

蒙特卡罗盆地分岔分析

Maximilian Gelbrecht^{1,2}, Jürgen Kurths^{1,2} and Frank Hellmann¹

¹ 德国柏林洪堡大学物理研究所波茨坦气候影响研究所

² 德国柏林洪堡大学物理研究所

电子邮件: gelbrecht@pik-potsdam.de

关键词: 非线性动力学, 复杂系统, 分岔, 盆地稳定性

摘要

许多高维复杂系统表现出一种极为复杂的可能渐近状态。在这里, 我们提出了一种数值方法来分析这类系统。它介于宏观有序参数的经典分析和更深入、更详细的分岔分析之间。利用我们的机器学习方法, 基于随机抽样和聚类的方法, 我们能够描述不同的渐近状态或类别, 甚至它们的吸引域。为了做到这一点, 合适的, 易于计算, 统计的轨迹随机生成的初始条件和参数的聚类算法, 如 DBSCAN。由于其模块化和灵活性, 我们的方法在许多学科中有广泛的应用前景。虽然典型的应用是振荡网络, 但它不仅限于常微分方程系统, 每一个产生轨迹的复杂系统, 如地图或基于代理的模型, 都可以进行分析, 正如我们通过应用 Dodds–Watts 模型 (一种广义 SIRS 模型) 来分析社会和生物传染。此外, 还展示了用于研究电网动力学的二阶 Kuramoto 模型和 Stuart-Landau 振荡网络, 每个振荡网络都表现出复杂的多稳态状态。该方法可用作 Julia 语言的包。

一、引言

多稳态是复杂系统的普遍现象。无论是物理学中的滞后效应、人

脑[1,2]、基因表达网络[3]、人类感知[4]、电网[5]还是气候系统[6-9]，几乎每一个足够复杂的系统都有许多稳定的渐近状态和分叉，当控制参数改变时会出现这些分叉。大多数传统的分岔分析方法，如自动[10]都依赖于通过积分的延续来跟踪状态，对于高维系统来说，这种方法越来越具有挑战性。此外，对于高维系统，通常人们还更广泛地关注渐近状态的类别，例如振荡器网络的同步与非同步状态或共享公共对称性的状态。在这里，我们填补了宏观有序参数的粗略分析和更彻底的分岔分析之间的空白。

我们的机器学习方法，montecarlo 盆地分岔分析 (MCBB)，基于随机抽样和聚类方法，将不同类别的渐近行为分解成聚类。我们的方法不是一方面研究状态和轨道的存在，另一方面也不是只跟踪单个阶参数的变化，而是根据吸引子吸引盆的体积来了解哪种吸引子是最主要的，并将每一类吸引池的变化大小量化为控制参数的函数。这为研究多稳态高维系统的分岔结构提供了新的思路。因此，我们可以把mcbb看作是一种在跟踪渐近结构每一个变化的渐近分岔的详细研究和另一端使用特殊序参数研究宏观行为的统计物理之间进行插值的方法。

首先，我们将在下一节中介绍该方法及其背后的思想。然后，算法将在第2.4节中解释。大量的范例展示了各种各样的可能的真实世界应用：Dodds-Watts社会和生物传染模型，一个二阶Kuramoto振荡器网络，用于模拟电网和Stuart-Landau振荡器网络，对许多化学和生物系统具有重要意义，将在第3节中介绍。最后，这些结果以及

所提出方法的性能和适用性将在第 4 节中讨论。

二、方法

我们的目的是学习那些高维系统的相似吸引子类，这些吸引子对于初始条件的度量具有最大的吸引盆 ρ_0 此外，我们还打算了解它们以及它们的盆地体积是如何随着参数 p 在 I_p 范围内的变化而变化的。一类吸引子应该表示一个等价的吸引子类，包括在不同的 p 上有相似的不变测度。

为此，我们将 ρ_0 当做概率分布。然后我们可以从中得出初始条件 ρ_0 和参数，并模拟系统生成轨迹。在假设遍历性的前提下，利用轨迹的尾部对吸引子上的不变测度进行采样，然后利用这些尾部样本来估计这些不变测度是否是我们分类定义等价意义下的相似测度。通过这种方式，我们可以在从同一类中提取的尾部样本中识别聚类。然后通过计算在特定 p （或其周围的小间隔）绘制的每个簇中的样本数，我们提供了在 p 的类的吸引盆地的相对大小的估计。此外，我们可以利用这些样本来研究类的成员是如何随着 p 的变化而变化的。

这里的一个关键步骤是定义不变测度的相似性。将所有尾部样本相互比较是一个潜在的昂贵步骤。此外，在具有大量渐近状态的高维系统中，我们可能对粗糙的行为类感兴趣。因此，我们通常根据不变性测度的统计信息来定义聚类之间的相似性，这些不变性测度可以很容易地使用尾部样本进行估计。为了使这个想法更精确，我们需要定义如何确定两个渐近测度是相似的。我们首先概述了调查中的正式数量。

2.1. 吸引子类及其盆体积

研究了一个具有系统参数 p 的复杂系统, 得到了一条 $\dot{x}=F(x,t;p)$ 对于初始条件 x_0 。这可以是一个常微分方程组 $x_{n+1}=F(x,t;p)$ 。如果这是一个足够好的动态系统, 那么 ρ_0 将逐渐演化为 ρ_∞ , 不变测度 ρ_A 的线性组合, 关于吸引子, 线性膨胀系数为 b_A 的系统

$$\rho_\infty = \sum_A b_A \rho_A. \quad (1)$$

当我们改变参数 p 时, 系统的吸引子集和不变测度也会改变。给出了不变测度相似性的概念, 定义了渐近状态的等价类。表示对于系统参数 p 出现的等价类元素, 我们为每个类都有一个参数化的度量空间。假设每个 p 只有有限个数, 则给出了一类测度空间的元素, 作为 C^A 的线性组合, 带系数

$$\rho_c(p) = \sum_{A \in C_p} c^A \rho_A, \quad (2)$$

然后我们可以分解 ρ_∞ 变成这样一个 $\rho_c(p)$ 的线性组合, 在每个 p 处, 系数为 $b_c(p)$ 处:

$$\rho_\infty(p) = \sum_c b_c(p) \rho_c(p). \quad (3)$$

这里我们假设 $\rho_c(p)=0$ 和 $b_c(p)=0$, 如果类在 p 处为空。当我们从参数 I_p 和初始条件中取样时 ρ_0 , 然后运行系统, 得到的轨迹将有概率 $b_c(p)$ 渐近采样中的不变量测度。

2.2. 渐近测度的相似性

使这一想法具有可操作性的关键挑战是定义相似性的概念。让我

们首先考虑一个极端情况：渐近测度的线性响应表明可以识别 $\rho_A(p)$ 和 $\rho_A(p+\Delta p)$ 是属于同一类的，如果它们是由光滑连续的测度连接的。也就是说，它们之间的差异在适当的意义上平滑地消失 Δp 变为零，例如在 [11, 12] 的意义上。当采样轨迹时，我们可以通过要求这种连续性的一些离散概念来建立样本簇，确保它在适当的极限下收敛到正确的连续条件。

用这种方法建立的类使我们坚定地处于分岔分析的领域，我们将解决渐近状态下的每一个势差。如上所述，当渐近状态的数目较大时，这可能不理想，并且在高维空间上设计一个不昂贵的离散相似性度量是不简单的。

另一个极端是序参数，我们可以考虑 $\rho_A(p)$ 和 $\rho_A(p+\Delta p)$ 相似，如果它们导致相同的序参数达到某个有限界。这将使我们直接进入统计物理学的领域，但要求我们已经知道我们的系统有什么有意义的秩序参数。

一般来说，我们是通过利用统计数据的加权差和构造测度空间上的伪度量来构造类的 $S_k(\rho)$ 措施的实施。然后，采样的轨迹为我们提供了一种估计这些统计数据的方法，从而提供了基本不变度量之间的伪度量距离：

$$D(\rho^i, \rho^j) = \sum_k w_k |S_k(\rho^i) - S_k(\rho^j)|. \quad (4)$$

具体来说，我们将表明，对于本文中考虑的示例，跟踪度量的均值和方差，编码吸引子在相空间中的位置和大小就足够了：

•吸引子的位置：

$$E_k = \langle x \rangle_{\rho_k}$$

•吸引子的大小:

$$\text{Var}_k = \langle (x - E_k)^2 \rangle_{\rho_i}$$

其中 ρ_k 表示系统维 k 上的边际分布。

我们进一步考虑这些统计数据在系统维度上的直方图。当系统由许多相同的元素组成时，这是特别有用的，它允许我们识别与排列对称性相关的渐近状态。这对于网络化系统的应用至关重要，例如完全连通网络上的动力系统将具有对称群 S_n 。下一节将对技术方面进行更详细的讨论。依赖于所研究的系统，其他统计，如高阶矩或熵措施，也可以使用。我们的算法实现为此提供了一个灵活的框架(见附录 a)。

2.3. 聚类

最后，我们根据测度距离的估计构造样本簇。再次遵循上一节的论点，如果两个样本之间存在距离度量的平滑响应(见图 1)，我们希望将它们识别为来自同一类非单调状态的两个样本。我们可以要求观测到的距离是(高达一个因子)渐近状态对参数变化的线性响应的有限标度。对于每个具有参数 $p^i \pm \delta p$ 的样本，我们继续与 p^i 积分，其中 $\delta p \approx \langle \min_j \|p^i - p^j\| \rangle_i$ 应该是一个典型的参数间隔，导致样本来自度量 $\rho^{i \pm}$ 我知道。然后，我们将试验 i 和 j 之间的差异 $D(\rho^i, \rho^{i \pm})$ 与继续积分的结果的差异进行比较 $\delta_i^\pm D(\rho^i, \rho^{i \pm})$ 。如果前者要大得多，我们假设州与州之间没有直接的延续。如果有一系列的状态连接在一起，那么两个状态就在同一个集群中。

