嵌合体状态的盆地稳定性

Sarbendu Rakshit1, Bidesh K. Bera1, Matjaž Perc2,3 & Dibakar Ghosh1

1 印度加尔各答印度统计研究所物理和应用数学,700108
2 科罗马里博尔大学自然科学与数学学院 160，SI-2000，斯洛文尼亚,马里博尔
3 应用数学和理论物理中心，马里博尔大学,3，SI-2000，马里博尔，斯洛文尼亚
支撑材料请求应发送至 D.G.（电子邮件：diba.ghosh@gmail.com）

本文研究了耦合同振子网络中的嵌合体态,即由空间相干和非相干动力学共存域组成的复杂时空模式。这些有趣的时空模式首次在非局部耦合的相位振荡器中被报道,并且表明这种混合型行为只发生在非局部和全局耦合网络中特定的初始条件下。自嵌合体发现以来，初始条件对嵌合体态的影响一直是一个基本问题。本文研究了嵌合体态、非相干态和相干态对初始条件的鲁棒性。为此，我们采用与吸引池体积有关的盆稳定性方法，并以非局部和全局耦合的时滞 Mackey-Glass 振荡器为例。先前的研究表明,嵌合体态的存在可以用平均相速度和统计方法来表征，例如，通过使用准备好的初始条件，非相干的强度。在这里，我们进一步展示了如何在大范围的参数空间中，通过盆地稳定性测度来识别和量化不同动力状态的共存。

在过去的十年中,关于同耦合振子的一个最有趣的研究领域是相干态和非相干态的共存。这种有趣的时空行为是由 Kuramoto 和 bottogh[1]在一个具有指数耦合函数的非局部耦合 Ginzburg-Landau 振荡器网络中首次观察到的。后来，艾布拉姆斯和斯特罗加茨将这种有趣的时空状态命名为嵌合体状态[2]。最初，人们认为非局部耦合拓扑是复杂网络中嵌合体状态存在的必要条件。然而,随后的研究表明,

这种情况并非绝对必要，而且嵌合体状态也可以在全对全[3－9]和最近邻[11－13]耦合振荡器中观察到，即使使用单侧局部耦合[14]。嵌合体状态首先在相位振荡器中被检测到，之后它们也在极限环振荡器[12]、[15]、混沌振荡器[16]、混沌映射[17]、超混沌时滞系统[18]中被报道，甚至在表现出爆发动力学的神经元系统[10]、[14]、[19]、[20]中也被报道，在多重网络[21-24]中也观察到嵌合体状态。根据耦合网络中对称性破坏的类型，嵌合体状态可分为各种类型，如振幅介导嵌合体[25]、全局聚集嵌合体[26]、振幅嵌合体和嵌合体死亡[27]。此外，基于相干和非相干运动的时空行为，人们创造了新的术语，如呼吸嵌合体[28]、不完全嵌合体[29]、旅行嵌合体[30]、不完全旅行嵌合体[14]以及螺旋波嵌合体[16]、[31]，嵌合体状态的鲁棒性也在实验中得到了验证。嵌合体状态的首次实验观察是在光学[32]和化学[33，34]系统中进行的。之后，嵌合体状态也在其他一些系统中进行了实验观察，如电子电路[35]、[36]、电化学[37]、[38]和光电系统[39]、布尔网络[40]、光学梳[41]，以及机械系统[29]、[42]。嵌合体状态也出现在现实世界系统[43]中，如电网[44]、[45]、，社交网络[46]，正如在一些候鸟和水生哺乳动物的单半球慢波睡眠中所观察到的那样[47]，[48]。与后者相关，在慢波睡眠中，一半大脑休息，神经元振荡器同步，而另一半清醒，神经元因此失步。

自发现以来，初始条件对复杂动力学网络中嵌合体态的存在起着至关重要的作用。在许多系统中，嵌合体和完全同步态共存，但嵌合体态只在特定的初始条件下出现，并不是通过自发对称破缺出现的。

因此，对于复杂动态网络中的嵌合体状态，需要适当选择初始条件[49]。然而，也有研究表明嵌合体可以在随机[35]或准随机[50]初始条件下出现。对于非局部和局部（最近邻）相互作用，耦合网络中的每个节点一次不与所有其他节点相互作用，因此有可能在适当选择初始条件的情况下出现嵌合体。相反，对于全局（全对全）耦合网络，如果使用简单的标量扩散耦合。但是，如果系统表现出多稳态行为，那么利用扩散相互作用的全局耦合网络中有可能出现嵌合体状态。最近，参考文献[4]表明，尽管如此，全球耦合网络中的嵌合体状态仍然可以通过所谓的强度诱导机制出现。基于以上考虑，我们可以得出结论，耦合振子网络系统的初始条件对嵌合体态的出现至关重要。然而，在不同的初始条件下，在特定的耦合强度下出现嵌合体态以及相干态和非相干态的可能性还没有得到研究，值得特别关注。

以此为动机，我们研究了不同嵌合体状态对初始条件的鲁棒性。为此，我们采用了盆地稳定性（BS）[51]的概念，它与吸引盆地的体积密切相关。BS 方法是非线性的、非局部的，但很容易适用于高维系统。最近，BS 已被用于量化无延迟[52]和时滞系统[53]以及电网系统[54–55]和各种其他科学领域[56－58]中的不同稳定状态。在这项工作中，我们描述了非相干，通过计算非相干强度和时间平均平均相速度分布，得到嵌合体和相干态。基于非相干强度的取值，提出了不同动力状态下的盆地稳定性测度。我们考虑时滞 Mackey-Glass 系统[59]，利用非局部和全局相互作用来探索这种现象。我们用数值方法研究了不同的动力学状态在固定的耦合强度和不同的初始历史函

数下是如何共存的。详细研究了不同耦合强度对盆地稳定性的影响。最后，我们讨论了我们的方法如何适用于量化耦合振子中的不同动力学状态，也适用于其他类型的耦合结构。

结果

以下各节将讨论在两种耦合配置（即非局部和全局）下，不同动力学状态（如非相干、相干和嵌合体状态）的盆地稳定性测度。利用非局部耦合，我们的重点将是识别耦合强度参数区域内盆地稳定性的变化耦合半径 R 。随后，由 Chandrasekhar 等人最近提出的强度机制诱导的全球耦合振子中出现嵌合体状态[4]。我们将讨论通过改变耦合强度来改变盆地稳定性的变化。我们将探讨这两种现象在网络耦合麦基玻璃系统。

非局部耦合网络

为了举例说明盆地稳定性测度，我们首先考虑了一个非局部耦合的时滞 Mackey-Glass 系统，该系统具有有限的耦合半径。数学模型如下所示：

$$\dot{x}_i = -ax_i + \frac{bx_i(t-\tau)}{1+x_i^{10}(t-\tau)} + \frac{\varepsilon}{2p}\sum_{j=i-p}^{j=i+p}(x_j - x_i), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

ε 是耦合强度，N 是网络中振荡器的总数，p 是与第 i 个振荡器耦合的环上每侧最近邻振荡器的数目，$R=p/N$ 定义为耦合半径。无耦合（即 $\varepsilon=0$, 当参数 $a=1$, $b=2$ 和 $\tau=2$. 为了模拟耦合网络（N=100）的方程，我们选择了每个振荡器的“V”形常数初始历史函数，即间隔内的历史

$[-\tau,0]$对于席席，如下所示：

$$x_{i0}=c(\frac{N}{2}-i),i=1,2,...,\frac{N}{2}\text{，同时 }x_{i0}=c(-\frac{N}{2}+i),i=\frac{N}{2},...,N$$

其中c是常数。我们可以通过改变c的值来改变初始条件。一般来说，随着耦合强度的变化，耦合网络中的非相干态通过嵌合体或多嵌合体态转变为相干态。但通过适当选择c，网络（1）中不同的动力学状态可以共存一定值。

