国际分叉与混沌杂志，第2卷。31、第8期（2021）2150121（20页）
×C世界科学出版公司
DOI:10.1142/S0218127421501212

嵌套混合模式振荡的分岔结构

Sekikawa Munehisa
日本，宇都宫大学工学院基础工程系321-
8585，宇都宫
sekikawa@cc.utsunomiya-u.ac.jp

稻叶直彦
日本，藤泽251-8511，雄南工业大学电气和信息工程研究
生院，naohiko@yomogi.jp

2020年8月31日收到；修订2020年12月2日

在最近发表的工作[Inaba&Kousaka，2020a；Inaba&Tsubone，2020b]中，我们发现了嵌套的混合型振荡(MMO)分叉结构。已知简单混合型振荡增量分岔(MMOIBs)，在 A_0-和 B_0-振荡的区域之间连续产生[A_0 , B_0]振荡，其中 A_0 和 B_0 是相邻的简单MMO，例如 $A_0 = 1^s$ 和 $B_0 = 1^{s+1}$，其中 s 是整数。MMOIBs是具有明显强有序性的普遍现象，并在化学中得到了广泛的研究，物理学和工程学。嵌套MMOIBs是一种更复杂的现象，但具有更强的阶数，它产生的混沌MMO窗口包括连续 n 的序列[A_1 , B_1]，其中 A_1 和 B_1 是相邻的MMOIB产生的MMO，即对于整数 m 为 A_1=[A0,B0]和B1=[A0,B0(m+1)]。本文研究了由经典强迫Bonhoe-Er-Van der Pol振荡器所显示的嵌套MMOIB产生的MMOs的分叉结构。我们用数值方法制备了双参数和单参数分岔图。对于 s =2的连续 n =1,2,3的系统。我们的分析表明，嵌套MMOs可以被广泛观察到，并且是明显有序的现象。然后，我们对嵌套MMO的返回映射进行分析，这些映射说明了连续嵌套的MMOIBs的外观。

关键词：混合型振荡；混合型振荡-增量分岔；嵌套混合模振荡。

1. 介绍

混合模式振荡是在化学实验中发现的，近年来得到了广泛的研究[Hudson等人，1979；Orban和Epstein,1982；Maselko和Swinney,1986；Albahadily等人，1989；Brøns等人，2008]。这些振荡系统周期性地经历 L 个大的漂移，然后是 s 个小的峰；“L^s”是用来区分振荡的。但是很多人对于混合模式MMO的认识尚不明确，但它们普遍出现在扩展的慢-快和多尺度动力学中，在这些动力学中可以看到鸭式弹道[Brøns et al.，2008；Petrov et al.，1992；Yoshinaga et al.，1988；Kuehn，2015]。鸭式鸭是在20世纪80年代初提出的，是非线性动力学中的一个重要分支[Benoit et al.，1981；Diener，1984；Zvonkin&Shubin，1984；Baer&Erneux，1986]得人的理论，近年来受到诸多学者的广泛的研究

阿诺尔德，1994年；Guckenheimer等人，2000].从理论上讲，MMOs是鸭角的一个子集。数值研究和电路实验证实了鸭角出现在Bonhoe-er-van der Pol(BVP)振荡器中[Itoh&Tomiyasu,1990]。BVP示波器的动力学与Fitzhugh-Nagumo系统的动力学是等价的结构体系 [FitzHugh等，1962]。然而，Brøns等人认为，在100多年前，MMOs在实验上是不被涵盖的，这表明这种现象可能更普遍地出现在慢-快系统中[Brøns等人，2008]。MMOs已经在各种可以经历鸭式爆炸的扩展动力学中被观察到，例如在松弛振荡附近的噪声诱导振荡动力学中[Ryashko，2018；苏杜&库恩，2018年；Muratov&Vanden-Eijnden，2008]，超临界[Kuta Figurna，2015]和亚临界Hopf分叉点附近的强迫鸭翼[Shimizu et al.，2011；Shimizu等人，2012年；Shimizu等人，2015年；Shimizu&Inaba，2016a；Kousaka等人，2017年；Inaba&Kousaka，2020a；Inaba&Tsub-One，2020b]，和扩展的三变量鸭翼生成动力学[Kawczynski&Strizhak，2000年；Petrov等人，1992年；Rachwalska&Kawczynski，2001年；Sekikawa等人，2010年；Shimizu&Inaba，2016b；Yoshinaga et al.，1988].在过去的四十年里，MMOs一直是紧张研究的主题[Scott，1993；Brøns等人，2006年；Krupa等人，2008年；Markman&Bar-Eli，1994年；Brøns等人，1997年；苏杜&库恩，2018年；Muratov&Vanden-Eijnden，2008年；德梅斯-查尔克等人，2014年；弗莱雷&加拉，2011a，2011b；Desroches等人，2013年；Guchenheimer&Scheper，2011年；Desroches等2012年；Sekikawa等人，2010年；Kousaka等人，2017年；高桥等人，2018]。

简单MMO背后的机制已经在理论上阐明[Kuehn，2015；Brøns et al.，2006；Krupa et al.，2008；Kuta offrina，2015；De Maesschalck et al.，2014；Guchenheimer&Scheper，2011；Desroches et al.，2012]。然而，对MMOs的数值研究揭示了极其复杂的MMO分叉，包括将MMOs添加到系统轨迹中的强有序现象。Kawczynski等人。[Kawczyn Ski等人，2000年；Kawczyn Ski&Strizhak,2000年]和Rach-Walska等人。[Rachwalska和Kawczyn'ski，2001]发现了一个三变量自治常微分方程组中的MMO加法现象，并阐明了这些现象连续多次发生，类似于圆映射中的加周期分岔。清水等人。在强迫BVP动力学中，发现了最简单的MMO-增加现象，用[12,13]表示，并将由此产生的分叉称为MMO-增量双阳离子(MMOIBs)[Shimizu et al.，2012]。

库萨卡等人[2017]使用包含二极管的约束BVP振荡器研究了MMOIBs的产生。这个受限的BVP OSCIL-Lator用一个非常大的参数 g 来描述，该参数 g 对应于二极管的导通。当 g 趋于有限时，控制方程由分段的一维(1D)非自治方程写成，而Poincar的返回映射正好是1D。使用一维返回图，Kousaka等人。[2017]证明了MMOIBs可以连续发生多次，且每个MMOIB之间上一个分叉参数区间与下一个分叉参数区间的极限比收敛于1。MMOIBs的研究非常重要，因为了解MMOIBs在建立化学反应和心肌心律失常的控制策略方面发挥了重要作用[Tsumoto et al.，2017]。因此，工程师和研究人员在医学、化学和工程等领域取得了许多研究成果。

在之前的一项研究[Inaba&Kousaka，2020a]中，作者检查了这些受约束的动力学，以阐明MMOs可以嵌套。即，在 1^2 和 1^3 个产生区之间（未嵌套的）MMOIBs产生连续 n 个 $[1^2,1^3]n+1$ 个振荡的序列。嵌套的MMOIBs生成3 n +2嵌套的MMO序列，在产生两个相邻的MMOIB产生的[12,131]2和[12,132]3 MMO的区域之间连续 n 个。此外，我们发现嵌套的 MMO 发生在经典的强迫 BVP Oscillator[Inaba&Tsubone,2020b]中。我们设想一些研究人员可能已经观察到嵌套的MMOIB产生的MMO,因为MMOIB有享有广泛的数值研究[Kawczynski et al.，2000；Kawczynski&Strizhak，2000；Rachwal-Ska&Kawczynski,2001；Scott，1993；Shimizu et al.，2012；Shimizu&Inaba，2016a]和实验研究[Albahadily et al.，1989；Maselko&Swin-Ney，1986；Shimizu et al.，2015；Shimizu&Inaba，2016b]。然而，这些作者可能没有识别观察到的现象，因为这种术语可能非常容易理解为

嵌套MMOIBs而不事先知道MMO Pat-Tern。我们推导出嵌套MMOIBs可以对连续整数和 m 产生嵌套MMO序 $[[1^2, 1^3]$这项工作是有限的；然而，在这一点上，我们只适用于 m =1的情况，我们没有准备双参数分岔图。

本文报道了 m =1,2,3的经典BVP振子的单参数和双参数分叉图和返回图。因为动力学是慢-快的当 $x>1$时，非线性导体特性($x+x$ 3)非常陡峭，返回图近似为1D。用打靶法制备了双参数双阳离子图Kawakami[1984]提出的算法。这些图表明，嵌套的MMOIB产生的MMOs通过鞍结点分叉出现，倍周期分叉使MMOs消失。由于双参数分岔图中不出现复杂的分岔，我们得出嵌套MMOs是稳定的。在我们研究单参数分岔图的精度水平上，我们得出结论，当 m =1,2,3时，嵌套MMOIB生成的MMO最容易出现。这一结论表明，在长达30多年的MMO研究历史中，一些研究人员可能一直在观察嵌套MMO的时间序列波形，而没有认识到它们的有序性质，因为它们看起来很复杂。

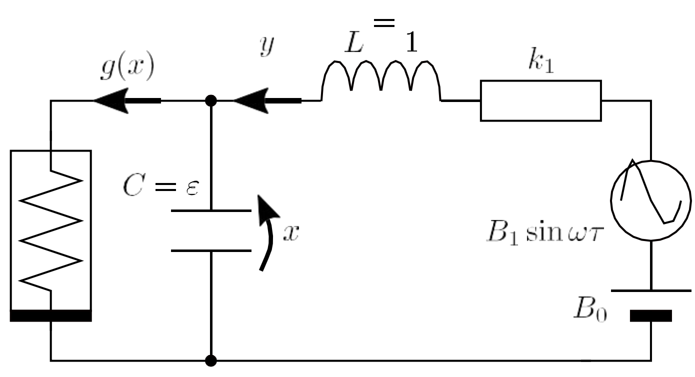
本文的其余部分组织如下。第2节详细描述了感兴趣的动力系统。第三节随后提出并讨论了分岔图、时间序列波形和返回图，以证明嵌套MMOS的通用性和有序性。在第4部分中得出了结论。