我们也可以尝试直接从数据中提取样本间距离的合理值，而不是

这种计算密集连续研究。这将导致一个恒定的响应大小参数 ϵ_{DB} 所有试验的分贝，理想情况下是一个特定的百分位，实际响应分布 δ_i^\pm 。当我们在距离计算中加入参数邻近约束和权重 ω_p 时，新的条件将读取， i 和 j 之间被连接的时候有

$$\sum_k w_k |S_k(\rho^i) - S_k(\rho^j)| + w_p |p^{(i)} - p^{(j)}| < \epsilon_{DB}. \quad (5)$$

这样的标准是基于密度的聚类算法的一部分，比如 DBSCAN [13]，我们可以用它来区分给定一组适当统计信息的不同类别的渐近状态。如果一个单一的，恒定的阈值像 ϵ_{DB} 的使用，它还允许我们改变这个阈值，以解决不同类别的渐近更细或更粗：如果我们选择一个大的 ϵ_{DB} 许多类似的渐近状态将被分组成一个单独的簇

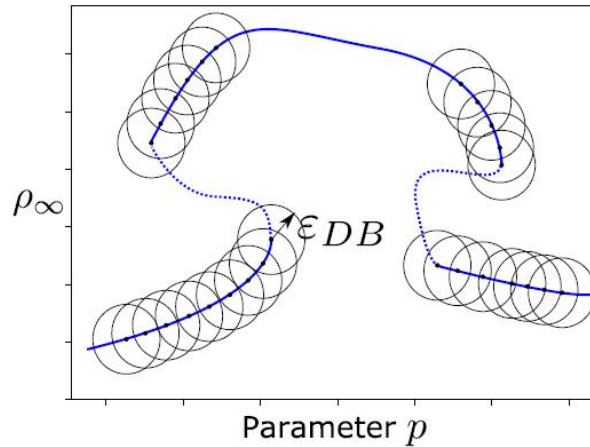


图 1. 具有稳定渐近状态（蓝色实线）和不稳定渐近状态（蓝色虚线）的示例动态示意图。如果两个试验 i 和 j 通过公共连接，则它们属于同一非对称状态 ϵ_{DB} 社区。

对应于一大类渐近状态。相反，一个较小的 ϵ_{DB} 将导致更多不同的簇，从而更精细地解析渐近状态。图 1 示意性地说明：只要这个常数阈值小于所讨论的两个渐近状态的轨迹之间的最小距离，它们就会被分解成不同的簇。

最关键的是，这里描述的所有步骤都可以在系统维度中以最二次方的比例进行。这意味着高维系统可以用这种方法来研究。

2.4. 算法

我们现在更详细地描述实现上述思想的算法。mcbb 是一个模块化算法：大多数步骤可以修改，以适应动态系统的问题。算法 1 总结了这一过程，并在下面详细描述了每一步。

2.4.1. 安装程序

我们使用聚类算法来区分不同类别的渐近状态，每一种方法都评估一个 N Monte-Carlo 试验。给定一个动力系统，如常微分方程系统 $\dot{x}=F(x,t;p)$ 或 $x_{n+1}=F(x,t;p)$ 带 $x \in R^N d$ ，我们从分布中得出初始条件 $x_0^{(i)}$ 分布的 U_{IC} 和 U_p 参数值。在下面的内容中，我们将使用均匀分布集成电路和附录 B 简要讨论了对分布的依赖性。虽然我们将主要关注具有一个参数维的系统，但原则上也可以研究具有多个参数维的系统。特别是具有两个不同参数的设置可以提供对所研究系统动力学的有用见解。然而，具有三个或更多参数维的系统的结果更难可视化，并且需要指数级的更多试验来在参数空间中创建足够的密度。与此相反，对于盆地稳定性而言，所需样本的数量并不随初始条件空间的大小而变化。

2.4.2. 集成

随后，对所有的配置 $(x_0^{(i)}, p^{(i)})$ 进行了求解。积分时间必须对系统进行适当的设置，以便达到渐近状态。在丢弃瞬态之后，系统被集成足够长的时间。虽然在理论上，选择合适的积分时间和暂态时间是非

常重要的，但在实践中，人们应该事先了解系统的时间尺度。在大多数情况下，选择这些时间在合理的大值和检查他们的个人轨迹是足够的。在今后的工作中将讨论更复杂的方法。在很长的瞬变过程中，如果系统没有真正收敛，我们可以观察亚稳态的吸引盆。有关此类盆地的相关讨论，参见示例[14]。在这种情况下，结果将取决于模拟时间。

本文提供的 Julia 包（见附录 A）使用微分方程组[15]求解 ODE 系统。库会自动选择适当的解算器，例如 Tsit5 或 Verner 方法[16, 17]。尽管这些方法在积分过程中具有自适应步长的特点，但是我们将轨迹保存在一个恒定的步长上，这样所有的轨迹的结果都保存在同一时间步长上，然后我们考虑由一组轨迹的最终分数提供的样本。

2.4.3. 集成评估

在以这种方式生成的每个尾部样本上，我们评估一组统计信息，通常我们考虑每个系统维度的统计信息数。这些包括每个默认的位置和吸引子的大小作为尾部样本的平均值和标准偏差。不过，其他统计数据也有可能。因此，我们得到 N 个统计矩阵 S_i - 每个 $(N_d \times N_s)$ 用元素 $S_{i,kl}$ 定尺寸。

2.4.4. 聚类

对于大多数聚类算法，所有样本之间的距离矩阵是必需的。这个 $(N_d \times N_s)$ 距离矩阵可以用两种不同的方法从 S_i 计算出来。首先，通过计算

$$D_{ij} = \sum_l^{N_s} w_l \sum_k^{N_d} |S_{i,kl} - S_{j,kl}| + w_{N_m+1} |p^{(i)} - p^{(j)}|, \quad (6)$$

其中每个度量值都用 ω_i 加权。参数值可以包含在权重为 ω_{N_m+1} 的距离度量中，以确保具有不同参数值的相似渐近状态之间的区别。另一种可能性是首先将一维直方图 $H_{i,k}$ 拟合到所有系统维的每个统计量 k 。

当不应区分渐近状态的对称配置时，这是有利的，这通常是相同单元的网络的情况。距离矩阵随后是一个合适的直方图距离 $H_{i,k}$ ，如

1-Wasserstein 度量

$$D_{ij} = \sum_k^{N_m} w_k \mathcal{D}_H(H_{i,k}, H_{j,k}) + w_{N_m+1} |p^{(i)} - p^{(j)}|. \quad (7)$$

当一个特定统计量 k 的所有 $H_{i,k}$ 共享相同的分格和范数时，可以从每个直方图的经验 CDF 非常有效地计算 1-Wassersteinmetric。权重的选择取决于所使用的统计量和预期的渐近状态。一般来说，一个好的第一个猜测是给较高的时刻，如方差和非正态性措施较低的重量比平均数。给定距离矩阵，使用 DBSCAN[13] 等聚类算法。DBSCAN 对通过公共路径可以到达的所有点进行分类 ε_{DB} 区域作为一个集群。估计适当的 ε_{DB} 参数是一项非常重要的任务，有不同的可能性。在 [13] 中，作者建议使用 k 近邻 (k NN) 距离，更具体地说是 4NN 距离，并使用所有数据点的有序 4NN 距离图中第一个可视拐点处 4NN 距离的值作为 ε_{DB} 。另一种类似的可能性是使用累积 k NN 距离的中位数，其中 k 是所有点的特定百分比，例如 0.5%。如第 2 节所述 ε_{DB} 也可以通过继续积分和跟踪 ε_{DB} 的响应来估计。在我们所研究的例子中，这产生了类似于基于经验 k NN 方法的类似值，但是计算成本更高。这就是为什么基于 k NN 的方法是首选的参数估计。从根本上说，没有“正确”的选择 ε_{DB} ，结合距离度量的选择，它决定了我们想要区分尾部

样本的精细程度。虽然统计数据 and 权重的选择决定了我们关注的方面， ε_{DB} 为我们提供了一个可以改变的整体分辨率。由于此时的聚类步骤非常快，因此很容易扫描各种值 ε_{DB} 。基于密度的聚类算法（如 DBSCAN）对异常值很敏感。与所有其他数据极不相似的输入被归类为异常值。就我们的目的而言，这通常会发生在多稳态爆炸时，许多不同但又不同的渐近状态发生。

2.4.5. 聚类评价

聚类算法，从而 C 返回集群分配

$$C = \mathcal{C}(\{S_i\}) \quad (8)$$

将每个试验映射到一个具有 N_C 的 $C_i \in [1, N_C]$ 是试用 i 的集群编号。群集分配使我们能够进一步分析所讨论的系统。首先，我们可以追踪每一类变参数非单调状态的盆地大小，从而量化系统内的分岔和多稳态。这是通过计算参数窗口 $[P_{\min}, P_{\max}]$ 并在整个参数范围内滑动此窗口。对于每个群集 i ，因此，我们对参数 p ， $\hat{b}_{C_i}(p)$ 的相对盆地体积进行了估计

$$\hat{b}_{C_i}(p) = \|CL_i^{(p)}\| / \sum_j^{N_C} \|CL_j^{(p)}\|, \quad (9)$$

$$CL_i^{(p)} = \{j | (C_j = i) \cap (p^{(j)} \in [P_{\min}, P_{\max}])\}. \quad (10)$$