我们确定耦合半径$R=0.3$，耦合强度$\varepsilon=0.35$的值，并在初始历史函数中改变常数c。对于c＝0.001 的示例值，即对于特定固定初始条件，网络呈现非相干状态，并且图 1（a）中示出了席的快照。席数值在随机分布在〔0.3，1.2〕中，表现为非相干态。图 1（b）显示了相应的非相干状态时空图。通过计算时均相速度，确定了非相干态ωi（参考图 1（c）中的方法部分）。所有振荡器的时均相速度均为随机分布，这表明了该特定初始条件下的非相干状态。接着，通过改变初始历史函数 XI0 中常数c＝0.03 来搜索另一初始条件，网络（1）中所有振荡器的席的快照和时空图分别示于图 1（d）和（e）中。从这些数字可以看出，整个网络（1）分为两组，一个是相干的，另一个是非相干的，它们重新集成了一个嵌合体状态。网络中每个振荡器的时间平均相位速度如图 1（f）所示，并且从该相速度剖面清楚地表示出现了嵌合体状态。因此，根据每个振荡器的初始条件，在一定的耦合强度值下观察到非相干态和嵌合体态共存。

接下来，我们发现了两种不同的动力学行为（如相干态和嵌合体态）在同一时刻的相似共存$\varepsilon=0.56$. 图 2（a）显示了c=0.09 时嵌合

体状态振幅的快照，相应的时空行为如图 2（b）所示。对于初始条件的小偏差 c ＝0.08，我们发现图 2（d）中的状态变量席显示的平滑轮廓和图 2（e）中的对应时空图。c=0.09 和 c=0.08 的平均相速度分布分别如图 2（c）和（f）所示，这是嵌合体和相干态的清晰指示。

为了清楚地区分各种动力学状态，我们计算了非相干强度（SI）（参见方法部分），这是一种基于网络时间序列的统计度量。

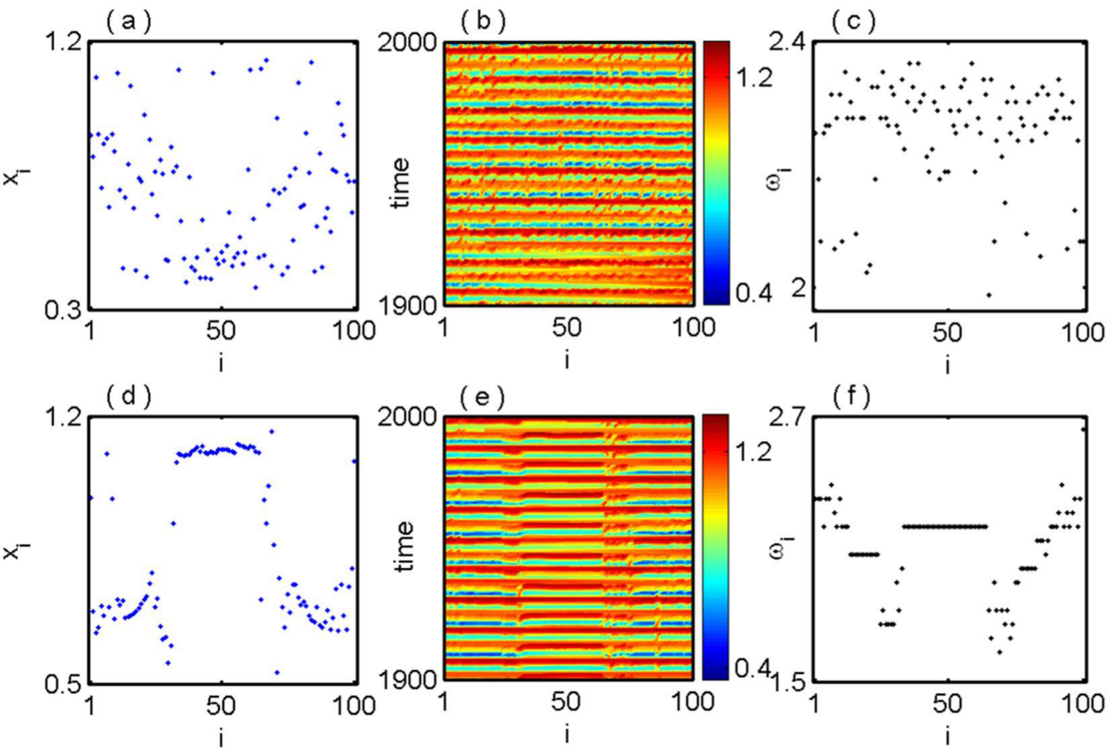

图 1. 非局部耦合麦基玻璃系统：在固定耦合强度下非相干态和嵌合体态共存。对于不同的初始条件（a，b，c）c=0.001 和（d，e，f）c=0.03，耦合半径 R=0.35。左列显示蓝点的振幅席（$i=1,2,\ldots,N$）快照，空间时间图的中间列和时间平均相速度的右列 ω_i（黑点）。

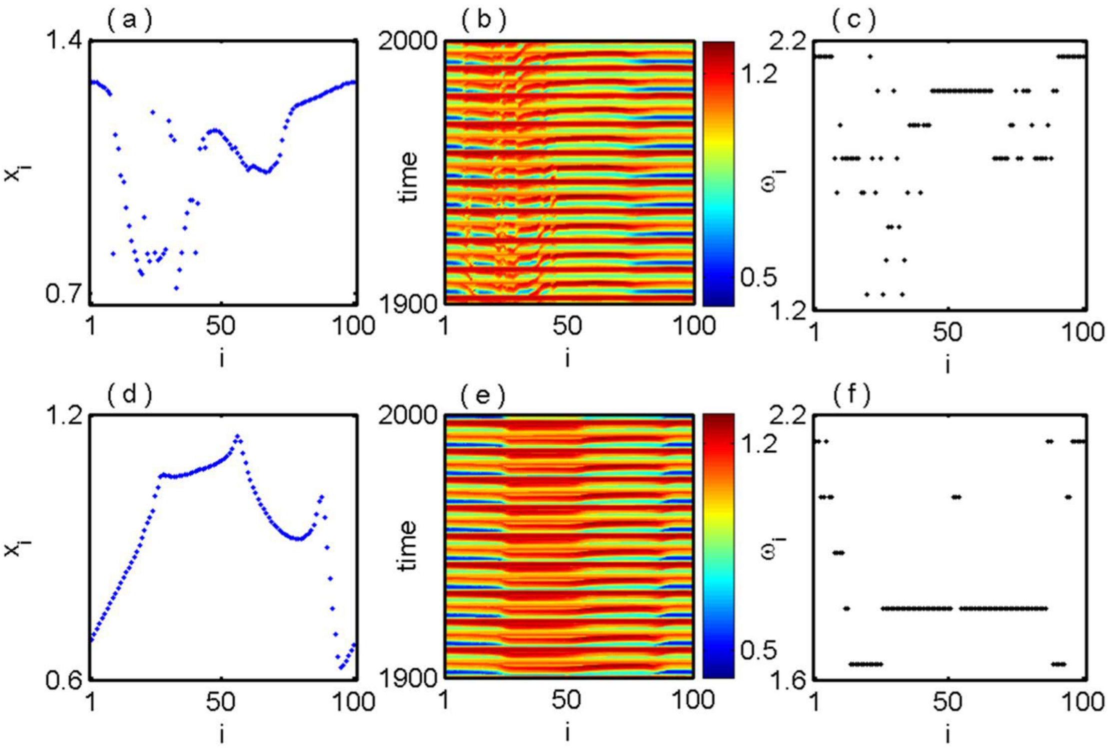

图 2. 非局部耦合麦基玻璃系统：在固定耦合强度下非相干态和嵌合体态共存。对于不同的初始条件（a，b，c）c=0.09 和（d，e，f）c=0.08，耦合半径 R=0.56。左、中、右柱席分别显示振幅 x_i、时空曲线和平均相速度的快照。

