33]。特别是, 由于大多数神经网络是自适应系统, 其中连接结构可以随着细胞和突触动力学的发展而演变, 因此必须研究拓扑重组对集体行为的影响。盆地稳定性框架已经使我们能够揭示动力网络行为的重要机制。在参考文献 [34] 中, 作者指出, 同步状态的吸引盆的变化是同步状态下滞回行为的基础向同步的过渡。参考文献 [35] 的作

者发现在随机重新布线的网络中小世界拓扑对动态连接的敏感性最大,即小世界网络中同步机制的盆稳定性在较低的重新布线频率下开始增加。我们已经考虑过包含几十个振荡器的小世界网络,这对于大规模的生物神经网络来说肯定不是这样。然而,在许多国家体外实验研究神经培养进化为多簇状态,其中每个密集簇包含大约 100 个细胞(参见,例如,参考文献[36])。我们的结果表明,网络结构的规则特征和随机特征之间存在一个最佳的比率,对应于突发同步状态的最大稳定盆。另一点是,与不同的 Rossler 振荡器中,如果增加网络拓扑中的随机性,则盆地稳定性保持相对较大,即在盆地稳定性的意义上,爆破振荡器显示的同步比重连更可靠。

我们还发现,耦合密度和

耦合强度对盆地稳定性的影响相似,即:。

它们有一些临界值,低于这个临界值,脉冲就会爆发

同步机制很难达到,在同步机制之上,盆地的稳定性会增长。当耦合强度或耦合密度较大时,盆地稳定性随耦合强度或耦合密度的增大而减小。一个有趣的依赖性盆地的稳定性对参数的个别节点动力学观察; i、例如,在同一个网络中,只要改变松弛性或兴奋性参数,就有可能获得小流域或大流域的稳定性。我们已经解释了这种效应,揭示了在这种集体现象中,每次爆发的尖峰数起着关键作用。文中还讨论了网络规模对突发同步的影响和选择突发同步的准则。

有趣的是, 尽管我们爆破振荡器及其应用, 我们发现连接的重新布线会影响盆地的稳定性类似于小世界网络的相同 Rossler 振荡器 [21]。这一结果表明了这种效应在相当广泛的一类复杂振荡网络中的普遍性。然而, 还需要研究其他类型的振荡器和其他类型的同步。我们的计算证实了盆地稳定性方法是研究大系统同步现象的最方便的方法, 因为在大系统中, 由于元素不完全相同, 其他方法几乎不适用。

致谢

这项工作得到了俄罗斯联邦政府的支持联合会 (与俄罗斯皇家科学院应用物理研究所签订的第 14. Z50. 31. 0033 号协议)。

参考文献

- [1] E.M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting* (The MIT Press, Cambridge, 2007).
- [2] R. Albert and A.-L. Barabási, *Statistical mechanics of complex networks*, *Rev. Mod. Phys.* 74, 47 (2002).
- [3] M. E. Newman, *The structure and function of complex networks*, *SIAM Rev.* 45, 167 (2003).
- [4] S. H. Strogatz, *Exploring complex networks*, *Nature* 410, 268 (2001).
- [5] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, *Complex networks: Structure and dynamics*, *Phys. Rep.* 424, 175 (2006).
- [6] A. B. Neiman and D. F. Russell, *Synchronization of Noise-Induced Bursts in Noncoupled Sensory Neurons*, *Phys. Rev. Lett.* 88, 138103 (2002).
- [7] I. Belykh, E. de Lange, and M. Hasler, *Synchronization of Bursting Neurons: What Matters in the Network Topology*, *Phys. Rev. Lett.* 94, 188101 (2005).
- [8] N. F. Rulkov, *Regularization of Synchronized Chaotic Bursts*, *Phys. Rev. Lett.* 86, 183 (2001).
- [9] X. Lang, Q. Lu, and J. Kurths, *Phase synchronization in noise driven bursting neurons*, *Phys. Rev. E* 82, 021909 (2010).
- [10] S. Liepelt, J. A. Freund, L. Schimansky-Geier, A. Neiman, and D. F. Russell, *Information processing in noisy burster models of sensory neurons*, *J. Theoret. Biol.* 237, 30 (2005).