2. 电路设置

经典强迫BVP振荡器的电路图如图所示。1(a).在图中， x 和 y 是分别对应于电容C上产生的电压和通过电感L的电流的状态变量。由于符号L也被用作MMOs中的大电流的数目，我们通过重新标度系统以使电感L归一化为1来避免混淆。在本文中，C=ε是一个小参数，在本研究中被设置为0.1。因此，动力学是慢-快的，即 x 快速变化，并且 y 变化很慢。 k_1 是线性电阻器， B_0 是直流电压源。此外，g(x)是通过非线性负阻导体的电流，其特性由以下三阶多项式函数表示：

$$g(x) = -x + x^3. \qquad (1)$$

在下面的讨论中，使用规范化的变量和参数。最后，ω和 B_1 分别为forcing项的角频率和振幅，它们随



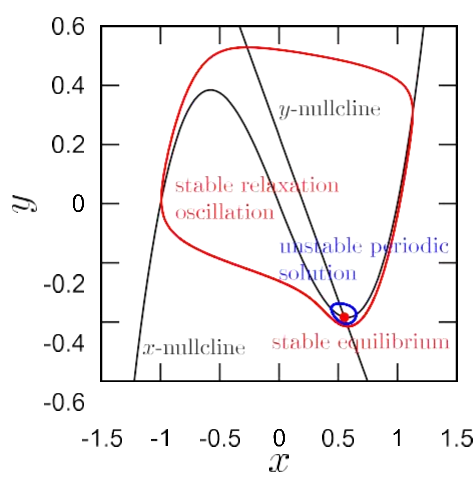


图1. (a) 亚临界Hopf分岔点附近受迫BVP振荡器的电路图；(b)无扰动时（ $x-y$ ）平面的几何结构。红色：稳定弛豫振荡；蓝色：不稳定周期解；红色子弹：稳定平衡。

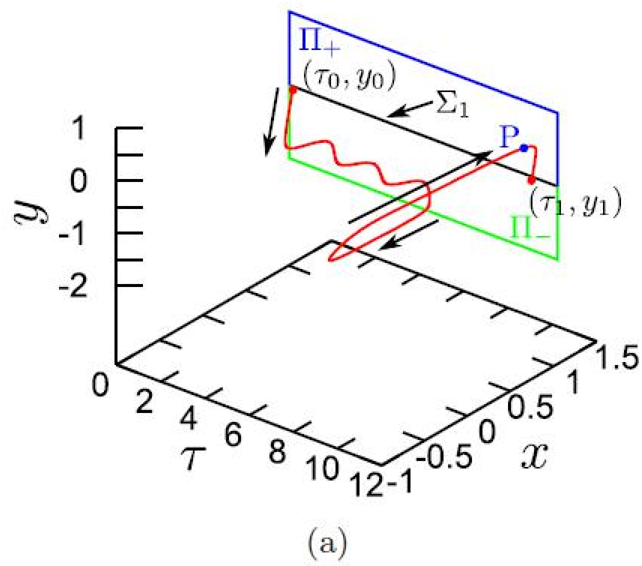
分叉参数。常数参数设置为k_1=0.9，B_0=0.207。在这些参数值下，在没有扰动的情况下，由于亚临界Hopf分岔，一个稳定的平衡点与一个稳定的弛豫振荡共存。图1(b)显示了在没有扰动的情况下的$x-y$平面，其中稳定的平衡点。给出弛豫振荡、不稳定周期振荡和零值线。注意，在双端元件中，产生的电压为，两端的电流和注入元件中的电流在动力学中起着至关重要的作用，双端元件从不充当具有输入和输出电压端子的模拟电路[Matsumoto et al.，1985]。由于这种结构，这种自然回路有时等价于Fitzhugh-Nagumo模型[FitzHugh,1961；Nagumo等人，1962]。该电路的控制方程由以下两个非定常系统表示：

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - g(x), \\ \dot{y} = -x - k_1 y + B_0 + B_1 \sin \omega \tau \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \cdot \right). \end{cases} \tag{2}$$

会出现简单的混合模式振荡。为了在单参数分岔图中精确观察MMOs的行为，下面是

$$\begin{aligned} \Pi_- &= \{(\tau, x, y) \,|\, x = 1, y - g(x) < 0 (\dot{x} < 0)\}, \\ \Pi_+ &= \{(\tau, x, y) \,|\, x = 1, y - g(x) > 0 (\dot{x} > 0)\}, \\ \Sigma_1 &= \{(\tau, x, y) \,|\, x = 1, y - g(x) = 0 (\dot{x} = 0)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

图2给出了受迫BVP振荡器在二维状态空间中的动力学特性。2.让我们考虑一个留下一个,离开π-的溶液进入x<1区域，并在一个正时间在图中标记为P的点处撞击π+。然后，解沿着x>1区域的x-零斜线传递，如图所示。2(b)并在图中标记为(τ1，y1)的点处再次撞击π-。2(a)，接近∑1。由于慢-快动力学，y1接近于0；当x>1时，g(x)的梯度很陡，因为ε很小。因此图12和13mmo发射区域之间的单参数分叉图的全局视图显示在图中。3(a).分叉参数B1设为0.0105。大k的θk=ωτk/2πmod1如图1所示，图3(a)是使用连续DEFOR创建的变形方法使用以下步骤。设T是平面π-上的Poincar返回映射。设M和N是su大整数



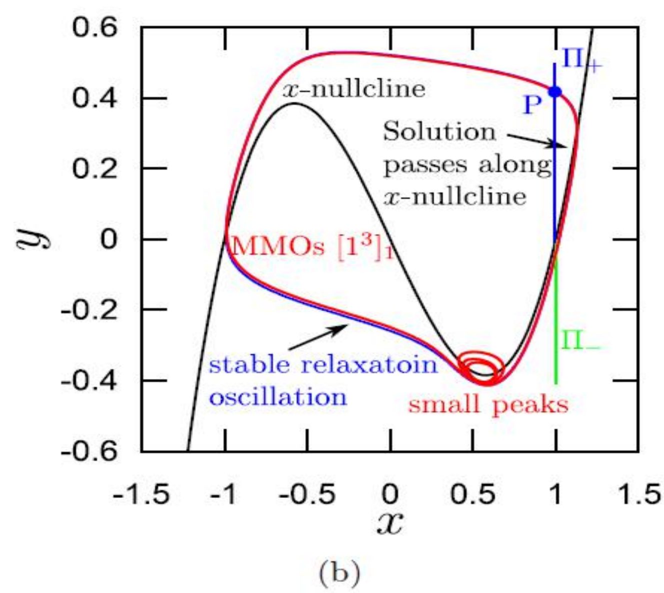
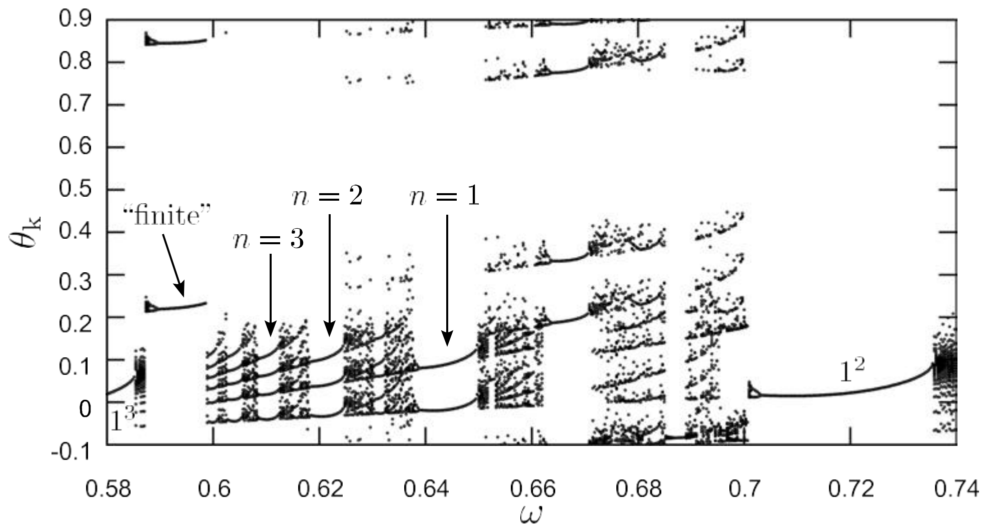
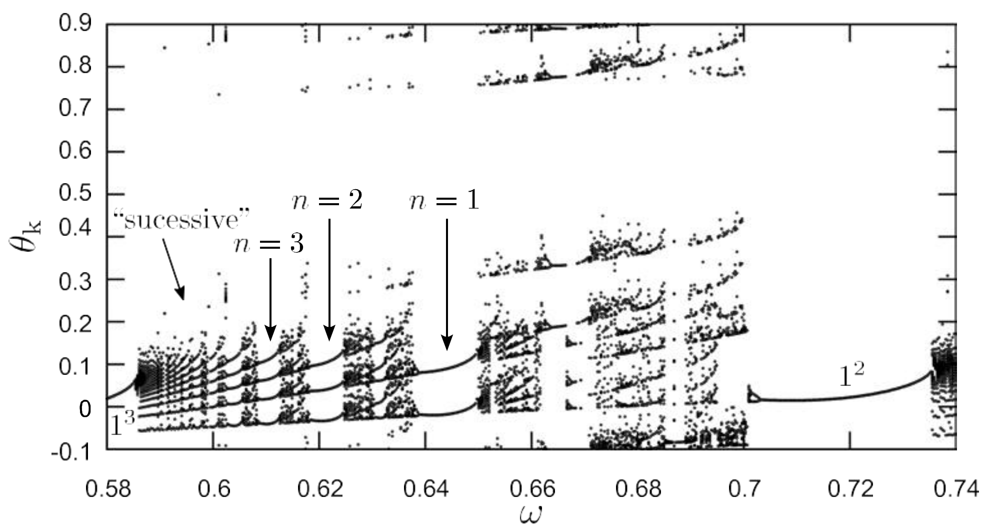


图2. (a)向量的几何结构；(b)x-零斜、弛豫振荡、π-、π+和[13]1解在(x-y)态空间上的投影。黑色：X-零斜；蓝色：稳定弛豫振荡；红色:[13]1 MMO轨迹；浅绿色: π-；蓝色:π+。