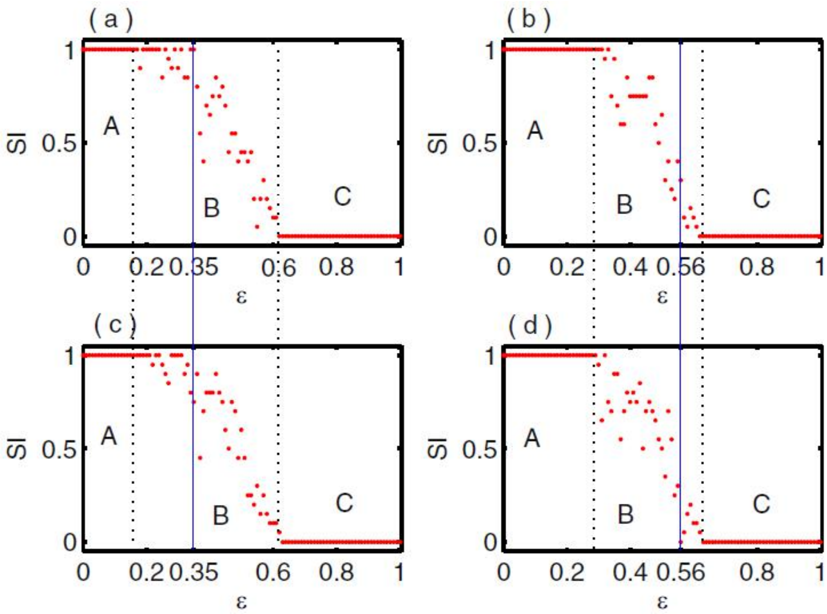

图 3. 绘制了非相干强度与耦合强度的关系图。对于固定耦合半径 R=0.3 和 N=100，（a）和（c）分别显示了图 1（a，b，c）和（d，e，f）中时空场景对应的 c=0.001 和 c=0.03 时不同初始条件下非相干强度的变化。通过耦合强度绘制一条蓝色实线 ε= 0.35，沿蓝线 SI 取（a）中的值“1”，其中（c）中 SI 的值介于“0”和“1”之间。在（b）和（d）中，通过改变相互作用强度来计算非相干强度　使用图 2（a，b，c）（c=0.09）和图 2（d，e，f） （c=0.08）的初始条件。在耦合强度ε= 0. 56时，标记一条蓝色实线，并对应该特定耦合强度 SI∈（0, 1），SI 取（d）中的值“0”。区域 A、B 和 C 分别被标记为非相干、嵌合体和相干态区域。

在这个 SI 度量中，SI 分别取非相干态和相干态的值 1 和 0，而 SI ∈(0,1）表示嵌合体状态。图 1 和图 2 分别显示了奇美拉与非相干态和嵌合体的共存。这里我们利用非相干测量的强度来描述固定初始条件下图 1 和图 2 中的不同动力学状态，结果分别在图 3（a、c）和（b, d）中示出。图 3（a）和（c）中，非相干强度与耦合强度成正比，通过采用图 1（a）（c=0.001）和 1（d）（c=0.03）中使用的初始条件。我们沿着耦合强度画一条蓝色的实线，图 3（a）和（c）中的 0.35，其中非相干态和嵌合体态共存。在图 3（a）中，蓝线与表征非相干状态的 SI 值 1 相交，而蓝线则在图 3（c）中切割 SI 值（0,1），其中表示与图 1（d）的快照相对应的嵌合体状态。同样，在图 2（a）和（d）相同的初始条件下，我们绘制了与耦合强度相关的 SI　在图 3（b）和（d）中。在耦合强度ε= 0.56，SI 的值位于图 3（b）中的（0,1）中，并在图 3（d）中的 0 处切割 SI 线（蓝线），这些 SI 线（蓝线）分别是嵌合体和相干态的清晰指示，分别如图 2（a）和（d）所示。指出相干域和非相干域的空间位置不固定，且高度依赖于初始条件。三个不同的区域 A、B 和 C 是耦合强度的范围，对于非相干态，奇美拉和相干态分别在图 3 中。如果从体积盆中取大量不同的初始条件，则耦合强度的三个不同区域 A、B 和 C 可能会根据初始条件剖面而变化。接下来，我们的目标是通过在相空间体积中，根据耦合强度的变化，取不同的初始状态，从概率的角度量化上述三种动力学状态。

通过以上分析，我们得出结论：在网络（1）中，不同的动力学状态共存于耦合强度的某一特定值ε准备充分的初始状态。现在跟踪耦合网络（1）中几种共存状态的吸引盆是非常有趣的。时滞系统的吸引盆是一个具有无穷维的函数空间。因此，利用 Hausdroff 测度理论，可以对时滞系统的吸引盆进行评价[53]。这种度量在几何上不如常微分方程吸引盆的传统概念[60]直观。以一个固定的值来形象化不同集体国家的吸引力盆地，我们将第 i 个振子的无限维初始状态空间投影到有限维空间[有关详细信息，请参阅方法部分]。我们认为初始历史函数为 $x_i(t) = \phi_i(t) = c_i\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{t^j}{j!}$，$t\in[-\tau,0]$ 其中 n 是基函数的个数，且足够大，$c_i \in R, i=1,2,...,N$。对于网络中 $N=100$ 个振荡器，我们选择规定范围内的 100 个不同随机c_i值。

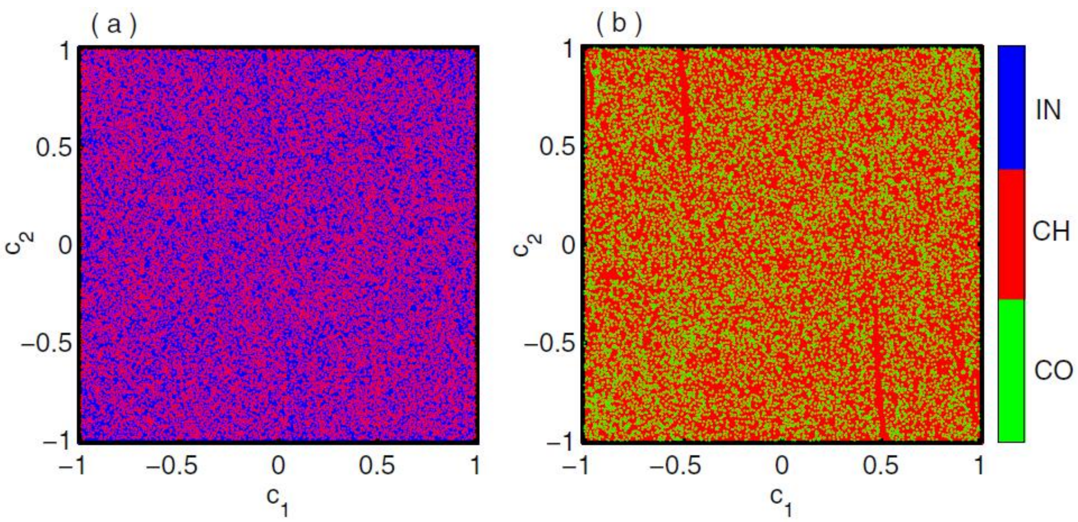

图 4. 非局部耦合麦基玻璃系统的吸引盆地：（a）非相干态和嵌合体态共存ε= 0.33，（b）嵌合体和相干态的共存ε= 0.63. 在这里，CH 和 CO 分别代表非相干态、嵌合体态和相干态。

尽管如此，对于所有不同c_i值的吸引盆地的可视化仍然是非常复杂的，为了避免这一困难，我们假设第i个振荡器的历史函数由前两个

基常数所跨越，即$c_i = \frac{(i-1)c_1 + c_2}{i},\ i \geq 3$，其中$c_1$和$c_2$是范围内的随机数[-1,1]，$x_i(t) \in [-3,3]$表示$t \in [-\tau, 0]$。在图 4 中，我们展示了非局域耦合 Mackey-Glass 系统（1）中不同状态共存的吸引盆，其固定值为ε. 图 4（a）和（b）分别显示了在固定耦合值下非相干嵌合体和嵌合体相干态共存的吸引盆地$\varepsilon = 0.33$和$\varepsilon = 0.63$. 蓝点、红点和绿点分别代表非相干态、嵌合体态和相干态。嵌合体态的吸引盆与非相干态和相干态紧密交织在一起，如图 4（a）和（b）所示。