- [11] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Vol. 12 (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).
- [12] G. V. Osipov, J. Kurths, and C. Zhou, *Synchronization in Oscillatory Networks* (Springer, Berlin, 2007).
- [13] C. A. S. Batista, E. L. Lameu, A. M. Batista, S. R. Lopes, T. Pereira, G. Zamora-Lopez, J. Kurths, and R. L. Viana, Phase synchronization of bursting neurons in clustered small-world networks, *Phys. Rev. E* 86, 016211 (2012).
- [14] M. Dhamala, V. K. Jirsa, and M. Ding, Transitions to Synchrony in Coupled Bursting Neurons, *Phys. Rev. Lett.* 92, 028101 (2004).
- [15] Y. Shen, Z. Hou, and H. Xin, Transition to burst synchronization in coupled neuron networks, *Phys. Rev. E* 77, 031920 (2008).
- [16] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Collective dynamics of “small-world” networks, *Nature* 393, 440 (1998).
- [17] D. J. Watts, *Small Worlds* (Princeton University Press, Princeton, 1999).
- [18] C. J. Stam and J. C. Reijneveld, Graph theoretical analysis of complex networks in the brain, *Nonlin. Biomed. Phys.* 1, 3 (2007).
- [19] E. Bullmore, O. Sporns, Complex brain networks: Graph theoretical analysis of structural and functional systems, *Nat. Rev. Neurosci.* 10, 186 (2009).
- [20] G. Gong, Y. He, L. Concha, C. Lebel, D. W. Gross, A. C. Evans, C. Beaulieu, Mapping anatomical connectivity patterns of human cerebral cortex using in vivo diffusion tensor imaging tractography, *Cereb. Cortex* 19, 524 (2008).
- [21] P. J. Menck, J. Heitzig, N. Marwan, and J. Kurths, How basin stability complements the linear-stability paradigm, *Nature Phys.* 9, 89 (2013).
- [22] P. J. Menck, J. Heitzig, J. Kurths, and H. Joachim Schellnhuber, How dead ends undermine power grid stability, *Nat. Commun.* 5, 3969 (2014).
- [23] D. A. Wiley, S. H. Strogatz, and M. Girvan, The size of the sync basin, *Chaos* 16, 015103 (2006).
- [24] V. I. Nekorkin, L. V. Vdovin, Diskretnaya model neyronnoy aktivnosti (Discrete model of neural activity), *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikladn. Nelineyn. Din.* 15, 36 (2007) (in Russian).
- [25] M. Courbage, V. I. Nekorkin, L. V. Vdovin, Chaotic oscillations in a map-based model of neuronal activity, *Chaos* 17, 043109 (2007).
- [26] K. Josić and D. J. Mar, Phase synchronization of chaotic systems with small phase diffusion, *Phys. Rev. E* 64, 056234 (2001).
- [27] T. Pereira, M. S. Baptista, and J. Kurths, Phase and average period of chaotic oscillators, *Phys. Lett. A* 362, 159.
- [28] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Dover, New York, 2003).
- [29] V. I. Nekorkin and O. V. Maslennikov, Spike-burst synchronization in an ensemble of electrically coupled discrete model neurons, *Radiophys. Quant. Electron.* 54, 56 (2011).
- [30] M. Courbage, O. V. Maslennikov, and V. I. Nekorkin, Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons, *Chaos*,

Solitons & Fractals 45, 645 (2012).

[31] O. V. Maslennikov, V. I. Nekorkin, Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control, *Phys. Rev. E* 90, 012901 (2014).

[32] G. Deco, V. Jirsa, and K. J. Friston, The dynamical and structural basis of brain activity, in *Principles of Brain Dynamics: Global State Interactions*, edited by M. I. Rabinovich, K. J. Friston, and P. Varona (The MIT Press, Cambridge, 2012).

[33] M. Diesmann, M. O. Gewaltig, A. Aertsen, Stable propagation of synchronous spiking in cortical neural networks, *Nature* 402, 529 (1999).

[34] Y. Zou, T. Pereira, M. Small, Z. Liu, and J. Kurths, Basin of Attraction Determines Hysteresis in Explosive Synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 112, 114102 (2014).

[35] V. Kohar, P. Ji, A. Choudhary, S. Sinha, and J. Kurths, Synchronization in time-varying networks, *Phys. Rev. E* 90, 022812 (2014).

[36] S. Teller, C. Granell, M. De Domenico, J. Soriano, S. Gómez, and A. Arenas, Emergence of assortative mixing between clusters of cultured neurons, *PloS Comput. Biol.* 10, 1003796 (2014).