(a)



(a)

图3. B1=0.0105的单参数分岔图，其中MMOIB生成的[12,13×n]n+1个MMO，用连续变形法和(b)规定的初始条件(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0. 在(a)中只能观察到少量的MMOIBs，而在(b)中出现连续的MMOIBs。

当存在ω=ω时，T1(τ0,y0)-T M(τ0,y0)和Tm+1(τ0,y0)-Tm+n(τ0,y0)分别为暂态和定态。在下一个步骤中，ω=ωnext=ωpresent+Δω，其中Δω是su的最小值，用tm+n(τ0,y0)作为T的INI-tial条件。用这种方法，大多数系统将得到平滑的单参数分叉图，但在图13到12序列的转换中可以看到明显的不连续性。3(a)，在0.58<ω<0.6区域。这表明该分岔图中的一些MMOIBs被连续形变所混淆方法。图3(a)中MMOs之间的转换。似乎包括混沌行为的区域，并且从这些混沌区域到周界解的转变不能保证是MMOIBs。当不采用连续形变方法时，我们将ini-tial条件设为(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0）时，就会出现缺失的MMOIBs，如图所示。3(b).我们将讨论REA-在下一节中选择这些初始条件。出现在分叉图的12-和13-产生区域之间的一些MMOs和MMOIB产生的MMOs的一维时间序列波形如图4所示。

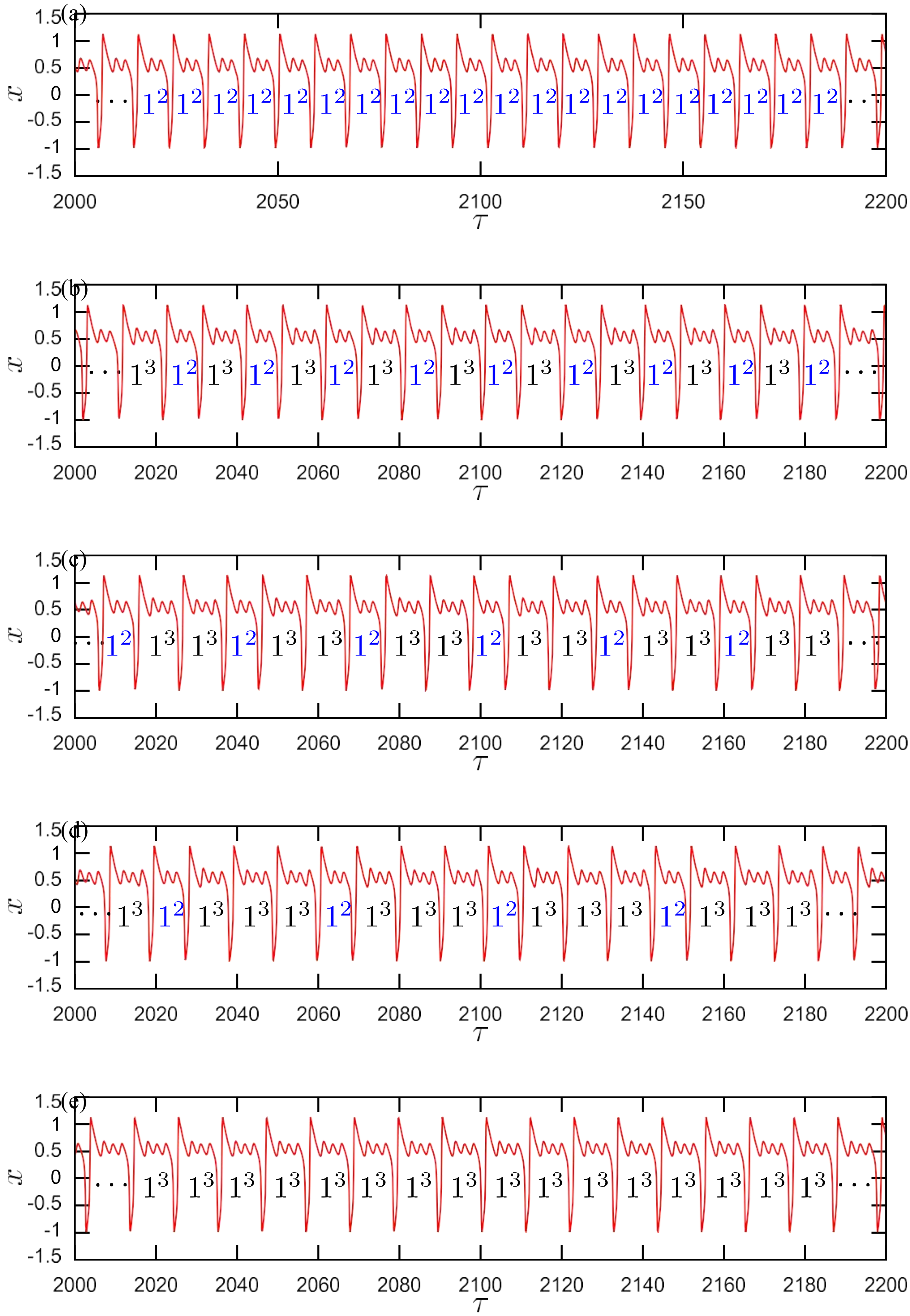


图4. 简单MMOs和MMOIB生成的MMOs在它们之间的分叉图中。(a)[12]1表示$\omega=0.72$,(b)[12,13×1]2表示$\omega=0.64$,(c)[12,13×2]3 表示 $\omega=0.62$,(d)[12,13×3]4 表示 $\omega=0.61$,(e)[13]1 表示 $\omega=0.58$ 。初始条件为$(\tau_0,x_0,y_0)=(0.1(2\pi/\omega),1,0)$。触发器序列1标记为蓝色。

3. 嵌套MMOs

当我们放大图3(b)在两个由MMOIB生成的$[12,131]_2$和$[1^2,1^3*2]_3$ MMO之间，我们观察了由MMOIB生成的连续嵌套MMO序列:$[[1^2,1^3*1]_2,[12,132]_3*n]_{3n+2}$,n=1,2,3。A放大分叉的这个区域图中的图表。3(b)在图中给出。5.我们将绿线描绘的周期结构称为嵌套MMOs[Inaba&Kousaka，2020a；Inaba&Tsubone，2020b]。在我们的数值结果中，嵌套的MMOIB产生的MMOs出现在所有产生MMOs的模拟中。无花果的下面板。5是(ω-B1)-平面上B1=0.0105附近的一个双参数分岔图。在这张双参数双阳图中，Ij表示鞍结点和倍周期分岔曲线。

上标表示每个MMO序列中强迫项的周期数。这些分岔曲线是用Kawakami[1984]提出的射击算法绘制的，在附录A中作了简要说明。鞍结点和倍周期分岔表示嵌套MMOIB生成的MMOS的出现和消失。从这张双参数分岔图可以看出，嵌套MMOs是存在的，并且随着参数B1的变化而保持稳定。我们判断嵌套的MMOs是稳定的，因为没有COM-在双参数分岔图中观察到丛分岔。嵌套MMOIB生成的2,131]2,[12,132]3n]3n+2的时间序列波形给出了n=1,2,3,4,5和6的振荡器，在无花果里。分别为6(a)至6(f)。注意，在m=n=1的情况下，观察到了嵌套MMO吸引子。

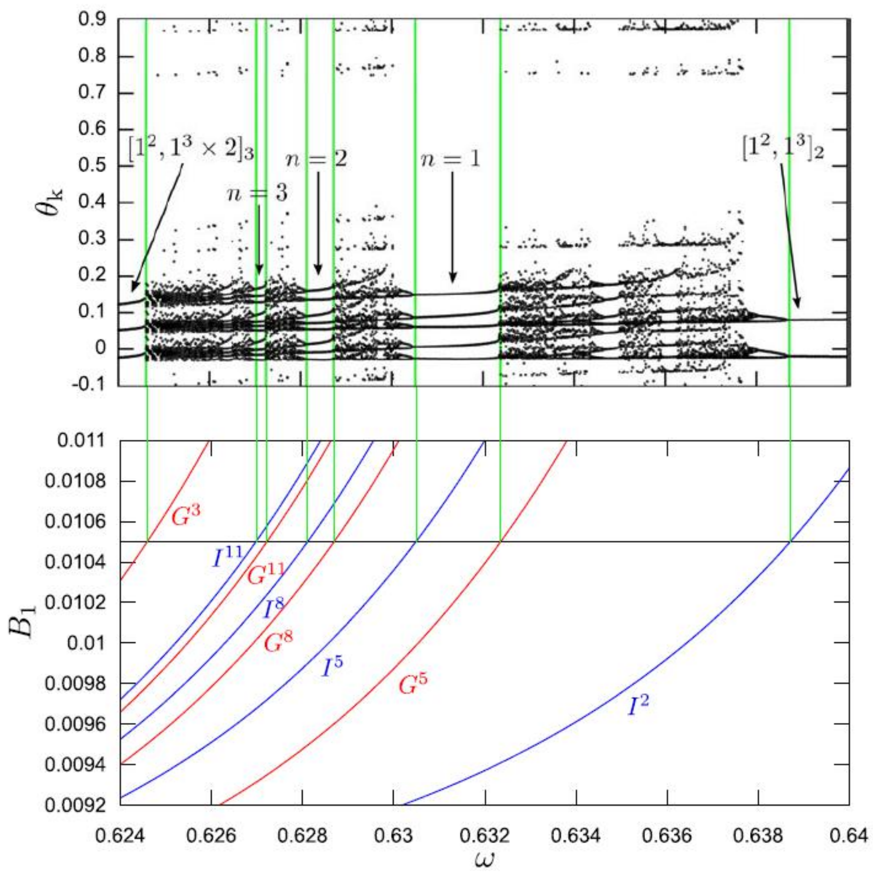


图5. MMOIB生成的[[12,13×1]2,[12,13×2]3×n]3n+2个MMO出现的单参数（上图）和双参数（下图）分岔图。TT3n+2和I3n+2分别表示3n+2周期点集的鞍结点分岔和倍周期分岔。