接下来，我们通过改变耦合强度ε来计算不同动力状态下的盆地稳定性（在方法部分中描述）。盆地稳定性给我们提供了一个有趣的细节信息来了解不同的动力学状态，如非相干、嵌合体和相干态在各种初始条件下的稳定性。图 5（a）说明了非相干和嵌合体状态下的盆地稳定性的波动$\varepsilon = 0.4$通过增加多项式基的次数。从这个图可以看出，对于n，非相干态和嵌合体态的 BS 涨落几乎是饱和的$n \geq 22$. 接下来，我们检查耦合强度的另一个值的多项式基中最高阶n的作用。为此，我们选择$\varepsilon = 0.625$，其中三种状态，即非相干、嵌合体和相干状态共存。图 5（b）显示了非相干态、嵌合体态和相干态的 BS 的变化$\varepsilon = 0.625$表示为相对于多项式基的最高阶n的蓝色、红色和绿色。从这两个图（图 5（a，b））可以看出，对于足够大的n，它们各自的动力学状态的 BS 的波动趋于稳定值。因此，对于耦合系统(1)，取n=25 作为初始历史函数的最高阶就足够了。在图 5（c）中，描述了上述三种动力学状态的 BS 相对于耦合强度的不同值的变化。对于耦合强度非常小的值，非相干态仅以蓝色为主，并持续到$\varepsilon = 0.2$. 在

这个范围内，有一个很高的可能性记住记忆的最后状态是不连贯的。在这个耦合参数的临界值之后$\varepsilon \geqslant 0.2$时，嵌合体态（以红色表示）的BS出现在小范围内并逐渐增大，而非相干态则趋于减小。所以某个态的BS的湮灭代表了某个态跃迁点的清晰标志。在$\varepsilon \cong 0.5$，相干态的BS发生在这个场景中，这意味着此时记忆非相干态的可能性非常低。为了进一步增加耦合值ε，三种状态并存$\varepsilon \cong 0.6$，与嵌合体状态相比，盆地体积中出现非相干和相干状态的比例很小。的增量值 从$\varepsilon \cong 0.63$时，嵌合体态的BS值越来越小，从嵌合体态到相干态有轻微的突变（绿色标记）。也可以增加$\varepsilon \geqslant 0.63$时，非相干态的BS值被完全消除，嵌合体态在盆地体积中出现很小的区域。最后是更高的ε，相干态的BS值趋于单位值，在盆地体积中获得越来越大的空间。BS测度的这种变化给出了通过改变耦合强度来消除非相干态和嵌合体态以及发展相干态的想法。

通过同时改变耦合强度来探索BS变化的完整场景ε，对于耦合半径R，我们计算了R中的相图$R-\varepsilon$范围内的平面$R \in [0,0.5]$和$\varepsilon \in [0,1]$. 在$R-\varepsilon$非局域耦合MG振荡器的参数空间，非相干态、嵌合体态和相干态的BS分别如图6（a）、（b）和（c）所示。从图6（a）可以注意到，对于较低的值，非相干状态的BS等于'1'，在R的所有范围内。通过ε增加达到一定值时，BS表示不一致嵌合体态和相干态在盆地体积中的位置减少，获得更多点的概率增加。进一步增加R，非相干状态的BS逐渐减小，最后在图6（a）的右上角，非相干状态的BS的值变为“0”。图6（b）对应的是发生嵌合体状态的概率$\varepsilon \cong 0.3$

附近概率变大 $\varepsilon=0.5$. 但进一步增加 ε，如果我们减小 R 的值，这种高概率将继续存在。从图 6（c）可以很容易得出结论，对于较低的 R 或 ε 或者两者兼而有之，相干态的出现是不可能的。当 R 和 ε 分别从 0.01 和 0.5 增加，在足够的耦合强度和耦合半径下，相干态的 BS 变为 1。当 R 和 ε 相干态的 BS 值保持不变。

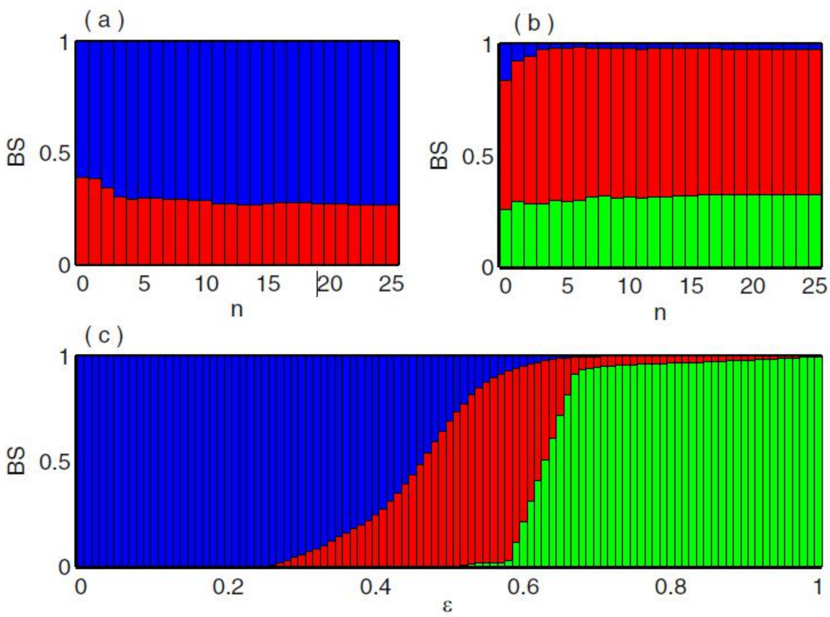

图 5. 非局部耦合 Mackey-Glass 系统的盆地稳定性分析：（a）和（b）显示了盆地稳定性相对于多项式基次数的波动 $\varepsilon=0.4$ 和 $\varepsilon=0.625$.（c） 非相干态、嵌合体态和相干态的 BS 随耦合强度的变化。蓝色、红色和绿色分别代表非相干态、嵌合体态和相干态。