为了进一步评估每一类渐近集的动态性，统计数据也被细分为属于每一类的集合。例如，我们可以通过这种方式跟踪样本的位置或大小在一个簇中，变化是 p 的函数。研究每个集群中典型轨迹的解决方案也可以提供见解。第 3 节给出了此类分析的示例。

总的来说，该方法的两个主要参数是距离计算的权重 ω 和在

dbcan 情况下的聚类参数 ε_{DB} 。作为默认值，我们取 $\omega_E=1, \omega_{val}=0.5, \omega_p=1$ 。在第 3 节中，我们将对每个系统更详细地解释为什么我们选择所示的权重。对于聚类参数，使用 k NN 距离或响应分析进行估计，如果需要，如果想要解析更多（更少）的聚类，则增加（减少）该值。对于大多数蒙特卡罗方法，试验次数 N 应选择足够大，以便结果独立于它。因此，一个合理的试验是进行两次试验：如果结果有质的不同，就必须增加 N 。MCBB 的计算复杂度在很大程度上取决于所讨论的系统。该方法最昂贵的部分是集成系统和距离矩阵的计算。集成度随着 $O(N \cdot N_d)$ 对稀疏耦合系统而言，而更紧密耦合系统的积分随着 N_d 的幂次增加而增大。距离矩阵尺度的计算，并且通常是仅集成非常快和非常大 N 的系统的瓶颈。

算法 1：蒙特卡罗盆地分岔分析 (MCBB)

1. 给定：系统 $\dot{x}=F(x,t;p)$ 带系统尺寸 N_d （可以是阳极系统，也可以是地图）
2. 给定：一组 N_s 统计量 $\{S\}$ 关于轨迹的组成部分 (e.g. 均值和方差)
3. 给定：分布 U_{IC} 初始条件和参数的 U_p
4. 当 $i \leftarrow 1$ 时，执行 N
5. 从 r_0 和 N 参数值 p 中选取 N 个初始条件 x_0
6. 求解长轨迹 $x(t;p)$
7. 当 $\text{dim} \leftarrow 1$ 时，执行 N_d
8. 当 $\text{meas} \leftarrow 1$ 时，执行 N_s
9. 统计的计算矩阵 $S_{i,\text{dim},\text{meas}} = S_{\text{meas}}(x_{\text{dim}}(t))$ 在轨迹的尾部测量
10. 停止
11. 停止
12. 停止
13. 获得： $N(N_d \times N_s)$ -矩阵 S_i

14. 计算 $N \times N$ -所有 S_i 之间的尺寸距离矩阵。
15. 基于密度的数据聚类（如 DBSCAN）
16. 分析群集成员和统计信息，对于依赖于参数值 p 的每个簇

3. 结果

mccb 方法是一种适用于多种动力系统的方法。离散和连续状态空间的系统都可以研究，离散和连续时间演化的系统也可以研究。典型的应用是振荡器网络，如下所示，但也有基于离散代理的模型，如 Dodds–Watts 模型。对于给定初始条件和参数的返回轨迹的系统，基本上可以用 MCBB 进行分析。在下面的多德-瓦茨模型中，将用 MCBB 研究 Kuramoto 振荡器网络和 Stuart-Landau 振荡器网络。所有这些结果的源代码都可以在附带的软件实现的 GitHub 存储库中找到。

3.1. Dodds–Watts 模型

社会和生物传染病的 Dodds-Watts 模型 [18, 19] 是传染病模型的推广，如 SIS 和 SIR 模型 [20, 例如]。给定的是一个和所有其他个体相连的 N_i 个体群体。每个个体都处于易感 (S)、感染 (I) 或恢复 (R) 状态，并且对他们在最后 T 时间步 $D_{t,i}$ 内接受的剂量有记忆。因此，展示了 MCBB 处理具有有限延迟或记忆的系统的的能力。在每一个步骤中，每个个体 i 都与从所有其他个体中随机选择的另一个体 j 接触。如果 j 感染了，我会得到剂量 d 和暴露概率 p 。剂量 d 的量来自分布 $f(d)$ 。在时间步长 t 处，剂量加在剂量记忆 $D_{t,i}$ 上，使 $D_{t,i} = \sum_{t'-T+1}^t d_{t',i}$ 。如果一个人的剂量超过剂量阈值 d_i^* ，它就会被感染。后一剂量阈值 d_i^* 来自分布 (gd^*) 。一旦 $D_{t,i}$ 降到阈值以下，个体在每个时间步都以概率

r 恢复。恢复的个体再次变得易感，概率为 s 。

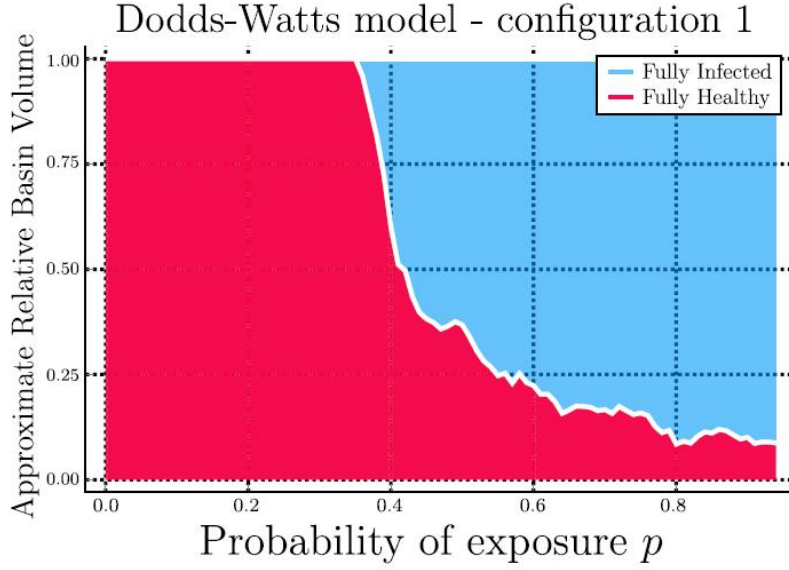


图 2. Dodds-Watts 模型构型 (A) 两种不同渐近状态 (完全感染 (蓝色) 和完全健康 (红色)) 的近似相对盆地体积。图中的彩色区域表示各个州的盆地体积。通过在聚类结果上使用滑动参数窗口进行计算 (见第 2.4 节), 窗口长度为 0.05, 偏移量为 0.01。

一个是典型的 SIS 模型, 例如配置

$$s = 1, g(d^*) = \delta(d^* - 1), f(d) = \delta(d - 1), T = 1$$

其中以 p 和 r 为自由参数。有关该模型的更多详细信息, 请参见 [19]。

对于这个具有离散态的 $N(I)$ 维模型, $s_{i,t} \in [S, I, R]$ 和离散时间 $t \in [1, 2, \dots, t_N]$

我们直接评估每个个体在时间演化过程中易感 $N(S)$ 和感染状态 $N(I)$

的计数, 作为算法的度量。如 [19] 所示, 有几种构型具有多稳态区域,

其中 $N(I)$ 不等于 0 或 $N(I)$ 的混合种群也可以是稳定的。

特别是我们正在研究两种配置: (A) 具有

$$N_I = 1000, T = 12, r = 1, g(d) = \delta(d - 3), s = 1$$

$$g(d) = 0.075\delta(d - 1) + 0.4\delta(d - 2) + 0.525\delta(d - 12), T = 20, r = 1$$

最初感染的个体数是从 0 和 N_I 之间的均匀分布中提取出来的,

我们将系统演化为 1000 个时间步, 从中我们将前 800 个时间步视为

瞬态。配置 (B) 与 SIS 模型大致相似, 但具有 20 步的剂量记忆和剂量阈值分布, 因此大约一半的人群对感染具有相当的抵抗力。对于两种配置, 计算了 $N=5000$ 条具有随机初始条件和参数值的轨迹。由于这两项措施同样重要, 我们选择 $\omega_I=\omega_S=1, \omega_p=0$, 因此在距离计算中不使用参数值。如第 2.4 节所述, 使用统计直方图构建距离 D 。

基于对 4NN 距离图的视觉检测, 给出了聚类参数 ε_{DB} , 配置 (A) 选择 0.15。图 2 显示了分析的结果。与文献 [19] 中的结果相似, 我们看到这种构型在附近发生分岔 $p \approx 0.4$ 。对于大于此值的值, 完全感染状态变得稳定。它的吸引盆迅速增长, 但完全健康的状态保持稳定, 以及一个非常小的吸引盆大 p 值。

构型 (B) 显示出一个稍微复杂的结构, 如图 3 所示, 与 [19] 中的结果一致。此外, 图 3 还提供了滑动直方图。这些有助于确定团簇的动力学。对于每个滑动参数窗口, 直方图被拟合到该窗口内的所有测量结果。然后将这些直方图直接绘制在每个直方图的旁边, 这样我们就可以直观地看到每个簇中测量值的变化, 从而改变参数值。在 Dodds-Watts 模型的情况下, 我们测量单个药剂被感染和易感的时间分数, 这些主要是 1 或 0, 因为大多数药剂在整个时间内要么被感染, 要么易感。图 3 (A) 显示了系统的行为。对于小值 p , 只有完全健康状态是稳定的 (另见图 3 (B))。第一个分叉发生在 $p \approx 0.3$ 当易感个体和感染个体共存的混合状态 (MS) 变得稳定时。它的吸引盆迅速增长, 而健康状态保持稳定, 但吸引盆非常小。图 3 显示, 随着 p 的增加, 感染者的数量增加。最终, 在 $p \approx 0.7$ 完全 (或几乎完全) 感