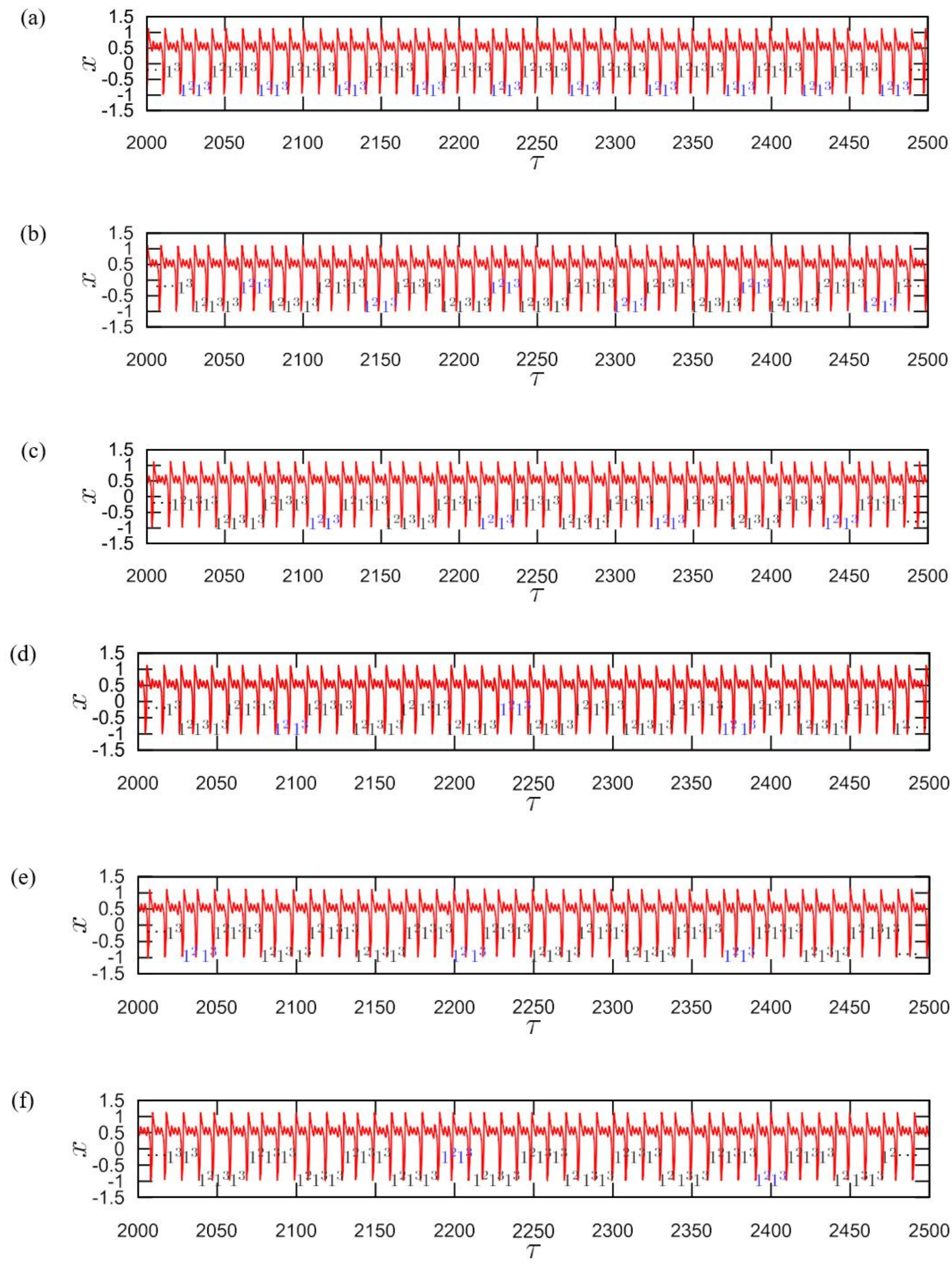


图6.嵌套式MMOIB产生的[[12,13×1]2,[12,13×2]3×n]3n+2个MMOs的时间序列波显示(a)n=1,ω=0.631,(b)n=2,ω=0.6284,(c)n=3,ω=0.6264,(d)n=4,(e)n=5,ω=0.62593,(f)n=6,ω=0.62565。使用固定的初始条件:(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0）。在这些代码中，序列(a)-(f)中蓝色标记为1213的序列触发MMOIB生成的MMOs[[12,13×1]2,[12,13×2]3×n]3n+2,对于n=1,2,3,4,5和6。

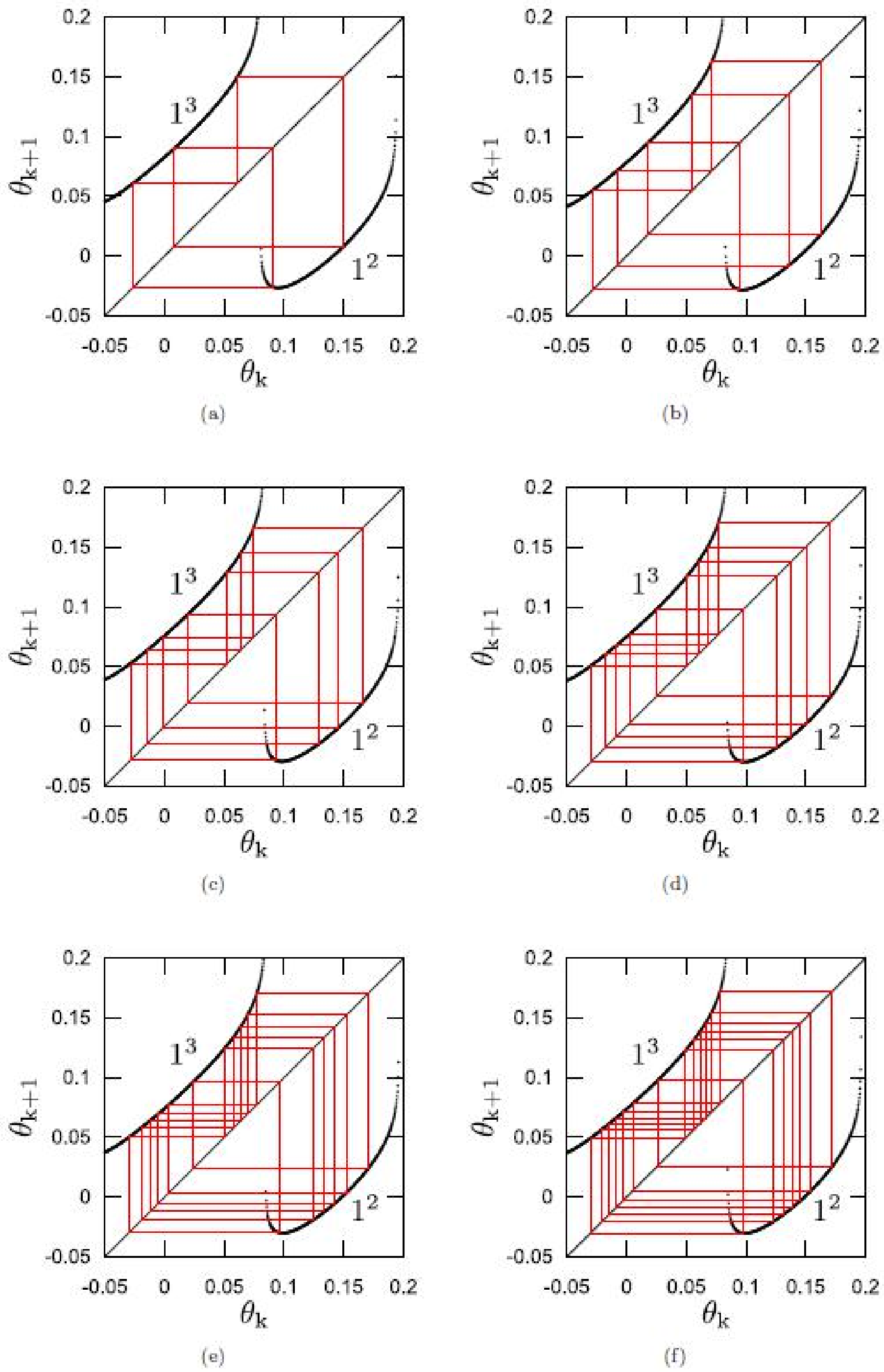


图 7. 嵌套 MMOIB 生成的 MMO 的返回图，显示为 $[[1^2,1^3]_2,[1^2,1^3\times 2]_3\times n]_{3n+2}$，(a)n=1,ω=0.631,(b)n=2,ω=0.6284,(c)n=3,ω=0.6264,(d)n=4,(e)n=5,ω=0.62593,(f)n=6,ω=0.62565。