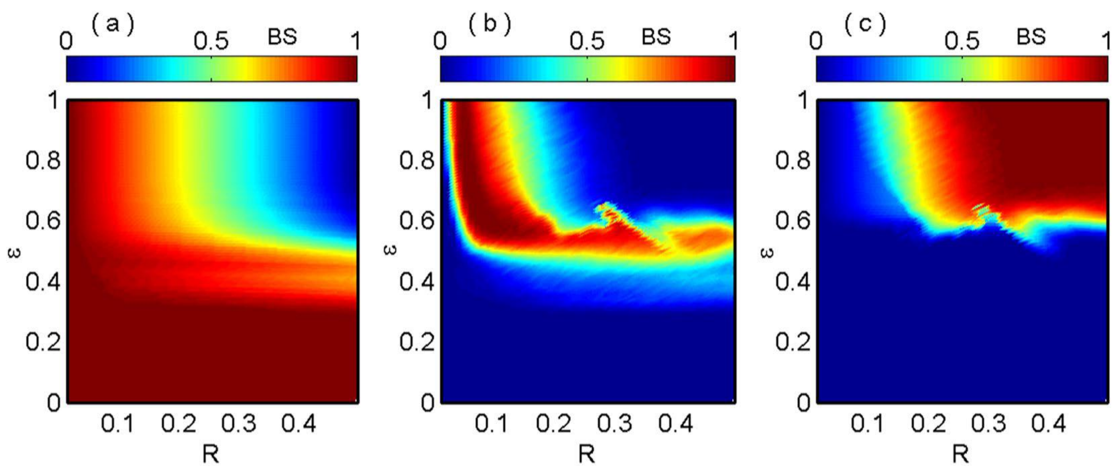

图 6. 不同动力状态的共存通过 R 中盆地稳定性度量的色条进行量化–非局域耦合 MG 振荡器的参数空间：（a）非相干，（b）嵌合体，（c）相干态。

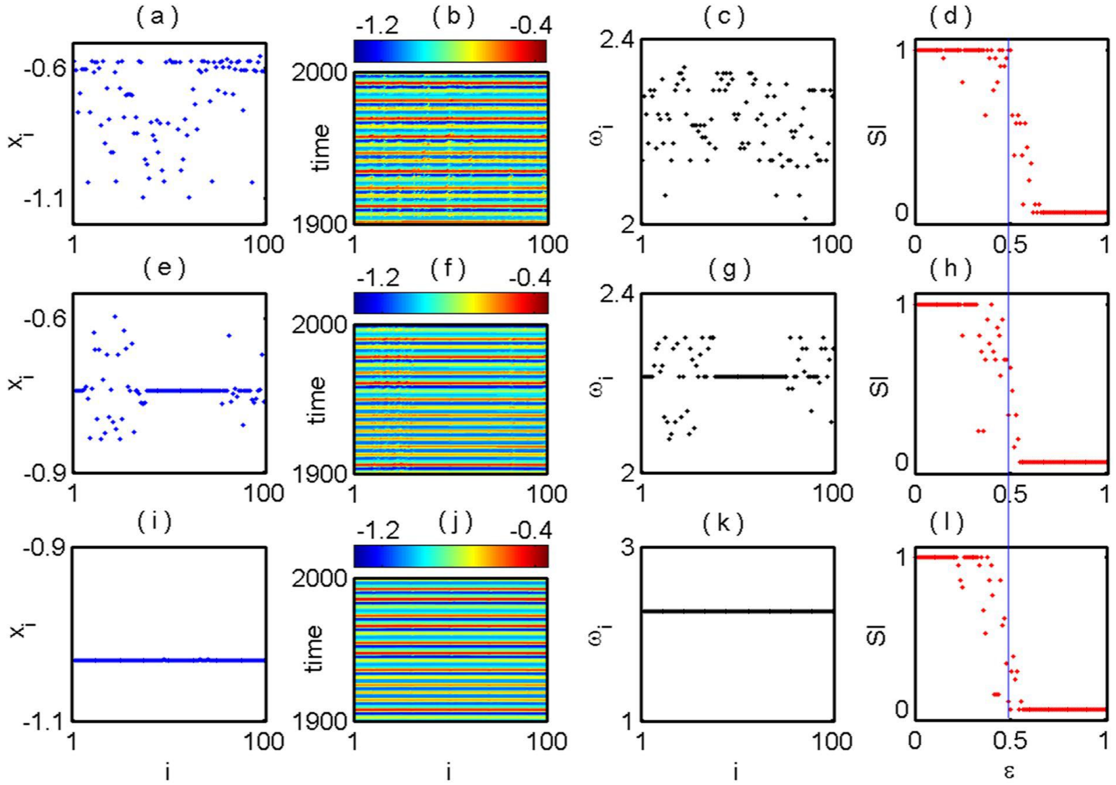

图 7. 全局耦合麦基玻璃振荡器：不同集体态在耦合强度固定值下的共存 $\varepsilon = 0.5$. 第一、第二、第三和第四面板通过改变耦合强度来显示席（蓝点）、时空图、时间平均相速度（黑点）和 SI（红点）的变化。同样，第一、第二和第三行是不同初始条件的结果, 其中，满足式子 $a_{ij} = (-1)^j \frac{i-j}{2027}$, $a_{ij} = (-1)^j \frac{i+j}{2001}$, and $a_{ij} = (-1)^j \frac{i+}{247}$。 蓝线与（d）中“1”处的 SI 值相交，这表示对应于（a）的非相干态，同样，它切割了（h）中的（0,1）和（l）中的“0”SI 值，这类似于分别对应于（e）和（i）的嵌合体和相干态。这里 N =100。

全局耦合网络

其次，为了验证盆地稳定性测度对不同动力状态共存定量的普遍性，我们考虑了具有附加强度依赖项的全局耦合 Mackey-Glass 振子网络。给出了全局耦合 Mackey-Glass 系统的数学模型方程

$$\dot{x}_i = -\overline{a}x_i + \frac{bx_i(t-\tau)}{1 + x_i^{10}(t-\tau)} + \varepsilon(X - x_i), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

其中，$\overline{a} = a + \alpha(x_i^2 + x_i^4), X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, ε 是耦合强度和 α 是强度相关参数。无耦合强度（即 $\varepsilon = 0.0$）和强度相关参数（即 $\alpha = 0.0$），对于系统参数 α =1, α =2 和 $\tau = 2$.单个振子的动力学在性质上保持不变，即在混沌状态下，

振动值越小α在[0.0，0.03]中，由于其较高的值 $0.03<\alpha<0.25$ 和$\alpha\geqslant 0.25$ 振荡器变得无界。我们修复$\alpha=0.002$，使单个振荡器处于混沌状态。通过引入这个强度参数α，通过增加不动点的数目，系统变得更加多稳态。最后，它增加了多稳态吸引子的数目，并根据初始条件出现不同的集体态共存。在没有强度参数的情况下α，即$\alpha=0.0$ 全局耦合网络（2）是非相干的或完全同步的状态，这取决于耦合强度的值。这里是强度参数α在全球耦合网络中，嵌合体状态的出现起着至关重要的作用。

在图 7 中，我们展示了在耦合强度的固定值下，非相干和相干动力学以及嵌合体态的出现$\varepsilon=0.5$ 和每个振荡器的初始历史函数的不同值。这种共存行为的特征是统计测度 SI。我们将耦合网络（2）的初始历史函数定义为 j，其中 $i=1,2,\ldots,N$ 表示$[-\tau,0]$. 下一步，我们严格地寻找共存状态出现的共同利益的价值。对于图 7（a）和（b）分别示出了席的快照和相应的长时间时空动态。

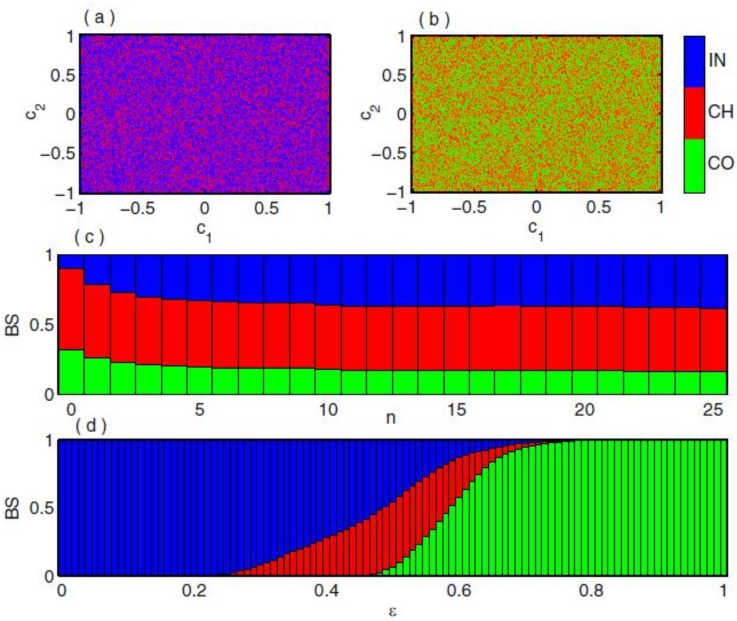

图 8. 全球耦合的麦基玻璃系统：非相干态和嵌合体态共存的吸引盆地ε= 0.34，（b）嵌合体和相干态ε= 0.56，其中 IN、CH 和 CO 分别代表非相干态、嵌合体态和相干态。非相干态、嵌合体态和相干态的稳定盆绘制在（c）中，在耦合强度下分别以蓝色、红色和绿色表示的多项式基的最高阶ε= 0.57.（d） 非相干态、嵌合体态和相干态的 BS 随耦合强度的变化.