染状态变为稳定状态。如图 3 (D) 所示，在分岔点处，并非所有处于完全感染状态的个体都被感染，这是大 p 。将结果与文献[19]中报道的结果进行比较，我们发现完全感染的和它们确实是系统中两个独特的稳定分支，因此被 mcbb 正确地划分为两个独立的簇。

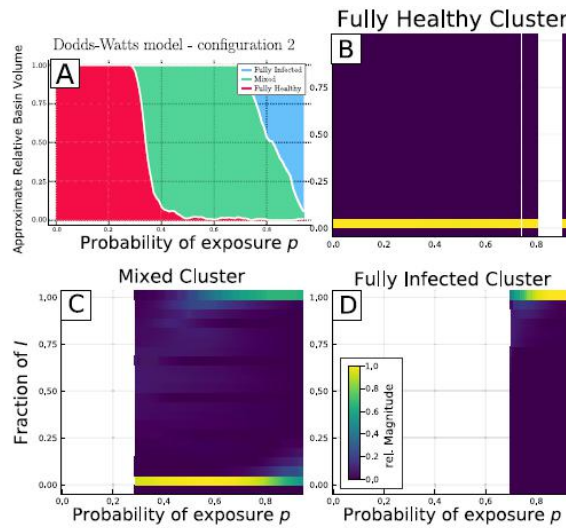


图 3. (A) Dodds-Watts 模型不同渐近构型状态 (B) 的近似相对盆地体积。它呈现完全感染 (蓝色)、完全健康 (红色) 和混合状态 (绿色)。通过在聚类结果上使用滑动参数窗口进行计算 (见第 2.4 节)，窗口长度为 0.05，偏移量为 0.01。

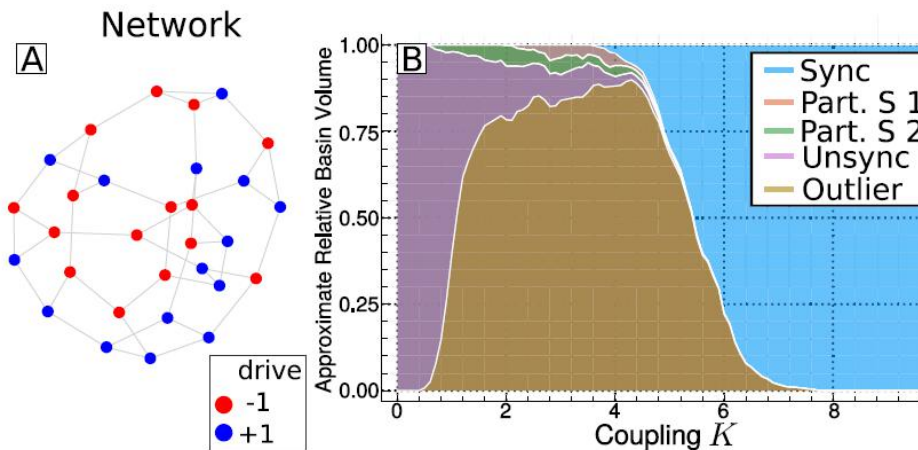


图 4. (A) 所调查的黑本系统的网络结构。红色节点具有负驱动力 (等式 (11) 中的减号)，蓝色节点具有正驱动力 (B) 同步、部分同步和同步系统的盆分叉图。

3.2. Kuramoto 网络

Kuramoto 模型是同步理论和网络科学的基本例子之一。带有惯性的

版本已经被用于各种环境中，最重要的是对电网中的节点进行建模 [21 - 26]。在向全局稳定同步过渡的过程中，具有惯性的 Kuramoto 模型表现出一种具有大量吸引子的多稳态的极端形式。研究过渡区同步的主导模式是 MCBB 发展的动力问题之一。系统由方程给出

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i &= \omega_i, \\ \dot{\omega}_i &= \pm 1 - 0.1 \omega - K \sum_j A_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j),\end{aligned}\quad (11)$$

等于+1 和 -1. $K=0$ 振荡器可以自由旋转 $\omega=\pm 10$. 同步开始在网络中发生。在 $K=10$ 系统通常与 $\omega=0$. 虽然大量的工作已经研究了这种同步状态作为本地网络拓扑的函数的稳定性 [24, 26 - 36], 但是对中间状态的了解相对较少。

由于主要的动力学是在频率，我们将只考虑在这里的分析频率维度。图 4 (a) 显示了振荡器耦合的网络。它是一个随机正则图，每个节点都有 $k=3$. 我们将在不对称状态上使用的统计量是所有节点频率的位置，距离是根据等式 (6) 计算的。所示结果适用于 $N=25000$ 条轨迹。

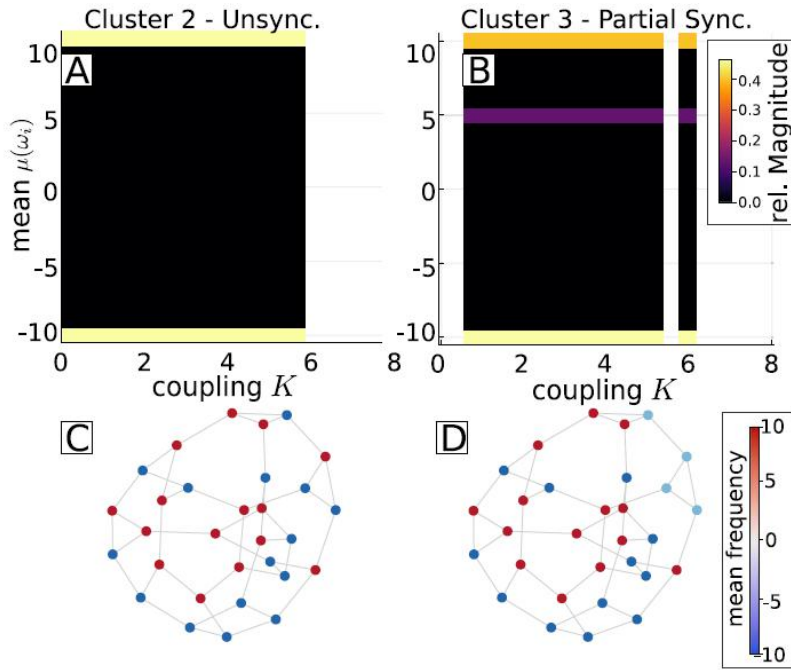


图 5. 显示无同步 (A) 和部分同步 (B) 的簇的分析(A) 和 (B) 是滑动直方图, 类似于图 3, 并根据耦合参数将所有节点上的频率平均值显示为直方图(C) 和 (D) 显示集群 2 (左) 和集群 3 (右) 中所有样本上每个单独振荡器的平均频率。

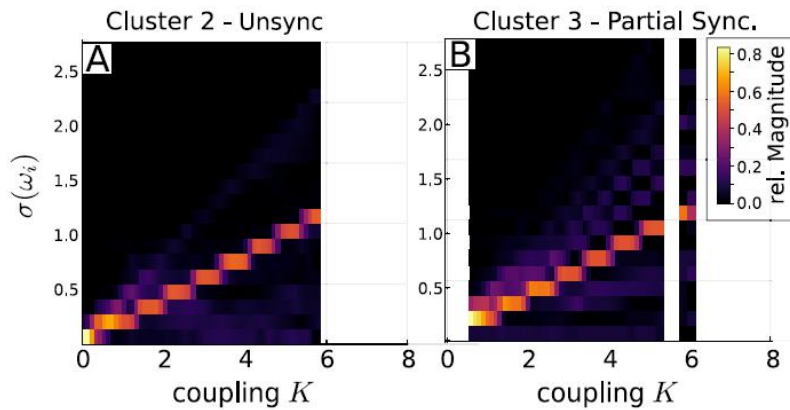


图 6. 滑动直方图图类似于图 5。这里, 所有频率时间序列的标准偏差显示取决于耦合参数。

图 4 (b) 给出了盆地分叉结构, 其距离由频率的每维平均值计算得出 $K=0$ 振荡器自由旋转, 频率位于 $\omega=\pm 10$ 这种状态持续下去, 直到它的盆地从 $K=10$ 始收缩开始。在中间区域, 大多数渐近状态出现。在这里, 这些被分类在一起的离群值集群中, 这意味着它们很少出现, 以至于无法获得足够的样本进行统计处理。这表明盆地结构不是由一种过渡状态控制的, 而是一种多重稳定性的爆发。然而, 盆地分叉图

也显示了两种状态，它们在过渡区实现了更高的盆地。这些集群中的每一个都出现在总运行量的 0.5% 以上，并且在某些 p 。

如果我们更深入地观察这些簇，我们会发现它们代表部分同步，其中网络的一个区域是同步的，而所有其他振荡器仍然以其固有频率旋转图 5。

为了理解这些中间团簇如何随着扭结而失去稳定性，我们可以考虑图 6 中所考虑的渐近态的大小。换句话说，频率本身开始围绕一个稳定的平均频率振荡。这表明对过渡制度的行为有一个有趣的见解。当 K 增加时，一些相邻的振荡器耦合并同步。随着部分同步 (PS) 态吸引子的增长，非同步节点上的振荡器花费越来越多的时间远离其固有频率。最终，他们将不得不花费相当长的时间来接近他们耦合到并被夹带的同步组件的频率。