实验测量[Inaba&Tsubone，2020b]。图中用1213表示的蓝色符号。6(a)-6(f)将嵌套[[12,131]2,[12,132]3n]3n+2振荡器的触发序列标记为n=1,2,3,4,5和6。顺序嵌套MMOs遵循一个令人惊讶的明确顺序。然而，即使我们事先不知道生成它们的模式，也很难捕捉MMOIBs之间嵌套的MMOs序列。很可能嵌套的MMO时间序列波形在过去30年的结果中一直隐藏在复杂性背后。如图所示。6、这些现象只能从时间序列波形来识别。请注意，这些是SIM-PLEST嵌套的MMO时间序列波形，它们看起来非常复杂，尽管在序列的进展之后是有序的。正如前一节所讨论的，在图(τ0,y0)和(τ1,y1)中，y1取接近于0的值，因为动力学是慢-快的，并且当x>1时g(x)非常陡。因此，所有MMO解都沿着x-零斜线传递。这一结果表明，[Inaba&Tsubone，2020b]返回图将对区分嵌套MMO有价值。让我们考虑一个留下(τ0,x0,y0)=(τ0,1,0）的布诺。该解决方案靠近MMO路径，并且返回到(τ1,1,y1)。注意y1 0如上所述。因此，从θ0=ωτ0/2π到θ1=ωτ1/2πmod1的跃迁可以用一维映射近似。我们称这些情节为figurrst返回地图。对应于[[12,13]2,[12,13]3n]3n+2的嵌套MMOIB生成的MMO轨迹和对应于n=1,2,3,4,5和6的返回映射如图4所示。分别为7(a)至7(f)。返回图轨迹的周期与每个MMO序列的强迫项的周期数一致，即tti的i或者IJ的j。figurrst返回映射阐明了嵌套MMO的排序规则。让我们回想一下，我们使用固定的初始条件(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0）来创建单参数的bifur-阳离子图。之所以选择0.1(2π/ω)作为初始时间，是因为返回映射经过一个接近0.1的局部最小值。因此，当我们使用规定的初始条件(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0）时，模拟可以跟踪简单（未嵌套）和嵌套MMOIB生成的MMOS。我们以前介绍了回归图本身的轨迹[Inaba&Tsubone，2020b]。本研究介绍不使用约束动力学编制的近似返回图[Kousaka et al.，2017；Inaba&Kousaka，2020a；Inaba&Tsubone，2020b]。嵌套的MMOIB生成的[[12,13]2,[12,132]3n]3n+2MMOs增量和当n趋于MMO时的变化增量终止切分点[Kousaka et al.，2017；Inaba&Kousaka，2020a]，在此点出现[12,132]3振荡。由于序列的个数有[12,132]3三个强迫项，三阶返回映射在三个点处变得相切。因为这个返回图是近似的，所以切线双阳点也是近似的，并且MMOIB生成的MMO终止于ω=0.6245911。在这一点上应用三次后的返回图如图所示。8.在以前的工作中，我们只讨论了嵌套的[[12,13m]m+1],[12,13(m+1)]m+2n](m+2)n+(m+1),m=的MMOs[Inaba&Tsubone，2020b]。在本研究中，我们利用firefrst返回映射，在m=1,2,3的情况下，证明了嵌套的MMOIB生成的MMO的存在性。与图中所描述的非常相似。5、一个双参数分岔图和相应的单参数分岔图,其中嵌套的MMOIB生成的[[12,132]3,[12,133]4n]4n+3 MMOs可以是连续n个观察值如图所示。9.时间序列波形[[12,132]3,[12,133]4n]4n+3对于n=1,2,3,4,5和6分别在图10(a)-10(f)中示出m=2的情况。类似地，在图121313(=[12,132]3)中，蓝色符号表示为121313(=[12,132]3)。10(a)-10(f)是触发[[12,132]3,[12,当n=1,2,3,4,5,6时，133]4n]4n+3嵌套的MMOIB生成的MMOs变得更加复杂，如图4所示。10(a)-10(f)。与图1所示的返回图和返回图轨迹相对应。10(a)-10(f)示于图4。分别为11(a)至11(f)。figurrst返回图及其绘图轨迹使我们能够很好地解释嵌套MMOs。类似于MMOIB生成的[[12,132]3,[12,133]4n]4n+3 MMO序列向切分叉点递增，其中[12,133]4作为n的结果出现。由于序列[12,133]4有四个强迫项，所以应用了一个近似的返回映射四次将与对角线相切。

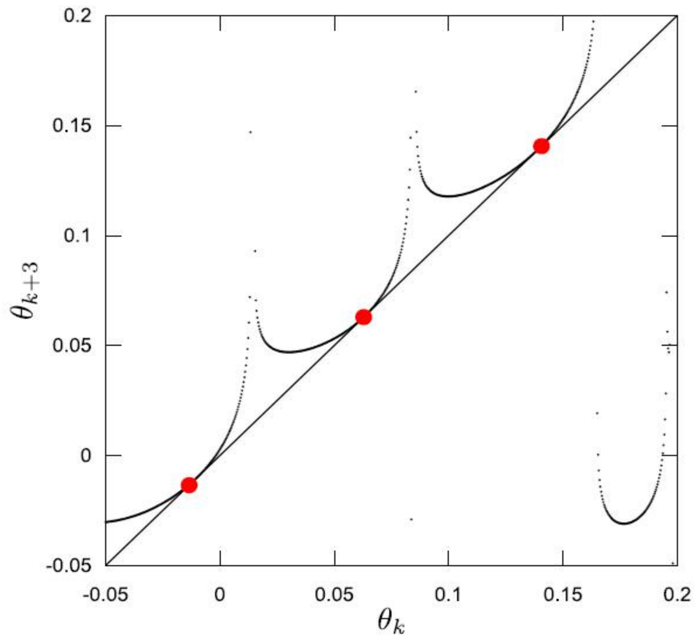


图 8 在 MMO 增量终止切线分叉点处应用了三次的 figurrst 返回图的形状 ω=0.6245911

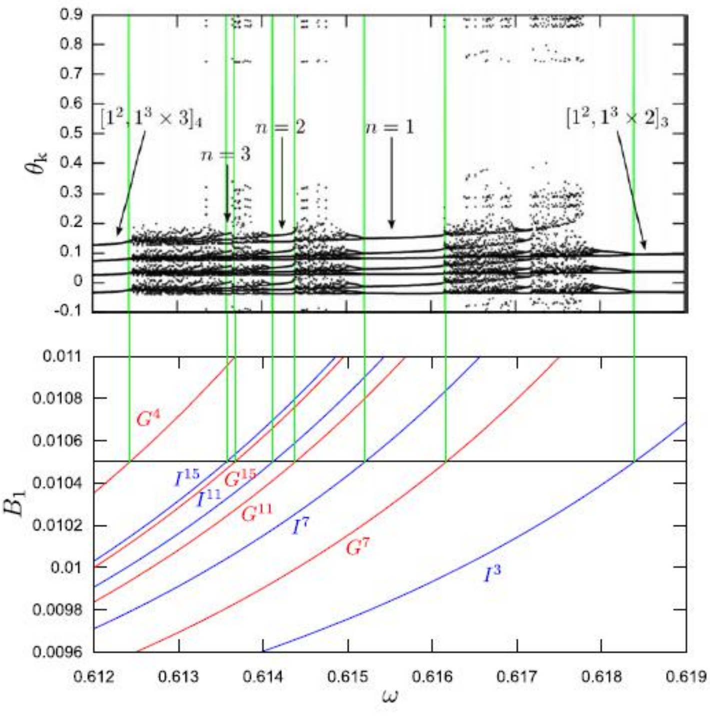


图 9 MMOIB 生成的[[12,13×2]3,[12,13×3]4×n]4n+3 个 MMO 出现的单参数(上图）和双参数（下图）分岔图。TT4n+3 和 I4n+3 分别表示 4n+3 周期点的鞍结点分岔曲线和倍周期分岔曲线。

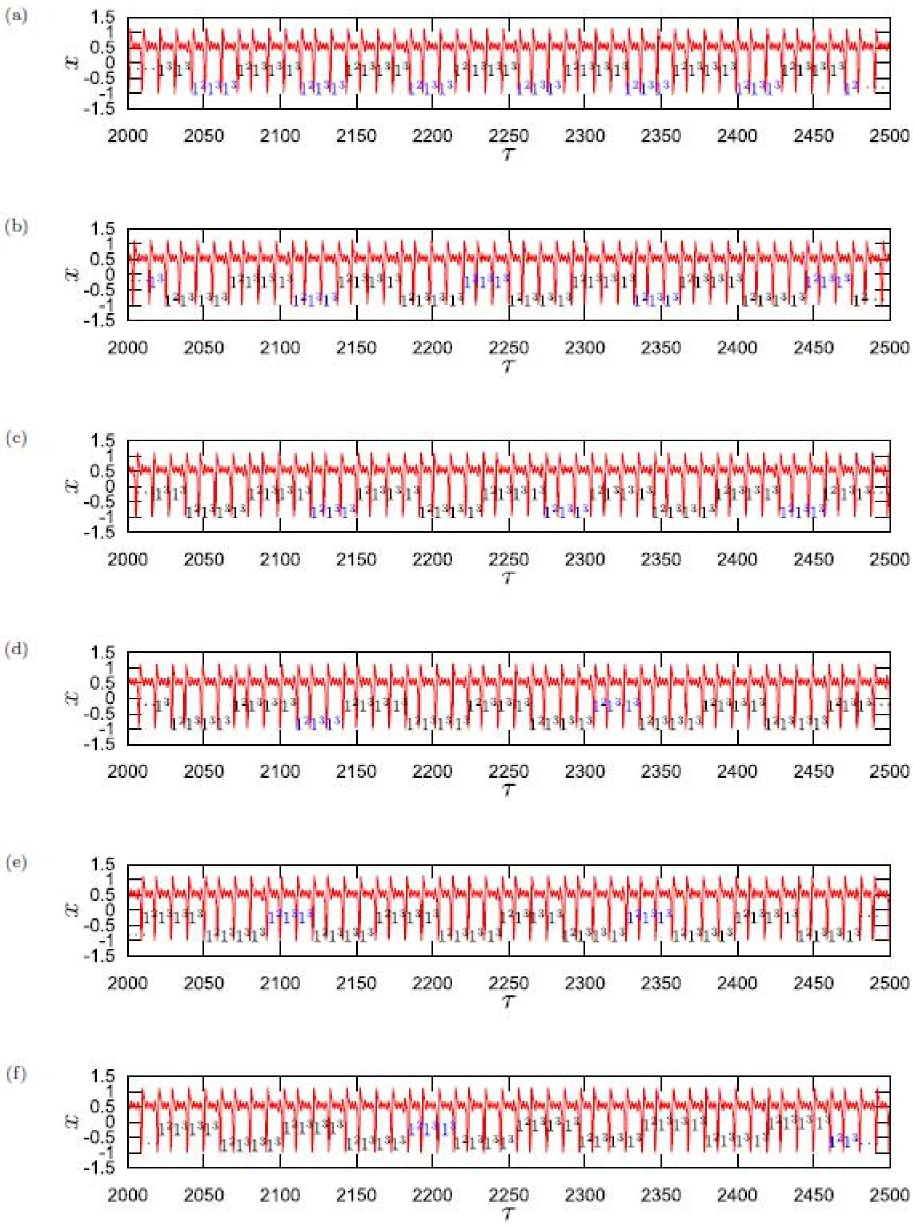


图 10 嵌套 MMOIB 产生的[[12,13×2]3,[12,13×3]4×n]4n+3 MMOs 的时间序列波形，示出(a)n=1ω=0.6155,(b)n=2,ω=0.6143,(c)n=3,ω=0.6136,(d)n=4,ω=0.61326,(e)n=5,ω=0.61305 和(f)当ω=0.61291 时，n=6。使用固定的初始条件:(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0）。在这些代码中，序列(a)-(f)中蓝色标记为 121313 的序列触发 MMOIB 生成的 MMOs[[12,13×2]3,[12,13×3]4×n]4n+3 对于 n=1,2,3,4,5,6。