我们还通过计算长时间平均相速度来证实这种状态ω_j图 7（c）中每个振荡器的i。在这种状态下，平均相速度在[2.0,2.35]中随机散射，这证实了振子之间的不相干。为了进一步的表征，我们利用 aij 的这个固定值，通过改变耦合强度来计算 SI 的值。在图 7（d）中，沿耦合强度的蓝线$\varepsilon = 0.5$将 SI 值削减到“1”。如果我们稍微改变系数$a_{ij} = (-1)^j \frac{i+j}{2001}$，各振子在相同耦合值下的初始历史函数$\varepsilon =$ 0.5，我们发现相干和非相干布居的混合物类似于图 7（e）中描绘的嵌合体状态，相应的时空行为如图 7（f）所示。图 7（g）绘出了这种特殊初始条件下的时间平均相速度，SI 的值位于（0,1）中，这证实了嵌合体状态（图 7（h））。平均相速度ω由于相干布居的同步性相同，嵌合体态的相干群i位于一条直线上。由于全局耦合拓扑结构的存在，嵌合体态的相干布居之间出现了完全相同的同步。随着每个振荡器的初始历史函数中系数的进一步微小扰动，通过改变$a_{ij} = (-1)^j \frac{i+j}{247}$，网络的所有节点都是同步的（由于全对全耦合），并且遵循图 7（i）中表示的平滑轮廓，并且这种相干结构随着长时间的描绘而演化（图 7（j））。此时，所有时间平均相速度的值是相同的（图 7（f）），图 7（l）中的 SI=0。

接下来我们跟踪了在耦合强度固定的情况下，全局耦合系统（2）中各种集体态的吸引域，如非相干态、嵌合体态和相干态ε以及不

同的初始历史函数。我们将第i振子的无穷维初始历史函数空间投影到有限维空间，作为成本定义为$x_i(t)=\phi_i(t)=c_i\sum_{j=0}^{25}(-1)^j\frac{t^j}{i!}$，其中$c_1$和$c_2$是范围内的随机数[−1,1]. 图 8（a）和（b）绘制了不同共存状态的吸引域，其中蓝色、红色和绿色分别与非相干、嵌合体和相干动力学状态相关，采用固定的耦合强度$\varepsilon=0.34$和$\varepsilon=0.56$. 在图 8（a）中，绘制了非相干态和嵌合体态的吸引盆，而图 8（b）表示嵌合体相干态的吸引盆。从这两个图中可以清楚地看出，非相干态、嵌合体态和相干态的吸引盆是高度复杂的。

图 8（c，d）显示了嵌合体态的盆地稳定性以及全球耦合网络（2）中的相干和非相干动力学。蓝色、红色和绿色区域是相应的非相干嵌合体和相干态。图 8（c）显示了对于足够大的n，这三个集体态的 BS 的波动趋于轻微$\varepsilon=0.57$. 图 8（d）中描绘了 BS 比例与不同耦合强度的关联场景，取 n=25。对于较小的耦合范围，非相干态占主导地位，它一直持续到$\varepsilon=0.2$以后，非相干轮廓的 BS 趋于收缩，嵌合体态出现的几率很大。在ε接近 0.47 时，相干态的 BS 出现，并随着时间的增加而逐渐增大。这三种状态并存，并一直持续到$\varepsilon\cong0.75$及以上ε相干态完全由 BS 统一控制。

讨论

我们进行了盆地稳定性分析，以量化非局部和全局耦合时滞 Mackey-Glass 振荡器的不同动力学状态，如非相干、相干和嵌合体状态。通常，这些状态之间的转换是由于参数变化而发生的，例如

耦合强度或耦合半径的变化。然而，在这里，我们证明了不同的集体态可以与网络中振荡器的不同初始态共存。为此，我们通过将初始历史函数展开为多项式基，将无限维初始状态空间投影到有限维空间。通过改变定义初始历史函数的多项式基的系数，我们得到了每个状态的时空动力学和时间平均平均相速度。因此，我们能够描述不同状态之间相对于初始条件的过渡场景，并且我们也能够量化对初始历史函数的敏感依赖。这种集体态通过统计测度 SI 来表征，也通过绘制时间平均相速度来证实。在振幅嵌合体状态中，振幅漂移，而频率锁定[61]，相应的平均相速度对于非相干、嵌合体和相干状态具有相同的特征（平滑轮廓）。因此，平均相速度并不总是能够区分嵌合体态与非相干态和相干态。为了克服这些限制，我们使用了 SI 度量，因为不同的状态具有不同的 SI 值。因此，在 SI 测度的基础上，建立了盆地稳定性框架，阐明了盆地稳定性随耦合强度的变化规律。在使用盆稳定性测度时，我们可以有效地考虑耦合网络中每个振子的大量初始条件，并且在由耦合半径R和耦合强度ε定义的参数空间中，我们给出了非相干态、嵌合体态和相干态盆稳定性的变化。

我们注意到嵌合体状态的盆地稳定性方法可以提供延迟神经元模型的初始历史函数的额外信息，其中多稳定性是常见的。我们还预期，基于盆地稳定性的不同动力学状态的量化度量可以为在复杂的动力学系统和神经网络中获得稳定且鲁棒同步的状态提供一个很好的方法。

方法

非相干测量强度。为了表征不同的集体动力学状态，我们使用了一种定量的测量方法作为 Gopal 等人最近提出的非相干强度。为了计算这个度量，我们首先引入ω_i的差分动力变量$\omega_i = x_{i+1} - x_i, i = 1,2,\ldots,N$，然后是标准差$\sigma$是

$$\sigma = \left\langle \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(w_i - \langle w \rangle)^2} \right\rangle_t, \tag{3}$$

式中，$<\omega>=\frac{1}{N}\sum_1^N \omega_t$ 和<>表示时间平均值。这个标准差度量σ区分相干态和非相干态分别取零值和非零值，但不能区分嵌合体态和非相干态。为了克服这个困难，我们将局部标准差计算为$\sigma(m)$是的。为了区分嵌合体态和非相干态，我们将振荡器的数目分成M个等长$n = N/M$的单元。局部标准差$\sigma(m)$定义为

$$\sigma(m) = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=n(m-1)+1}^{mn}(w_i - \langle w \rangle)^2} \right\rangle_t \quad \text{for} \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{4}$$

以上数量$\sigma(m)$对于每个连续n个振荡器计算，非相干强度（SI）定义为

$$SI = 1 - \frac{\sum_{m=1}^{M} s_m}{M}, \quad s_m = \Theta[\delta - \sigma(m)], \tag{5}$$

哪里$\theta(\cdot)$是 Heaviside 函数和δ是一个预先定义的阈值，通常是δ根据席的值，取席数、最大值、最大值、最小值、最小值的一定百分比值。δ以及$\sigma(m)$，s_m取“1”或“0”，因此 SI=1 或 SI=0 或 0<SI<1 的值分别表示非相干态、相干态和嵌合体态。为了计算 SI，我们选择了一个最佳的料仓尺寸M=20 和$\delta = 0.05$。

平均相速度。为了证实耦合振子网络中存在不同的态,如非相干态、相干态和嵌合体态,我们计算了时间平均平均相速度ω_i表示每个振荡器，定义为

$$\omega_i = \frac{2\pi M_i}{\Delta T},\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{6}$$

其中ΔT是足够大的时间间隔，米是时间间隔中第i个振荡器的时间序列席（XT）的最大值的数目ΔT。

流域稳定措施。时滞微分方程的初态空间是一个无穷维函数空间。初始状态空间中的任何函数都可以展开为正交基或非正交基的线性组合。在数值计算中，我们采用P_n，即所有次多项式的最大n次空间作为DDE的初始函数空间,它是以$(1,t,t^2,...,t^n)$为基的多项式空间的$n+1$维子空间。其他类型的基，如三角基、勒让德基或伯恩斯坦基等，也可以看作是空间。对于任何$\phi(t)\in P_n$，将存在唯一的$(a_0,a_1,a_2,...,a_n)$使得$x(t)=\phi(t)=\sum_{j=0}^{25} a_j \frac{t^j}{j!},t\in[-\tau,0]$，其中$\tau$是延迟时间，$a_j\in R$.