验证这些是驱动转换的机制，以及了解哪些网络属性支持早期部分同步状态，超出了 MCBB 和本文的范围。然而这种方法所揭示的分岔过渡的盆地图提供了盆地结构和吸引子自身结构在过渡过程中如何变化的直接而重要的见解。特别地，它揭示了吸引子不移动，而是增长，直到它们失去稳定性。

3.3. Stuart–Landau 振荡器网络

另一种典型的振荡器是 Stuart–Landau 振荡器，它可以写成

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - |z|^2)z, \quad (12)$$

其中 $Z \in \mathbb{C}$, λ 是分岔参数 ω 是它的固有频率。最初由 Lev Landau 发现，后来由 Stuart 和 Watson[37 - 39] 推导，用于描述流体动力学中向扰动

的过渡，它也是 Andronov-Hopf 分叉的一种正常形式，因此在许多领域具有广泛的应用和重要意义[40]。耦合 Stuart-Landau 振荡器可以导致一些有趣的现象。最重要的是以振幅死亡和振荡器死亡 (OD) 的形式出现的振荡器猝灭[41, 42, 例如]。另一个有趣的现象是嵌合状态[43, 44, 例如]。这些是耦合的相同振子系统的状态，表现出一种均匀的模式，其中锁相状态与漂移状态共存。为了将 MCBB 应用于 Stuart-Landau 系统，我们使用了[45]的构型，因为它突出地具有行波 (TW)、振荡死亡 (OD) 和作者所说的稳定振幅嵌合体动力学的多稳态区域。在这个设置 NN 斯图尔特-朗道振荡器具有相同的本征频率 ω 通过吸引耦合到其 P_1 近邻，排斥耦合到其 P_2 近邻，方程如下：

$$\dot{z}_i = (1 + i\omega - |z_i|^2)z_i + \frac{K}{2P_1} \sum_{k=i-P_1}^{i+P_1} \Re(z_k - z_i) - i \frac{K}{2P_2} \sum_{k=i-P_2}^{i+P_2} \Im(z_k - z_i). \quad (13)$$

其中 $R(x)$ 是 x 的实部， $J(x)$ 是 x 的虚部。我们还可以通过两个瓦特-斯特罗加茨随机图[46]上的耦合来研究这种设置，一个是排斥耦合，一个是吸引耦合。重新布线的概率 $P_r=0$ ，我们得到与上面相同的方程，对于 $P_1 \neq 0$ 我们期待动态变化。

3.3.1. 参数配置

我们选择与[45]相同的参数配置： $\omega=2, N_N=100, P_1=1, P_2=22$. 在我们的实验中，我们改变 $K, r=P_2/N_N=100, P_r$. 我们使用随机初始条件，实部和虚部均匀分布在 -1 和 1（与[45]中用于某些计算的簇初始条件相反）， K 从 1.8 到 2.5 变化。根据尺寸测量，我们使用平均值和标准差。由于 Stuart-Landau 振子是复数的，所有的测度都分别应用于实部和虚部。根据我们对 Stuart-Landau 振荡器的先验知识，我们知道

它们的渐近状态会表现出不同类型的振荡行为，因此对标准差施加最大的权重是一个很好的选择。我们选择 $\omega_E=0.25, \omega_{SD}=1, \omega_p=1$ 。我们选择 $N=15000$ 个试验从 $t_0=0$ 到 $t_f=200$ 此时间跨度的前70%视为瞬态，不用于评估。第一个实验是用进行的 $P_r=0$ 和 $r_2=0.22$ 。并根据公式(7)使用直方图计算距离D。

3.3.2. 改变耦合

在运行实验并计算距离矩阵D之后，相关的4-dist图显示拐点在0.01左右。在报告的结果中，我们将该值稍微降低到0.009和0.008。图7(A)和(B)显示了近似相对盆地体积的这些结果。与[45]中的结果相似，我们看到了一个多稳态区域，其中TW动力学在 $K < 1.95$ 中普遍存在和OD动力学适用于 $K > 2.2$ 。在这两者之间存在着各种各样的态，其中一些振子表现出类似OD的行为，而另一些振子则表现出同步振荡，因此我们更倾向于将这些态称为PS态。重要的是，PS态是许多类似PS态的混合物，而不仅仅是一个渐近态。如果我们选择一个更大的 ϵ_{DB} 如图7(A)所示，具有全OD的态和仅具有少量PS振荡器的PS态以及其他大部分OD动力学被合并成一个簇(OD+PS)。对于较小的 ϵ_{DB} 它们被分成两个不同的簇(图7(A))。对于1.9，可以找到一种特殊的结构和更常见的PS态 $1.9 < K < 2.0$ 。如图8所示，这些状态是高度规则的驻波，被表现出OD的振荡器打断，因此我们将这些状态称为规则聚集驻波状态(RCSW)。除了这些更规则的动力学之外，类波动力学和振荡死亡之间还有各种不同的MS。许多人彼此如此不同，以致于他们落入离群群群中。在通过WatK从

TW 到 PS 的转换过程中，离群簇的成员最多 $K \approx 2.0$ 和在 K 处 OD 和 PS 之间的过渡处 $K \approx 2.2$ 。少数不到 60 个成员（占有所有试验的 0.4%）的较小集群被忽略。它们所包含的 PS 状态彼此之间的相似性要比异常群中的相似性大。我们通过进一步研究确定了这些动态分析每个集群内的统计信息。图 8 显示了其中两个集群的示例图和滑动直方图。RCSW 状态主要是振荡的，因此几乎所有的振荡器都有一个平均值为零和一个与零不同的常数标准差。我们看到这些直方图对于不同的耦合值变化很小。集群是非常同质的，几乎所有成员都像图 8 (C) 所示的例子。另一方面，PS 团簇更为均匀。其成员有一个共同点，即大多数振荡器表现出 OD，因此，如图 8 所示，它们表现出非零均值，具有正值和负值，同时具有与 OD 动力学的典型稳定不动点相对应的消失标准偏差。图 8 (D) 显示了一个例子，尽管集群内仍然显示同步振荡器的振荡器数量不同。其他集群的其他结果见附录。

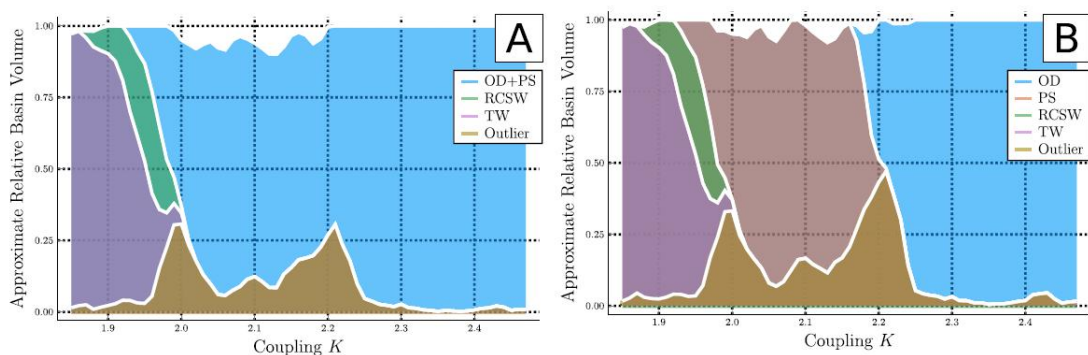


图 7. 斯图尔特-兰道振荡器网络的群集图 $p_r = 0$ 。表示聚类参数的两个不同值 ϵ_{DB} 。对于 (A) $\epsilon_{DB} = 0.009$ 和 (C) 和 (D) $\epsilon_{DB} = 0.008$ 。MCBB 解决了不同类型的渐近状态：行波 (TW)、规则簇定波 (RCSW)、完全振荡死亡 (OD) 和混合部分同步/振荡死亡 (PS) 状态。增加时 ϵ_{DB} 状态，其中大多数（但不是所有）振荡器表现出 OD，而剩余的几个振荡器是同步的 (PS)，并且所有振荡器表现出 OD (OD) 的状态合并到一个簇 (OD+PS)。使用的窗口大小为 0.025，偏移量为 0.01。

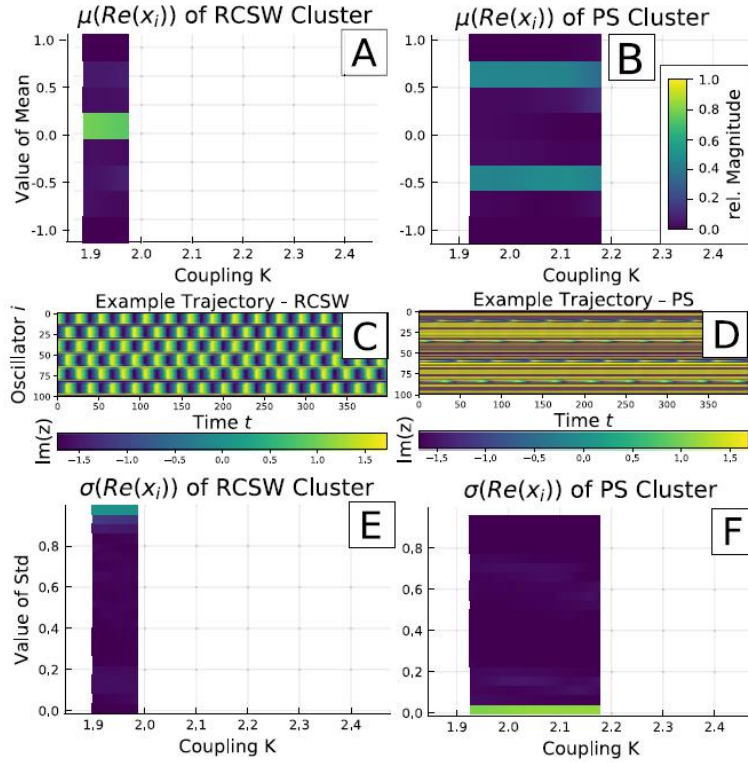


图 8. 两个聚类的内省分析也如图 7 所示。图 (A)、(B)、(E)、(F) 是滑动直方图。对于耦合值 K 的每个滑动窗口，所述簇内的轨迹的相应度量被绘制为 y 方向上的直方图(A) - (C) 检查 RCSW 组合仪表(A)，(B) 显示 RCSW 聚类的平均值和标准偏差(C) 和 (D) 是来自各个集群的示例轨迹(E)，(F) 显示 PS 聚类的平均值和标准差。