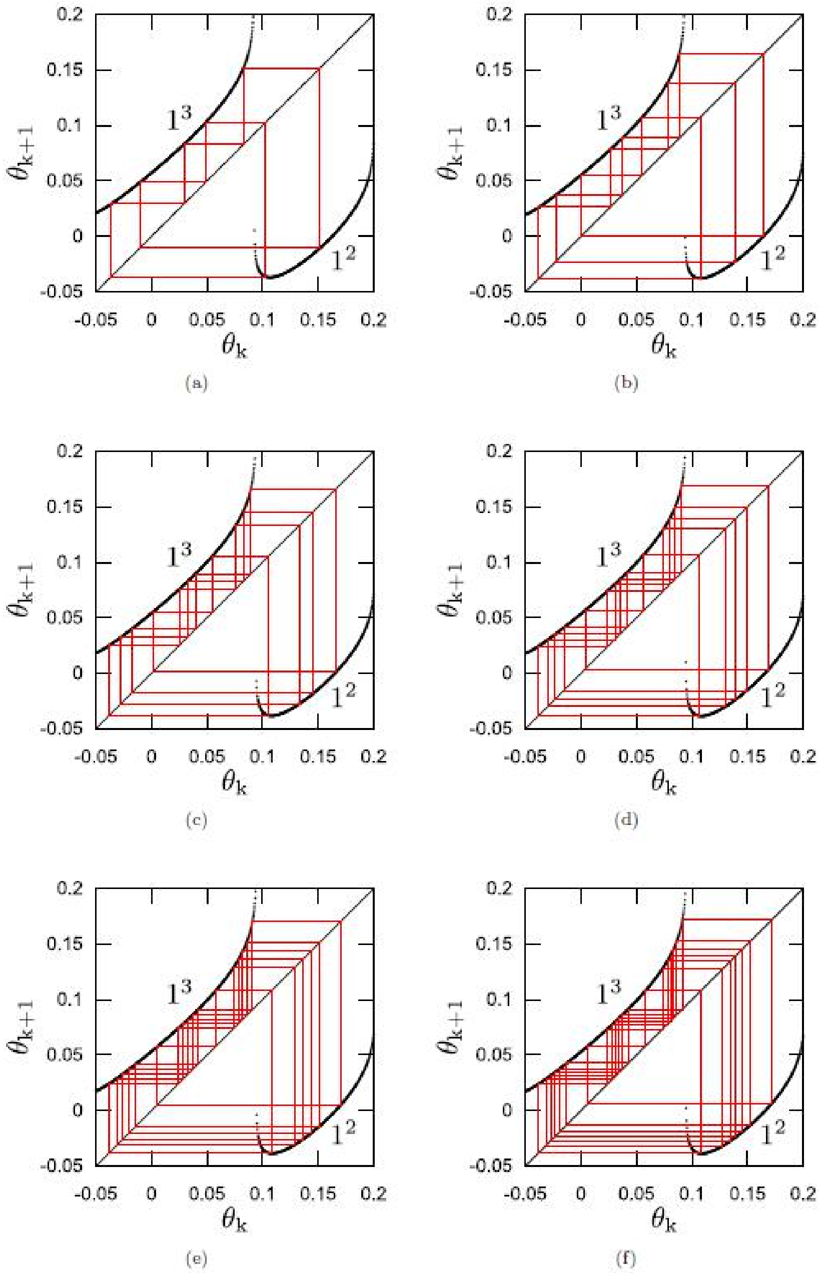


图 11.嵌套的 MMOIB 生成的 MMO 的返回图，显示[[12,13×2]3,[12,13×3]4×n]4n+3(a)n=1 对于ω=0.6155,(b)n=2 对于ω=0.6143,(c)n=3 对于ω=0.6136,(d)n=4 对于ω=0.61326,(e)n=5 对于ω=0.61305 和(f)n=6 对于ω=0.61291。

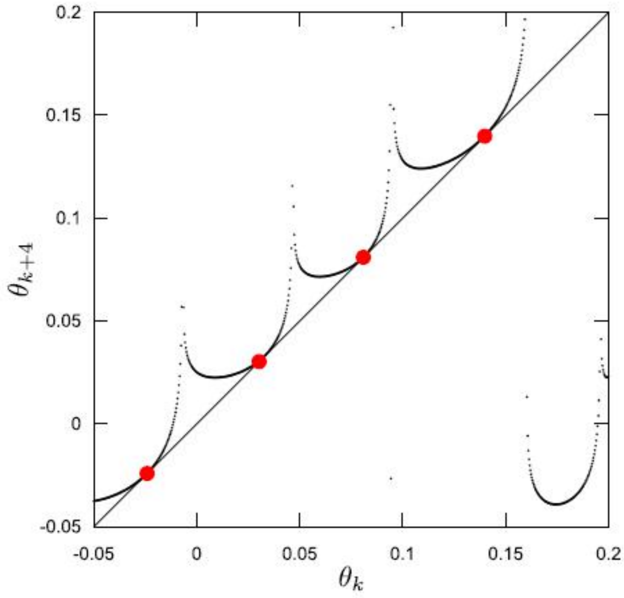


图 12.对ω=0.6124231 应用了四次返回图的形状

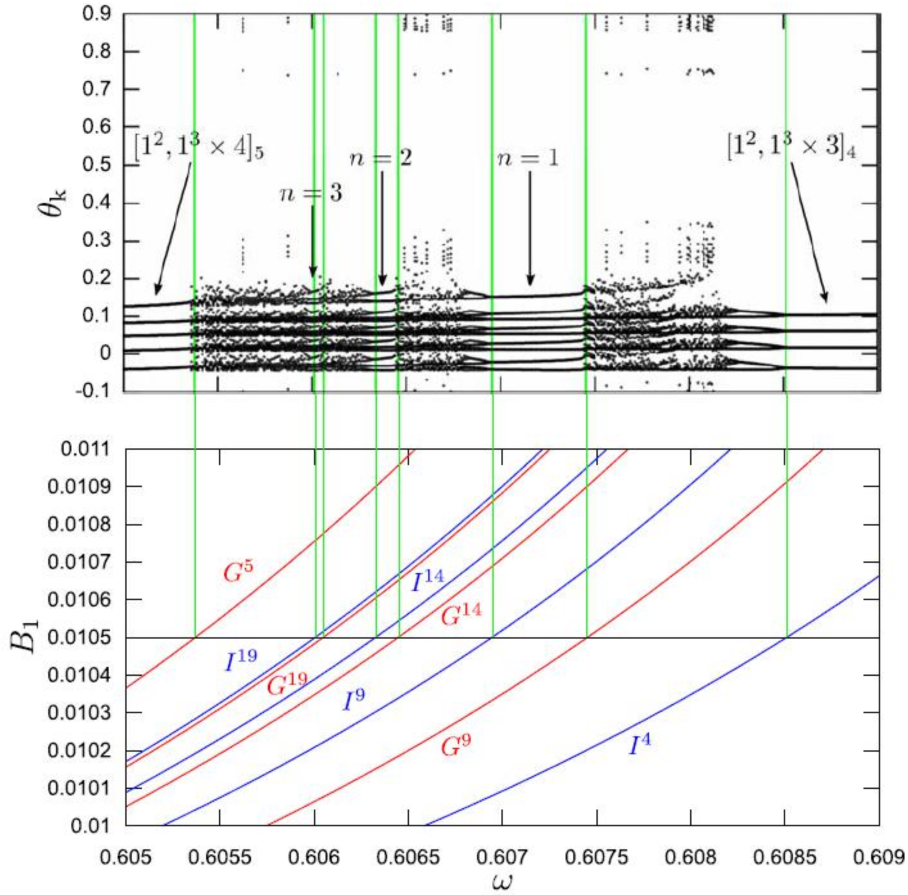


图 13 MMOIB 生成的[[12,13×3]4,[12,13×4]5×n]5n+4 个 MMO 出现的单参数（上图）和双参数（下图）分岔图。TT5n+4 和 I5n+4 分别表示 5n+4 周期点的鞍结点分岔曲线和倍周期分岔曲线。