在这种情况下，我们的耦合麦基玻璃系统可以写为

$$\dot{x}_i = -ax_i + \frac{bx_i(t-\tau)}{1 + x_i^{10}(t-\tau)} + K\sum_{j=1}^{N} H_{ij}(x_j - x_i),\ i = 1,\ \ldots,\ N, \tag{7}$$

其中$H_{i,j}$表示耦合动力系统网络的耦合矩阵，K表示耦合强度。整个耦合系统（7）的初始历史函数用P_n^N表示的集合，它是P_n空间

的 N 次乘积。所以第 i 个振荡器的初始历史函数可以写成

$x_i(t)=\phi_i(t)=\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\frac{t^j}{j!}, t\in[-\tau,0]$。其中，其中 τ 是延迟时间，$a_{ij}\in R$ 的取值范围对盆地稳定性的计算起着重要的作用。

对于数值计算这一部分，我们考虑从中随机选择 $a_{ij}\in R$ 的值，其中 $(j=0,1,\ldots,n, i=1,,2,\ldots,N)$ 为每个振荡器生成随机初始历史函数。然后我们将整个系统（7）积分为足够大的初始历史函数数 V，其中初始函数数 V（say）最终到达相应的特定状态（在我们的研究中，状态是非相干的、相干的或嵌合体的）。然后，该特定状态的 BS 可以估计为 V_S/V。BS 的值介于 0 和 1 之间。BS=0 意味着对于任何随机初始条件，状态都是不稳定的；对于任何随机扰动，当 BS=1 时，状态都是单稳定的。对于任何随机初始历史函数，BS<1 对应于获得多稳态状态的概率。

数值模拟。为了模拟耦合动力学网络（1）和（2），我们使用步长为 $dt=0.01$ 的改进方法。对于流域稳定性测度，我们随机选取时滞耦合网络历史函数中足够大的系数 a_{ij} 值（T=5000）[−1, 1]. 对于耦合时滞系统的仿真，每个振荡器的历史函数定义为

$$x_i(t)=\Psi_i(t)=\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\frac{t^j}{j!},\ for\ t\in[-\tau,0], \tag{8}$$

其中 a_{ij} 的值是 [−1, 1] 中的随机值，同时 $j=0,1,\ldots,n, i=1,,2,\ldots,N$。

参考文献

1. Kuramoto, Y. & Battogtokh, D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. Nonlinear

Phenom. Complex Syst. 5, 380–385 (2002).
2. Abrams, D. M. & Strogatz, S. H. Chimera States for Coupled Oscillators. Phys. Rev. Lett. 93, 174102, doi:10.1103/
PhysRevLett.93.174102 (2004).
3. Yeldesbay, A., Pikovsky, A. & Rosenblum, M. Chimeralike States in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators. Phys. Rev. Lett.
112, 144103, doi:10.1103/PhysRevLett.112.144103 (2014).
4. Chandrasekar, V. K., Gopal, R., Venkatesan, A. & Lakshmanan, M. Mechanism for intensity-induced chimera states in globally
coupled oscillators. Phys. Rev. E 90, 062913, doi:10.1103/PhysRevE.90.062913 (2014).
5. Mishra, A., Hens, C., Bose, M., Roy, P. K. & Dana, S. K. Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive
global coupling. Phys. Rev. E 92, 062920, doi:10.1103/PhysRevE.92.062920 (2015).
6. Sethia, G. C. & Sen, A. Chimera States: The Existence Criteria Revisited. Phys. Rev. Lett. 112, 144101, doi:10.1103/
PhysRevLett.112.144101 (2014).
7. B 鰄 m, F., Zakharova, A., Sch 鱳 l, E. & Lüdge, K. Amplitude-phase coupling drives chimera states in globally coupled laser networks.
Phys. Rev. E 91, 040901(R), doi:10.1103/PhysRevE.91.040901 (2015).
8. Schmidt, L. & Krischer, K. Clustering as a Prerequisite for Chimera States in Globally Coupled Systems. Phys. Rev. Lett. 114, 034101,
doi:10.1103/PhysRevLett.114.034101 (2015).
9. Schmidt, L. & Krischer, K. Chimeras in globally coupled oscillatory systems: From ensembles of oscillators to spatially continuous
media. Chaos 25, 064401, doi:10.1063/1.4921727 (2015).
10. Bera, B. K., Ghosh, D. & Lakshmanan, M. Chimera states in bursting neurons. Phys. Rev. E 93, 012205, doi:10.1103/
PhysRevE.93.012205 (2016).
11. Laing, C. R. Chimeras in networks with purely local coupling. Phys. Rev. E 92, 050904(R), doi:10.1103/PhysRevE.92.050904 (2015).
12. Bera, B. K. & Ghosh, D. Chimera states in purely local delay-coupled oscillators. Phys. Rev. E 93, 052223, doi:10.1103/
PhysRevE.93.052223 (2016).
13. Hizanidis, J., Lazarides, N. & Tsironis, G. P. Robust chimera states in SQUID metamaterials with local interactions. Phys. Rev. E 94,
032219, doi:10.1103/PhysRevE.94.032219 (2014).
14. Bera, B. K., Ghosh, D. & Banerjee, T. Imperfect traveling chimera states induced by local synaptic gradient coupling. Phys. Rev. E 94,
012215, doi:10.1103/PhysRevE.94.012215 (2016).
15. Ulonska, S., Omelchenko, I., Zakharova, A. & Sch 謑 l, E. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical
connectivities. Chaos 26, 094825, doi:10.1063/1.4962913 (2016).

16. Gu, C., St-Yves, G. & Davidsen, J. Spiral Wave Chimeras in Complex Oscillatory and Chaotic Systems. Phys. Rev. Lett. 111, 134101, doi:10.1103/PhysRevLett.111.134101 (2013).
17. Omelchenko, I., Maistrenko, Y., H 餿 el, P. & Sch 鰈 l, E. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States. Phys. Rev. Lett. 106, 234102, doi:10.1103/PhysRevLett.106.234102 (2011).
18. Gopal, R., Chandrasekar, V. K., Venkatesan, A. & Lakshmanan, M. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling. Phys. Rev. E 89, 052914, doi:10.1103/PhysRevE.89.052914 (2014).
19. Hizanidis, J., Kanas, V., Bezerianos, A. & Bountis, T. Chimera states in networks of nonlocally coupled HindmarshRose neuron models. Int. J. Bifurcat. Chaos 24, 1450030, doi:10.1142/S0218127414500308 (2014).
20. Hizanidis, J., Kouvaris, N. E., Zamora-López, G., Díaz-Guilera, A. & Antonopoulos, C. G. Chimera-like States in Modular Neural Networks. Sci. Rep. 6, 19845, doi:10.1038/srep19845 (2016).
21. Majhi, S., Perc, M. & Ghosh, D. Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure. Sci. Rep. 6, 39033, doi:10.1038/srep39033 (2016).
22. Maksimenko, V. A. et al. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing. Phys. Rev. E 94, 052205, doi:10.1103/ PhysRevE.94.052205 (2016).
23. Ghosh, S. & Jalan, S. Emergence of Chimera in Multiplex Network. Int. J. Bifur. Chaos 26, 1650120, doi:10.1142/S0218127416501200 (2016).
24. Ghosh, S., Kumar, A., Zakharova, A. & Jalan, S. Birth and death of chimera: Interplay of delay and multiplexing. Europhys. Letts. 115, 60005, doi:10.1209/0295-5075/115/60005 (2016).
25. Sethia, G. C., Sen, A. & Johnston, G. L. Amplitude-mediated chimera states. Phys. Rev. E 88, 042917, doi:10.1103/ PhysRevE.88.042917 (2013).
26. Sheeba, J. H., Chandrasekar, V. K. & Lakshmanan, M. Globally clustered chimera states in delay-coupled populations. Phys. Rev. E 79, 055203(R), doi:10.1103/PhysRevE.79.055203 (2009).
27. Zakharova, A., Kapeller, M. & Sch 鰈 l, E. Chimera Death: Symmetry Breaking in Dynamical Networks. Phys. Rev. Lett. 112, 154101, doi:10.1103/PhysRevLett.112.154101 (2014).
28. Abrams, D. M., Mirollo, R., Strogatz, S. H. & Wiley, D. A. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators. Phys. Rev. Lett. 101, (084103 (2008).
29. Kapitaniak, T., Kuzma, P., Wojewoda, J., Czolczynski, K. & Maistrenko, Y. Imperfect chimera states for coupled pendula. Sci. Rep. 4, 6379, doi:10.1038/srep06379 (2014).