3.3.3. 改变耦合和耦合邻居的数量

类似于[45]中的附加设置，我们也可以用 MCBB 研究具有两个不同参数的系统。首先，我们选择改变 K ，耦合和 r_2 ，振荡器的相对邻居数量如图 7 所示表示聚类参数的两个不同值 ε_{DB} 。对于 (A) $\varepsilon_{DB}=0.009$ 和 (C) 和 (D) $\varepsilon_{DB}=\text{MCBB}$ 分解了不同类型的渐近状态：行波 (TW)、规则簇驻波 (RCSW)、完全振荡死亡 (OD) 和混合部分同步/振荡死亡 (PS) 状态。增加时 ε_{DB} 状态，其中大多数（但不是所有）振荡器表现出 OD，而剩余的几个振荡器是同步的 (PS)，并且所有振荡器表现出 OD (OD) 的状态合并到一个簇 (OD+PS)。使用的窗口大小为 0.025，偏移量为 0.01。图 8, 两个聚类的内省分析

也如图 7 所示。图 (A)、(B)、(E)、(F) 是滑动直方图图。对于耦合值 K 的每个滑动窗口, 所述簇内的轨迹的相应度量被绘制为 y 方向上的直方图(A) - (C) 检查 RCSW 组合仪表(A), (B) 显示 RCSW 聚类的平均值和标准偏差(C) 和 (D) 是来自各个集群的示例轨迹(E), (F) 显示 PS 聚类的平均值和标准差。排斥地耦合到一起。图 9 显示了类似的团簇, 其渐近行为与一维设置中的相似。我们看到 TW 动力学只存在于小 K 和大 r_2 值, 而 OD+PS 动力学甚至存在于小 K 值 (当 r_2 很小时)。对于非常小的 r_2 , 还有一个去同步 (DS) 集群。最值得注意的是, 独特的 RCSW 类型动力学仅适用于 $r_2 > 0.1$, 其盆地变大 r_2 值越大。

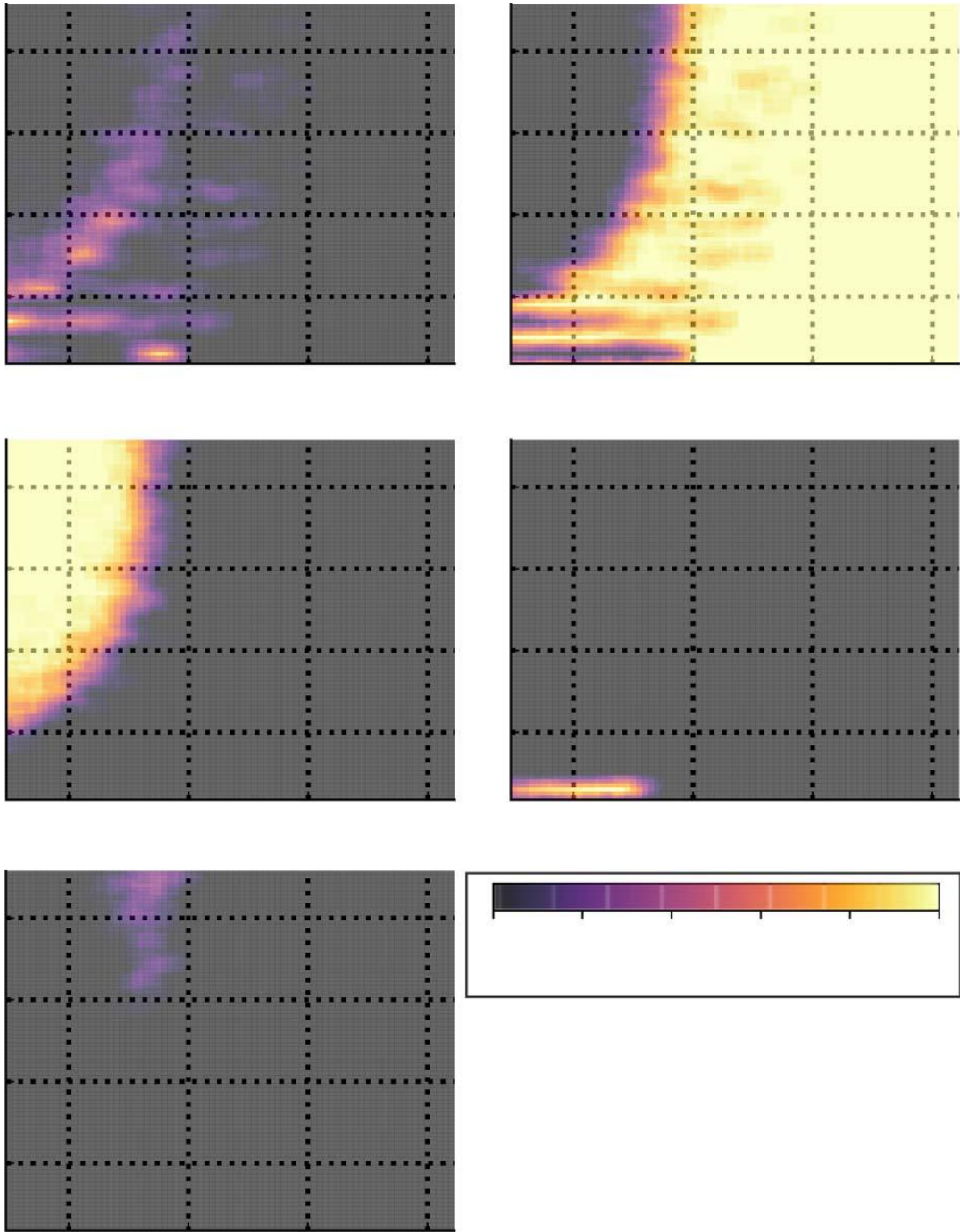


图 9. 两个参数的设置结果，改变耦合邻域 r_2 的数量和耦合强度 K 。

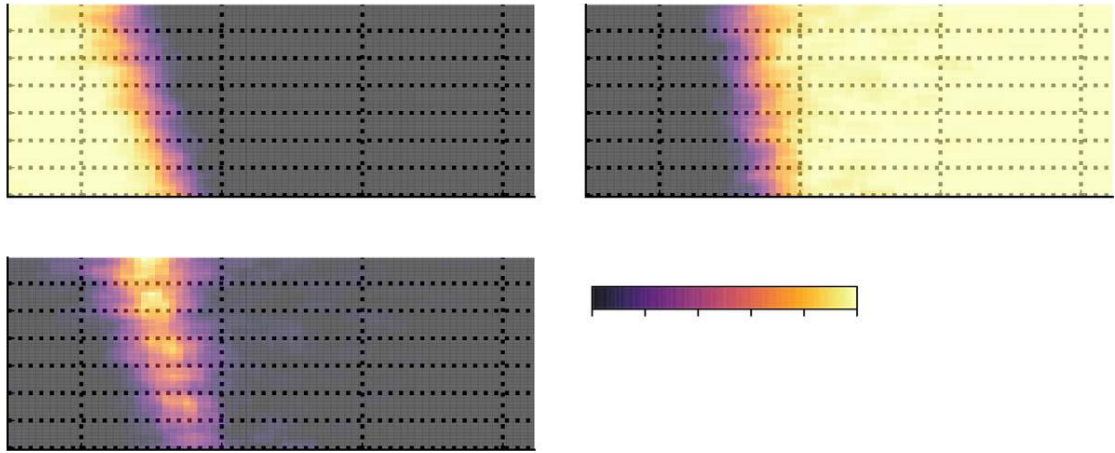


图 10. 两个参数的设置结果，瓦茨-斯特罗加茨随机图的不同布线 P_r ，介导排斥耦合和耦合强度 K 。

3.3.4. 重新连接网络

14 当我们开始通过根据 Watts–Strogatz 随机图的方案重新布线来随机耦合时，我们得到了图 10 所示的结果。在这里，我们将离群值簇和几个较小的簇一起添加到 MS 簇中，这些簇都表现出混合的 PS 部分 OD 动态。当复接 P_r 增大时，这类动力学出现的 K 值范围变宽。对于较大的 P_r 值，TW 动力学似乎较小。当我们重新连接网络时，RSCW 类型的动态不会出现。

4. 讨论

给定一个复杂的系统，如 ODE 系统，如第 3.2 节和第 3.3 节中展示的 Kuramoto 和 Stuart-Landau 网络，或第 3.1 节中展示的 Dodds-Watts 模型，MCBB 能够分析和量化正在发生的渐近状态类别。如范例系统所示，MCBB 是一种广泛适用的方法。它适用于分析每个返回轨迹的高维系统的行为，无论是基于代理的模型（如 Dodds-Watts 模型）还是