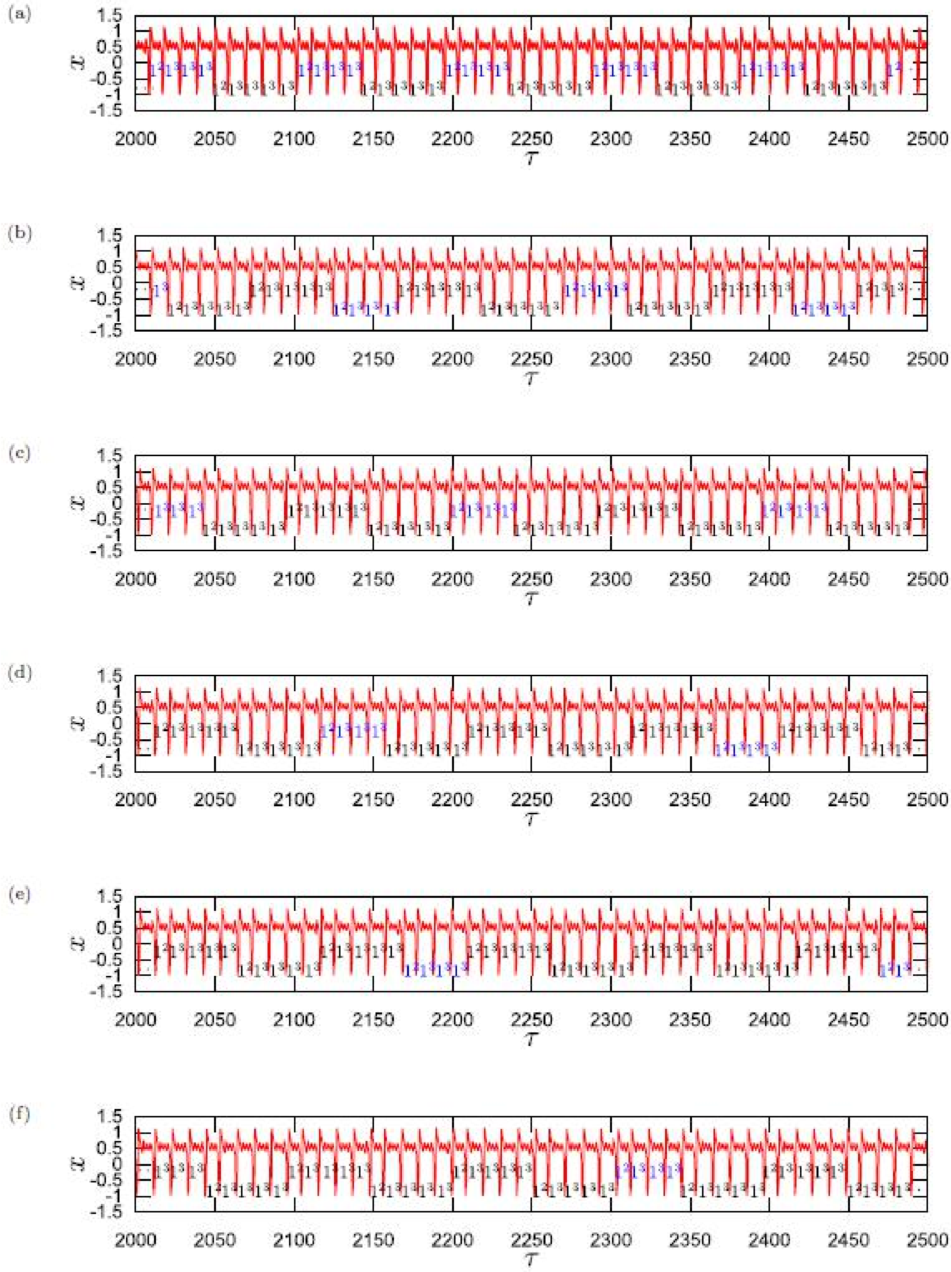


图14. 嵌套MMOIB产生的[[12,13×3]4,[12,13×4]5×n]5n+4个MMOs的时间序列波形，显示(a)n=1,ω=0.607,(b)n=2,ω=0.6064,(c)n=3,ω=0.60601,(d)n=4,ω=0.60582,(e)n=5,ω=0.6057 ， 当ω=0.605625时(f)n=6。采用固定初始条件(τ0,x0,y0)=(0.1(2π/ω),1,0）。在本文中，序列(a)-(f)中蓝色标记为12131313的序列触发MMOIB生成的MMOs[[12,13×3]2,[12,13×4]5×n]5n+4 n=1,2,3,4,5和6。

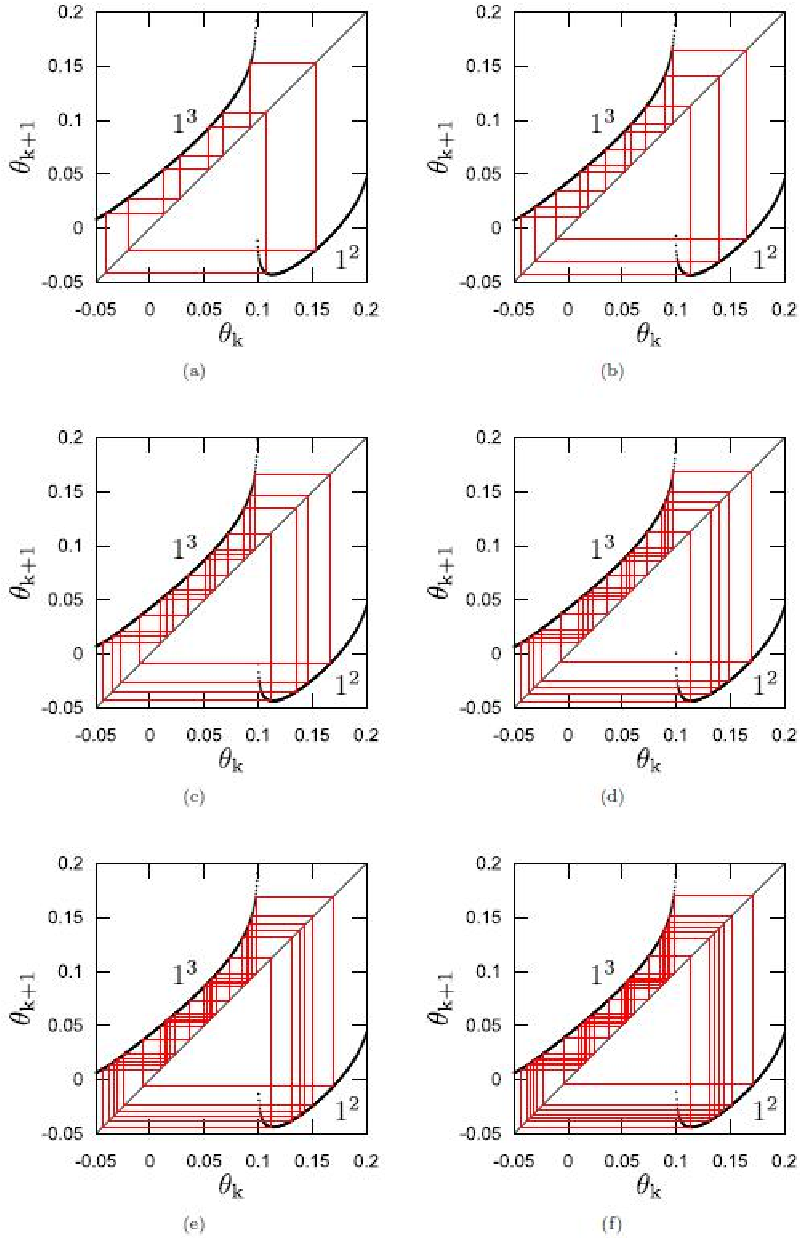


图15.嵌套的MMOIB生成的MMO的返回图，显示[[12,13×3]4,[12,13×4]5×1]5n+4(a)n=1对于ω=0.607,(b)n=2 对 于 ω=0.6064,(c)n=3 对 于 ω=0.60601,(d)n=4 对 于 ω=0.60582,(e)n=5 对 于 ω=0.6057和(f)n=6对于ω=0.605625。

n趋向于确定性。在四次迭代之后，MMO增量终止的点计算为ω=0.6124231。四次应用的对应返回图在图中给出。12.在[12，133]4和[12，134]5 MMO生成区域中，嵌套的MMOIB生成的[[12，133]4,[12，134]5n]5n+4 MMO出现的双参数和单参数分叉图。对于连续的n在图中示出。13.对应于[[12,133]4,[12,13]的时间序列波形4]5n]5n+4,n=1,2,3,4,5和6,respec-如图1所示。14(a)至14(f)。类似于图中蓝色符号12131313表示。14(a)-14(f)是n=1的[[12,133]4,[12,134]5n]5n+4的触发序列,分别为2、3、4、5和6。最后，corre-海绵返回图及其轨迹如图1所示。15(a)至15(f)。即使应用了这些返回映射，也要区分[[12,133]4,[12,134]5 n]5n+4和n=n=6是di回归情节已经34岁了。然而，如果我们应用[12,134]5作为[[12,13]的结果出现的条件，则可以很容易地导出MMO增量终止切分点3]4,[12,134]5n]5n+4表示n。在这种情况下，所应用的返回图的时间将

变为棕褐色-gent到分叉点的对角线。

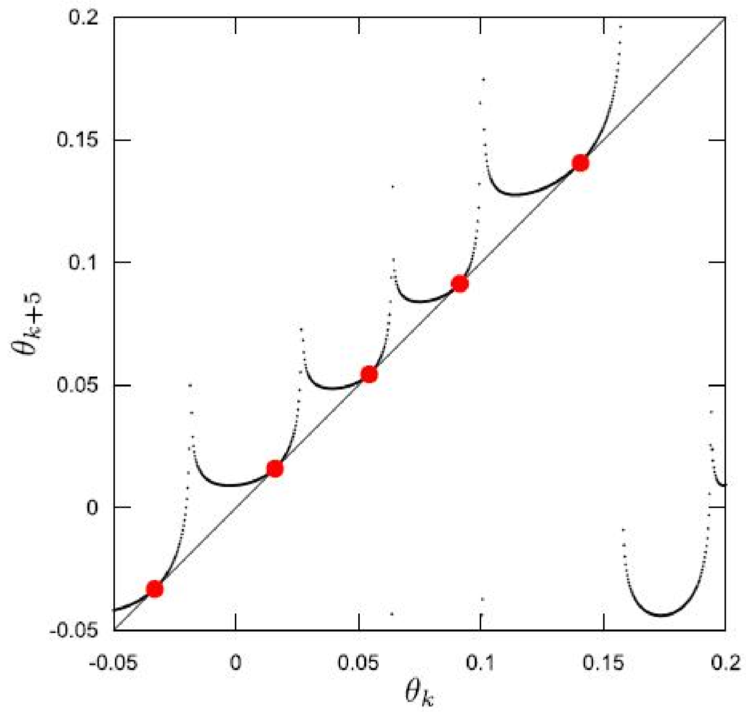


图16.对ω=0.605369应用了四次的foungrst返回图的形状

在这些条件下，MMO增量终止切分点可以近似地导出为ω=0.605369（见图16）。因此，我们的数值结果表明，嵌套MMOs是一种普遍现象，因为它们具有很强的有序性，并且可以在m值不断增大的情况下观察到，而m值是简单（非嵌套）MMOIBS的连续n值之一。

4.结论

本文研究了一类受迫BVP振子产生的嵌套MMOs,其中非线性项表示为三阶多项式函数。用数值方法对该系统整体单参数分岔图的三个大视图进行了预处理。这三张图都与全局视图相似，表明混沌窗口中可能存在自相似结构。由于双参数分岔图的分岔结构保持不变，因此判断嵌套MMOIB生成的MMOs是稳定的。此外，我们修改了近似的返回映射，并使用这些映射来证明嵌套的MMOIB生成的MMO可以通过我们所提出的规则得到很好的解释。我们还使用这些返回映射来识别分岔参数的阈值，在该阈值处MMO增量被切分岔终止。

参考文献

Albahadily, F. N., Ringland, J. & Schell, M. [1989]“Mixed-mode oscillations in an electrochemical system.I. A Farey sequence which does not occur on atorus,” J. Chem. Phys. 90, 813–821.