30. Xie, J., Knobloch, E. & Kao, H. C. Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators. Phys. Rev. E 90, 022919, doi:10.1103/PhysRevE.90.022919 (2014).
31. Li, B. W. & Dierckx, H. Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems. Phys. Rev. E 93, 020202(R), doi:10.1103/PhysRevE.93.020202 (2016).
32. Hagerstrom, A. et al. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. Nat. Phys. 8, 658–661, doi:10.1038/nphys2372 (2012).
33. Tinsley, M. R., Nkomo, S. & Showalter, K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. Nat. Phys. 8, 662–665, doi:10.1038/nphys2371 (2012).
34. Nkomo, S., Tinsley, M. R. & Showalter, K. Chimera States in Populations of Nonlocally Coupled Chemical Oscillators. Phys. Rev. Lett. 110, 244102, doi:10.1103/PhysRevLett.110.244102 (2012).
35. Larger, L., Penkovsky, B. & Maistrenko, Y. Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems. Phys. Rev. Lett. 111, 054103, doi:10.1103/PhysRevLett.111.054103 (2013).
36. Gambuzza, L. V. et al. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators. Phys. Rev. E 90, 032905, doi:10.1103/PhysRevE.90.032905 (2014).
37. Wickramasinghe, M. & Kiss, I. Z. Spatially Organized Dynamical States in Chemical Oscillator Networks: Synchronization, Dynamical Differentiation, and Chimera Patterns. PLoS ONE 8, e80586, doi:10.1371/journal.pone.0080586 (2013).
38. Schmidt, L., Sch 鰊 leber, K., Krischer, K. & Vladimir García-Morales, V. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling. Chaos 24, 013102, doi:10.1063/1.4858996 (2014).
39. Larger, L., Penkovsky, B. & Maistrenko, Y. Laser chimeras as a paradigm for multistable patterns in complex systems. Nat. Commun. 6, 7752, doi:10.1038/ncomms8752 (2015).
40. Rosin, D. P., Rontani, D. & Gauthier, D. J. Synchronization of coupled Boolean phase oscillators. Phys. Rev. E 89, 042907, doi:10.1103/PhysRevE.89.042907 (2014).
41. Viktorov, E. A., Habruseva, T., Hegarty, S. P., Huyet, G. & Kelleher, B. Coherence and Incoherence in an Optical Comb. Phys. Rev. Lett. 112, 224101, doi:10.1103/PhysRevLett.112.224101 (2014).
42. Martens, E. A., Thutupalli, S., Fourriere, A. & Hallatschek, O. Chimera states in mechanical oscillator networks. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 110, 10563–10567, doi:10.1073/pnas.1302880110 (2013).
43. Panaggio, M. J. & Abrams, D. M. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. Nonlinearity 28, R67–R87, doi:10.1088/0951-7715/28/3/R67 (2015).

44. Motter, A. E., Myers, S. A., Anghel, M. & Nishikawa, T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. Nat. Phys. 9(3), 191–197, doi:10.1038/nphys2535 (2013).
45. D 鯹 fler, F., Chertkov, M. & Bullo, F. Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 110(6), 2005–2010, doi:10.1073/pnas.1212134110 (2013).
46. González-Avella, J. C., Cosenza, M. G. & Miguel, M. S. Localized coherence in two interacting populations of social agents. Physica A. 399, 24–30, doi:10.1016/j.physa.2013.12.035 (2014).
47. Rattenborg, N. C., Amlaner, C. J. & Lima, S. L. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. Neurosci. Biobehav. Rev. 24, 817–842, doi:10.1016/S0149-7634(00)00039-7 (2000).
48. Rattenborg, N. C. Do birds sleep in flight? Naturwissenschaften 93, 413–425, doi:10.1007/s00114-006-0120-3 (2006).
49. Martens, E. A., Panaggio, M. J. & Abrams, D. M. Basins of attraction for chimera states. New J. Phys. 18, 022002, doi:10.1088/1367-2630/18/2/022002 (2016).
50. Nkomo, S., Tinsley, M. R. & Showalter, K. Chimera States in Populations of Nonlocally Coupled Chemical Oscillators. Phys. Rev. Lett. 110, 244102, doi:10.1103/PhysRevLett.110.244102 (2013).
51. Menck, P. J., Heitzig, J., Marwan, N. & Kurths, J. How basin stability complements the linear-stability paradigm. Nat. Phys. 9, 89–92, doi:10.1038/nphys2516 (2013).
52. Rakshit, S., Bera, B. K., Majhi, S., Hens, C. & Ghosh, D. Basin stability measure of different steady states in coupled oscillators. Sci. Rep. 7, 45909, doi:10.1038/srep45909 (2017).
53. Leng, S., Lin, W. & Kurths, Y. Basin stability in delayed dynamics. Sci. Rep. 6, 21449, doi:10.1038/srep21449 (2016).
54. Machowski, J., Bialek, J. W. & Bumby, J. R. Power System Dynamics: Stability and Control (Wiley, 2008).
55. Menck, P. J. & Kurths, J. Topological identification of weak points in power grids. In Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Proceedings of NDES 2012, 1–4 (VDE, 2012).
56. Schultz, P., Heitzig, J. & Kurths, J. Detours around basin stability in power networks. New J. Phys. 16, 125001, doi:10.1088/1367-2630/16/12/125001 (2014).
57. Ji, P. & Kurths, J. Basin stability of Kuramoto-like model in small networks. The European Physical Journal Special Topics 12, 2483–2491, doi:10.1140/epjst/e2014-02213-0 (2014).
58. Maslennikov, O. V., Nekorkin, V. I. & Kurths, J. Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators. Phys. Rev. E 92, 042803, doi:10.1103/PhysRevE.92.042803 (2015).
59. Mackey, M. C. & Glass, L. Oscillation and chaos in physiological control

systems. Science 197, 287–289, doi:10.1126/science.267326
(1977).
60. Sevilla-Escoboza, R., Buldú, J. M., Pisarchik, A. N., Boccaletti, S. & Gutiérrez, R. Synchronization of intermittent behavior in
ensembles of multistable dynamical systems. Phys. Rev. E 91, 032902, doi:10.1103/PhysRevE.91.032902 (2015).
61. Gopal, R., Chandrasekar, V. K., Senthilkumar, D. V., Venkatesan, A. & Lakshmanan, M. Effect of asymmetry parameter on the
dynamical states of nonlocally coupled nonlinear oscillators. Phys. Rev. E 91, 062916, doi:10.1103/PhysRevE.91.062916 (2015).

致谢

这项研究得到了斯洛文尼亚研究所的支持机构（批准 P5-0027 和 J1-7009）。D.G.得到了印度政府科学技术部（SEB-DST）的支持（项目编号：EMR/2016/001039）。