微分方程（如 Kuramoto 和 Stuart-Landau 网络）。这些系统的已知分支由 MCBBas 再现，例如 Dodds-Watts 模型。此外，它使我们能够揭示所有这些系统的性质相似的渐近态簇，如第 3.3 节所研究的结果所示。即使在过渡区，它也能成功地识别出最重要的渐近态的盆的大小，这是传统分岔分析所不能揭示的。对于 Kuramoto 系统，我们看到了非同步态的盆地如何以及何时收缩，以及完全同步态的盆地如何出现。我们还可以洞察这些状态之间的转换，因为我们可以看到在它们不稳定之前，状态的大小是如何增加的。因此，对于 Kuramoto 模型，它提供了可视化同步过程的直观方法。将 MCBB 应用于 Stuart-Landau 系统时，不同的渐近行为，TW 态，振荡猝灭现象，如 OD 和混合态，被分类在不同的簇中，有趣的动力学，如 RCSW 态被揭示并被量化。

分析总是可以通过改变聚类参数来进行微调，以解决更细或更粗的渐近状态。此外，距离计算的权重提供了另一种调整方法。该方法的灵活性还允许对用于评估轨迹和精确聚类算法的统计数据进行实验。特别是各种基于熵的统计似乎有希望使用。在设计该方法时，我们已经使用了时间序列的每维 Kullback-Leibler 散度对高斯测度 $KL G_i = D_{KL}(\rho^G(E_i, Var_i))$ 进行了计算作为统计数据，用于跟踪调查系统的结构变化。这对于相对低维的系统尤其有用。此外，还测试了完整轨迹的曲线熵[47]。此外，我们还将协方差矩阵直方图之间的距离作为统计量进行了实验。这扩展了基于方差的尺寸度量，也考虑了维度之间的互相关，这对于在渐近状态下表现出多种可能的互相关结构的系统是有用的，否则表现相似，例如不同类型的集体振荡。然而，对

于这里给出的示例系统，仅使用吸引子的位置和大小作为度量就足够了。不需要额外的措施来解决不同类别的渐近状态。但是，这不应停止对附加措施的试验，因为其中一些措施已经在附带的软件中实现，而且附加措施很容易添加。

除了本文给出的近似盆地体积和滑动直方图外，还可以进一步研究聚类算法发现的聚类，例如，通过分析哪种初始条件导致某种渐近状态，或者通过分析每个维度是如何分别随控制参数而不是直方图形式变化的。这些选项已经在 Julia 包中实现了（见附录 A），将来还可以设想更多选项。

该方法还可以推广到具有未知背景参数的系统，这些系统遵循一定的分布和附加的控制参数或作用力，例如一些气候模型，这些将在今后的工作中进一步讨论。

虽然这项工作的重点是介绍方法和测试它的范式模型，我们相信，这打开了大门，研究各种各样的系统在新的方式。我们期望该方法在多稳态和高维行为的混合非常重要的不同环境中会取得丰硕的成果。其中最引人注目的是生物网络和气候系统。这里介绍的三个例子已经展示了 MCBB 在许多跨学科领域的广泛可能性，无论是疾病和观点传播（Dodds–Watts 模型）、电网动力学（Kuramoto 网络）还是化学和生物系统（Stuart–Landau 网络）。

这种方法的一个明显的局限性是它只能检测和跟踪所研究系统的稳定解。MCBB 无法访问不稳定的解决方案。研究的另一个重要途径是更详细地研究这里描述的算法的数学性质。特别是，了解算法的

收敛特性是非常必要的。我们还怀疑，有相当大的空间，以改善聚类利用信息的延续，而不是恢复到一个标准的密度为基础的算法。我们将进一步改进该方法的另一个研究途径是使用我们记录的尾部样本的统计信息，以便跟踪积分何时达到适当意义上的渐近状态。MCBB 提供了一个很好的方法来可视化系统的复杂行为，传统的分岔分析通常是不有用或难以实现的。它解决了最重要的渐近状态类，并让用户能够跟踪其盆地的大小沿不断变化的参数。

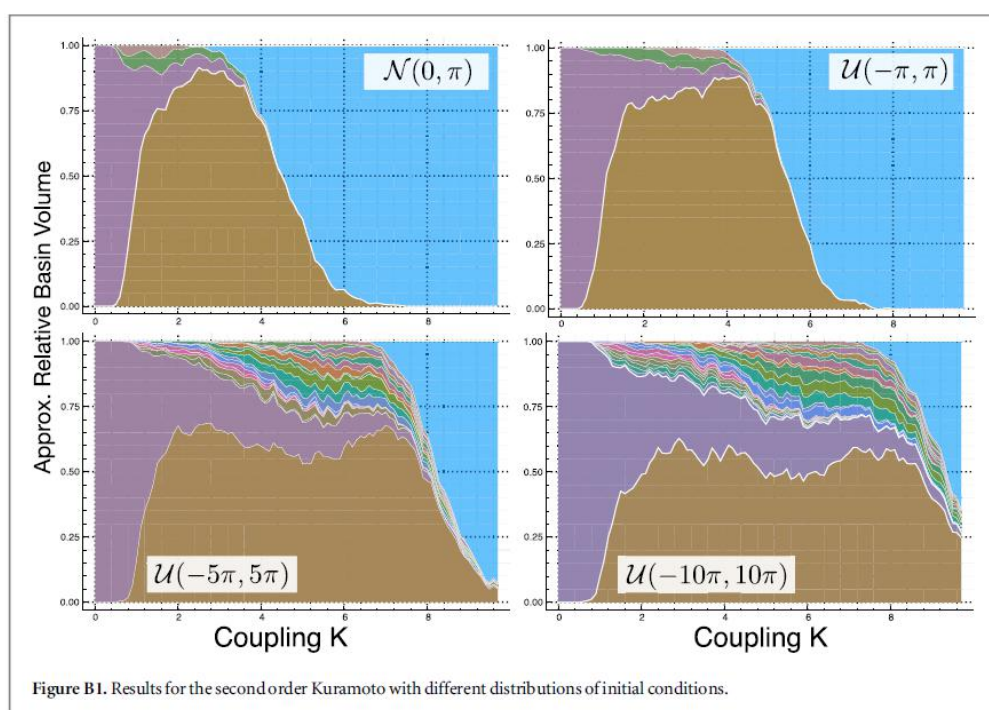


图 B1. 具有不同初始条件分布的二阶 Kuramoto 的结果

致谢

作者感谢 Jobst Heitzig、Marc Wiedermann 和 Valerio Lucarini 对本文方法进行了卓有成效的讨论。本论文在 IRTG 1740/TRP 2015/50122-0 范围内开发，由 DFG/FAPESP 资助，BmBF FK 的 Condynet2 项目。

03EK3055A 和 DFG 项目 CoCo HypeKU837/39-1/RA 516/13-1。作者感谢德国联邦教育和研究部以及勃兰登堡土地管理局通过提供波茨坦气候影响研究所高性能计算机系统的资源来支持这一项目。