Arnol’d, V. I. (ed.) [1994] Encyclopedia of MathematicalSciences, Vol. 5 (Springer-Verlag).

Baer, S. M. & Erneux, T. [1986] “Singular Hopf bifurcationto relaxation oscillations,” SIAM J. Appl. Math.46, 721–739.

Baer, S. M. & Erneux, T. [1992] “Singular Hopf bifurcationto relaxation oscillations. II,” SIAM J. Appl.Math. 52, 1651–1664.

Benoit, E., Callot, J. F., Diener, F. & Diener, M. [1981]“Chasse au canard,” Collect. Math. 31–32, 37–119.

Braaksma, B. & Grasman, J. [1993] “Critical dynamicsof the Bonhoeffer–Van der Pol equation and itschaotic response to periodic stimulation,” Physica D68, 265–280.

Brons, M., Gross, P. & Bar-Eli, K. [1997] “Circle mapsand the devil’s staircase in a periodically perturbedOregonator,” Int. J. Bifurcation and Chaos 11, 2621–2628.

Brons, M., Krupa, M. & Wechselberger, M. [2006]“Mixed mode oscillations due to the generalizedcanard phenomenon,” Fields Inst. Commun. 49,39–63.

Brons, M., Kaper, T. J. & Rotstein, H. G. [2008]“Introduction to focus issue: Mixed mode oscillations:Experiment, computation, and analysis,” Chaos 18,015101-1–4.

De Maesschalck, P., Kutafina, E. & Popovi´c, N. [2014]“Three time-scales in an extended Bonhoeffer–van derPol oscillator,” J. Dyn. Diff. Eqs. 26, 955–987.

Desroches, M., Guckenheimer, J., Krauskopf, B., Kuehn,C., Osinga, H.M. &Wechselberger,M. [2012] “Mixedmodeoscillations with multiple time scales,” SIAMRev. 54, 211–288.

Desroches, M., Kaper, T. J. & Krupa, M. [2013] “Mixedmodebursting oscillations: Dynamics created by aslow passage through spike-adding canard explosionin a square-wave burster,” Chaos 23, 046106.

Diener, M. [1984] “The canard unchained or howfast/slow dynamical problems bifurcate,” Math.Intell. 6, 38–49.

FitzHugh, R. [1961] “Impulses and physiological statesin theoretical models of nerve membrane,” Biophys.J. 1, 445–466.

Freire, J. G. & Gallas, J. A. C. [2011a] “Stern-Brocottrees in cascades of mixed-mode oscillations andcanards in the extended Bonhoeffer–van der Pol andthe FitzHugh–Nagumo models of excitable systems,”Phys. Lett. A 375, 1097–1103.

Freire, J. G. & Gallas, J. A. C. [2011b] “Stern-Brocottrees in the periodicity of mixed-mode oscillations,"Phys. Chem. Chem. Phys. 13, 12101–12336.

Guckenheimer, J., Hoffman, K. & Weckesser, W. [2000]“Numerical computation of canards," Int. J. Bifurcationand Chaos 10, 2669–2687.

Guckenheimer, J. & Scheper, C. [2011] “A geometricmodel for mixed-mode oscillations in a chemical system,"SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 10, 92–128.

Hudson, J. L., Hart, M. & Marinko, D. [1979] “Anexperimental study of multiple peak periodic and
nonperiodic oscillations in the Belousov–Zhabotinskiireaction," J. Chem. Phys. 71, 1601–1606.

Inaba, N. & Kousaka T. [2020a] “Nested mixed-modeoscillations," Physica D 401, 132152-1–18.

Inaba, N. & Tadashi T. [2020b] “Nested mixed-modeoscillations, part II: Experimental and

numericalstudy of a classical Bonhoeffer–van der Pol oscillator,"Physica D 406, 132493-1–29.
Itoh, M. & Tomiyasu, R. [1990] "Experimental study ofthe missing solutions "canards"," IEICE Trans. E73,848–854.
Kawakami, H. [1984] "Bifurcation of periodic responsesin forced dynamic nonlinear circuits: Computation ofbifurcation values of the system parameters," IEEETrans. Circuits Syst. 31, 248–260.
Kawczy´nski, A. L. & Strizhak, P. E. [2000] "Periodadding and broken Farey tree sequences of bifurcationsfor mixed-mode oscillations and chaos in thesimplest three-variable nonlinear system," J. Chem.Phys. 112, 6122–6130.
Kawczy´nski, A. L., Khavrus, V. O. & Strizhak, P. E.[2000] "Complex mixed-mode periodic and chaoticoscillations in a simple three-variable model of nonlinearsystem," Chaos 10, 299–310.
Kousaka, T., Ogura, Y., Shimizu, K., Asahara,H. & Inaba, N. [2017] "Analysis of mixed-mode oscillation-incrementing bifurcations generated in anonautonomous constrained Bonhoeffer–van der Poloscillator," Physica D 353–354, 48–57.
Krupa, M., Popovi´c, N. & Kopel, N. [2008] "Mixedmodeoscillations in three time-scale systems: A prototypicalexample," SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 7,361–420.
Kuehn, C. [2015] Multiple Time Scale Dynamics(Springer International Publishing).
Kutafina, E. [2015] "Mixed mode oscillations in theBonhoeffer–van der Pol oscillator with weak periodicperturbation," Comput. Appl. Math. 34, 81–92.
Markman, G. & Bar-Eli, K. [1994] "Periodic perturbationsof an oscillatory chemical system," J. Chem.Phys. 98, 12248–12254.
Maselko, J. & Swinney, H. L. [1986] "Complex periodic oscillations and Farey arithmetic in the Belousov–Zhabotinskii reaction," J. Chem. Phys. 85, 6430–6441.
Matsumoto, T., Chua, L. O. & Komuro, M. [1985] "Thedouble scroll," IEEE Trans. Circuits Syst. 32, 798–818.
Muratov, C. B. & Vanden-Eijnden, E. [2008] "Noiseinducedmixed-mode oscillations in a relaxation oscillatornear the onset of a limit cycle," Chaos 18,015111.
Nagumo, J., Animoto, S. & Yoshizawa, S. [1962] "Anactive pulse transmission line simulating nerve axon,"Proc. Inst. Radio Engin. 50, 2061–2070.
Orban, M. & Epstein, I. R. [1982] "Complex periodic and aperiodic oscillation in the Chlorite–Thiosulfatereaction," J. Phys. Chem. 86, 3907–3910.
Petrov, V., Scott, S. K. & Showalter, K. [1992] "Mixedmodeoscillations in chemical systems," J. Chem.Phys. 97, 6191–6198.
Rachwalska, M. & Kawczy´nski, A. L. [2001] "Periodaddingbifurcations in mixed-mode oscillations in theBelousov–Zhabotinsky reactions at various residencetimes in a CSTR," J. Phys. Chem. 105, 7885–7888.
Ryashko, L. [2018] "Sensitivity analysis of the noiseinducedoscillatory multistability in Higgins model ofglycolysis," Chaos 28, 033602.
Scott, S. K. [1993] Chemical Chaos (Oxford UniversityPress).
Sekikawa, M., Inaba, N., Yoshinaga, T. & Hikihara, T.[2010] "Period-doubling cascades of canards from theextended Bonhoeffer–van der Pol oscillator," Phys.Lett. A 374, 3745–3751.
Shimizu, K., Sekikawa, M. & Inaba, N. [2011] "Mixedmode oscillations and chaos from a simple secondorder oscillator under weak periodic perturbation," Phys. Lett. A 375, 1566–1569.
Shimizu, K., Saito, Y., Sekikawa, M. & Inaba,N. [2012] "Complex mixed-mode oscillations in a

Bonhoeffer–van der Pol oscillator under weak periodicperturbation," Physica D 241, 1518–1526.
Shimizu, K., Sekikawa, M. & Inaba, N. [2015] "Experimentalstudy of complex mixed-mode oscillations generated in a Bonhoeffer–van der Pol oscillator under
weak periodic perturbation," Chaos 25, 023105-1–8.
Shimizu, K. & Inaba, N. [2016a] "Piecewise-linear Bonhoeffer–van der Pol dynamics explaining mixedmode oscillation-incrementing bifurcations," Prog. Theor. Exp. Phys. 2016, 033A01-1–15.
Shimizu, K. & Inaba, N. [2016b] "Experimental and numerical observation of successive mixed-mode oscillation-incrementing bifurcations in an extended Bonhoeffer – van der Pol oscillator," Int. J. Bifurcation and Chaos 28, 1830047-1–10.
Sudhu, S. & Kuehn, C. [2018] "Stochastic mixed-mode oscillations in a three-species predator–prey model,"Chaos 28, 033606.
Takahashi, H., Kousaka, T., Asahara, H., Stankevich, N. & Inaba, N. [2018] "Mixed-mode oscillationincrementing bifurcations and a devil's staircase from a nonautonomous, constrained Bonhoeffer–van der Pol oscillator," Prog. Theor. Exp. Phys. 2018, 103A02-1–16.
Tsumoto, K., Kurata, Y., Furutani, K. & Kurachi, Y. [2017] "Hysteretic dynamics of multi-stable early after depolarisations with repolarisation reserve attenuation: A potential dynamical mechanism for cardiac arrhythmias," Sci. Rep. 7, 10771-1–12.
Yoshinaga, T., Kawakami, K. & Yoshikawa, K. [1988] "A circuit metaphor for nonlinear oscillation in a chemical system at a water-oil interface," IEICE Trans. J71-A, 1843–1851 (in Japanese).
Zvonkin, A. K. & Shubin, M. A. [1984] "Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations," Russ. Math. Surv. 39, 69–131.