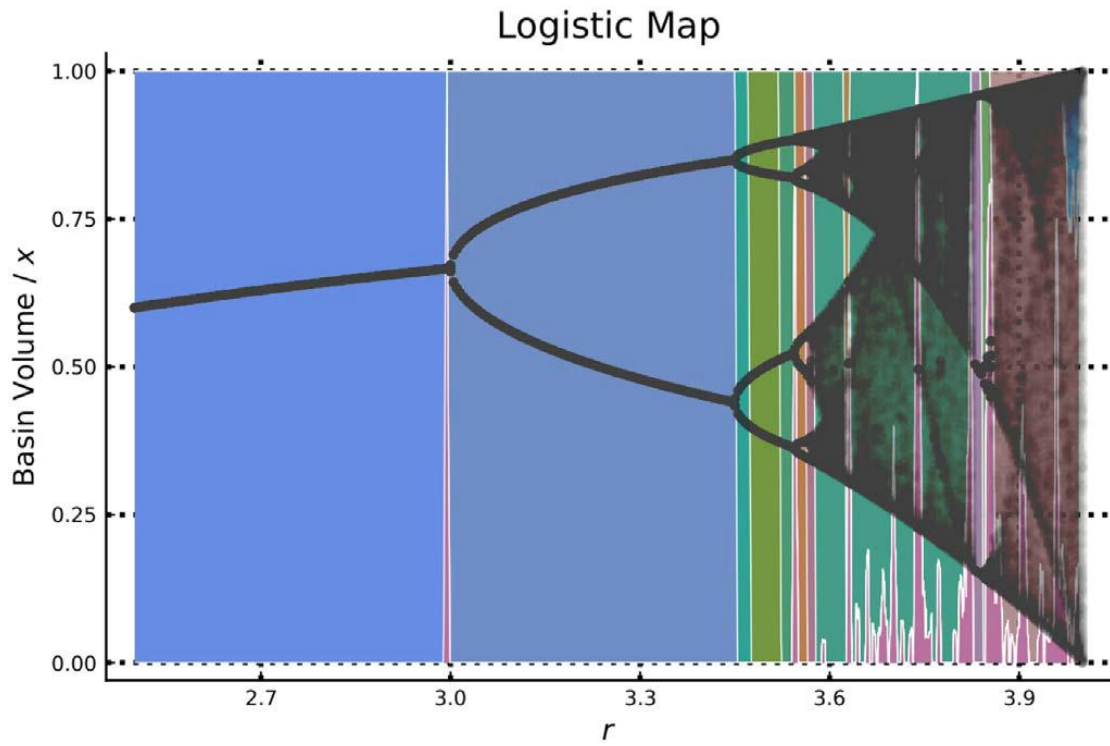


图 C1. 流域体积与 logistic 图的分岔图。

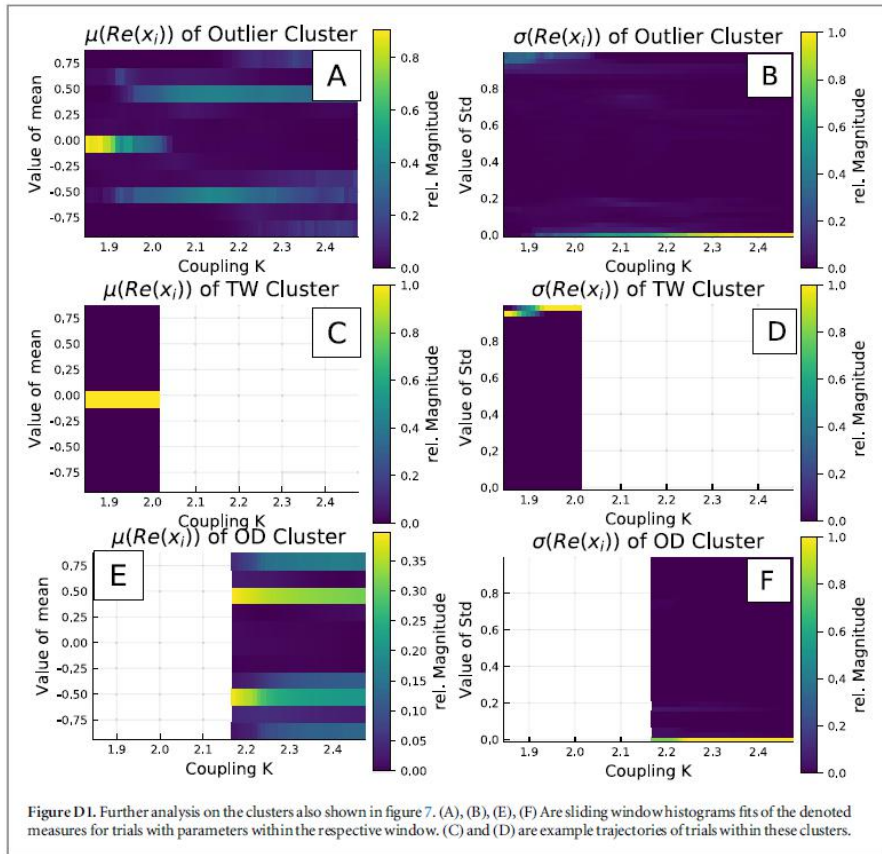


图 D1. 图 7 (A), (B), (E), (F) 中还显示了对聚类的进一步分析, 这些聚类是滑动窗口直方图, 适用于各个窗口内参数的试验(C) 和 (D) 是这些簇内试验的示例轨迹。

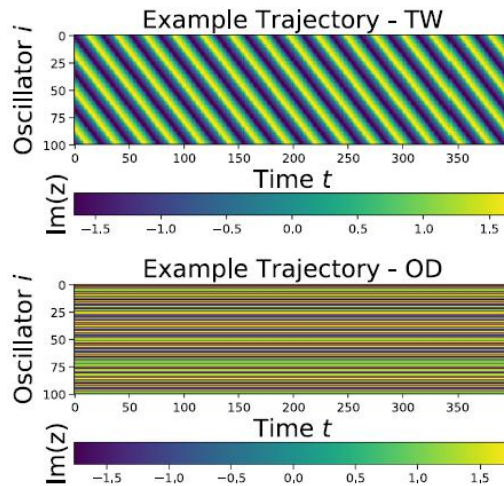


图 D2. 图 7 (A), (B), (E), (F) 中还显示了对聚类的进一步分析, 这些聚类是滑动窗口直方图, 适用于各个窗口内参数的试验(C) 和 (D) 是这些簇内试验的示例轨迹。

参考文献

[1] Babloyantz A and Destexhe A 1986 Proc. Natl Acad. Sci. 83 3513

- [2] Lytton WW 2008 Nat. Rev. Neurosci. 6 626–37
- [3] Smole P, Baxter D and Byrne J 2000 Neuron 26 567
- [4] Schwartz J-L, Grimault N, Hupé J-M, Moore BCJ and Pressnitzer D 2012 Phil. Trans. R. Soc. B 367 896
- [5] Machowski J, Bialek J and Bumbay J 2008 Power System Dynamics: Stability and Control 2nd edn (New York: Wiley)
- [6] Hirota M, Holmgren M, Van Nes E and Scheffer M 2011 Science 334 232
- [7] Ciemer C, Boers N, Hirota M, Kurths J, Müller-Hansen F, Oliveira R S and Winkelmann R 2019 Nat. Geosci. 12 174
- [8] May RM 1977 Nature 269 471
- [9] Lucarini V and Bódi T 2019 Phys. Rev. Lett. 122 158701
- [10] Doedel E J 2007 Auto-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations <http://indy.cs.concordia.ca/auto/> Concordia University Montreal, Canada
- [11] Ruelle D 1997 Commun. Math. Phys. 187 227
- [12] Ruelle D 2009 Nonlinearity 22 855
- [13] Ester M, Xu X, Peter Kriegel and Sander J 1996 Proc. Acm Sigkdd International Conf. On Knowledge Discovery And Data Mining p 226
- [14] Lindner M and Hellmann F 2019 Phys. Rev. E 100 022124
- [15] Rackauckas C and Nie Q 2007 J. Open Res. Softw. 5 15
- [16] Verner JH 2010 Numer. Algorithms 53 383
- [17] Tsitouras C 2011 Comput. Math. Appl. 62 770
- [18] Dodds P S and Watts DJ 2004 Phys. Rev. Lett. 92 1
- [19] Dodds P S and Watts DJ 2005 J. Theor. Biol. 232 587
- Figure D2. Further analysis on the clusters also shown in figure 7. (A), (B), (E), (F) Are sliding window histograms fits of the denoted measures for trials with parameters within the respective window. (C) and (D) are example trajectories of trials within these clusters.
- 16
- [20] Murray JD 2002 Mathematical Biology: I. An Introduction 3rd edn (Berlin: Springer)
- [21] Bergen A R and Hill DJ 1981 IEEE Trans. Power Appar. Syst. PAS-100 25–35
- [22] Filatrella G, Nielsen A and Pedersen NF 2008 Eur. Phys. J. B 61 485
- [23] Motter A E, Myers SA, Anghel M and Nishikawa T 2013 Nat. Phys. 9 191
- [24] Menck P J, Heitzig J, Kurths J and Schellnhuber H J 2014 Nat. Commun. 5 3969
- [25] Rohden M, Sorge A, Witthaut D and Timme M 2014 Chaos 24 013123
- [26] Hellmann F, Schultz P, Grabow C, Heitzig J and Kurths J 2016 Sci. Rep. 6 29654
- [27] Rodrigues FA, Peron T K D, Ji P and Kurths J 2016 Phys. Rep. 610 1
- [28] Auer S, Kleis K, Schultz P, Kurths J and Hellmann F 2016 Eur. Phys. J. Spec. Top. 225 609
- [29] Manik D, Rohden M, Ronellenfitch H, Zhang X, Hallerberg S, Witthaut D and Timme M 2017 Phys. Rev. E 95 012319
- [30] Schultz P, Heitzig J and Kurths J 2014 New J. Phys. 16 125001

- [31] Manik D, Witthaut D, Schäfer B, Matthiae M, Sorge A, Rohden M, Katifori E and TimmeM2014 Eur. Phys. J. Spec. Top. 223 2527
- [32] DeyAK, Gel Y R and PoorHV2017 2017 IEEE Global Conf. on Signal and Information Processing (GlobalSIP) (Piscataway, NJ: IEEE) pp 1015–9
- [33] Kim H, Lee SHand Holme P 2016 Phys. Rev. E 93 062318
- [34] Schmietendorf K, Peinke J and KampsO2017 Eur. Phys. J. B 90 222
- [35] Schäfer B, Matthiae M, Zhang X, Rohden M, TimmeMand WitthautD2017 Phys. Rev. E 95 060203
- [36] Witthaut D, Rohden M, Zhang X, Hallerberg S and TimmeM2016 Phys. Rev. Lett. 116 138701
- [37] Landau LD1944 Dokl. Akad. Nauk SSSR 44 339–42
- [38] Stuart J T 1960 J. Fluid Mech. 9 353–70
- [39] Watson J 1960 J. Fluid Mech. 9 371–89
- [40] Andronov IGA A, Leontovich E A and Maier A1971 Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane (Jerusalem: Israel Program Sci. Transl.)
- [41] Koseska A, Volkov E and Kurths J 2013 Phys. Rep. 531 173
- [42] Saxena G, Prasad Aand Ramaswamy R 2012 Phys. Rep. 521 205
- [43] AbramsDMand Strogatz SH2004 Phys. Rev. Lett. 93 174102
- [44] Rakshit S, Bera BK, PercMand GhoshD2017 Sci. Rep. 7 2412
- [45] Sathiyadevi K, Chandrasekar VKand SenthilkumarDV2018 Phys. Rev. E 98 032301
- [46] WattsDJ and Strogatz SH1998 Nature 393 440
- [47] Balestrino A, CaitiA and Crisostomi E 2007 7th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems; IFAC Proc. vols 40, 72