

# 嵌套混合模式振荡

Naohiko Inaba a, Takuji Kousaka b

a 日本川崎大学, 明治大学研究与知识产权战略协调组织

b 日本胡丘大学电气与电子工程系, 名古屋

2018-9-1 收到, 2019-7-13 返修, 2019-7-15 接收

## 摘要:

本文讨论了非自动的 Bonhoeffer-van der Pol 振荡器与二极管的嵌套混合模振荡。我们使用我们以前提出的约束分段光滑动力学, 其中二极管被假设为开关 (Kousaka et al., 2017)。该理想化模型对应于一个退化情形, 其中一个参数趋于无穷大, 电路动力学由一个单变量分段非自治方程表示, 从而使一维 Poincaré 返回映射得到严格定义。我们用这些映射来研究  $1^4$ -和  $1^5$ -生成区之间的分叉结构。混合模式振荡增量分叉(MMOIBs)引起周期增加序列, 用  $1^4(1^5)^n$  或更准确地说用  $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$  来表示。我们解释了当分叉参数改变时导致不变间隔交替出现和消失的机制, 以捕获每个 MMOIB 生成的 MMO。本研究的主要目的是澄清的分岔结构嵌套 MMOIBs, 产生  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_{3 \times n}]_{3n+2}$  之间的连续  $n$  MMO 序列  $[1^4, 1^5 \times 1]_2$  和  $[1^4, 1^5 \times 2]_{3-}$ , 以及  $[[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_{4 \times n}]_{4n+3}$  之间的连续  $n$  MMO 序列  $[1^4, 1^5 \times 2]_{3-}$  和  $[1^4, 1^5 \times 3]_{4-}$ , 这说明 MMOIBs 在  $[1^4, 1^5 \times m]_{m+1}$ -和  $[1^4, 1^5 \times (m+1)]_{m+2}$ -之间产生连续的  $[[1^4, 1^5 \times m]_{m+1}, [1^4, 1^5 \times (m+1)]_{m+2} \times n]_{(m+2)n+(m+1)}$  序列 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 其中  $m$  是一个整数。我们还观察到双嵌套 MMOIB 结构, 尽管我们发现单嵌套 MMOIB 和双嵌套 MMOIB 之间存在显著差异。在单参数分叉图中, 单嵌套 MMOIB 产生的 MMO 的清晰序列出现, 而双嵌套情况下的 MMO 产生区域相对来说非常窄 (尽管我们确实确认它们也是连续出现的)。单嵌套和双嵌套 MMOIB 序列的产生可以用 MMOIB 累积到的 MMO 增量终止切分点处的一维映射来解释。

**关键词:** 嵌套混合模振荡; MMO 增量分岔; 非自动的 Bonhoeffer-van der Pol; 振荡器

## 1 引言

Bonhoeffer-van der Pol(BVP)振子的动力学与 Fitzhugh-Nagumo 动力学是等价

的[1,2], 多年来已被广泛研究[3-6]。本文研究了混合模振荡中的门嵌套分岔结构 (MMOs) 是由我们在前人工作中首次引入的一个非自治约束 BVP OSCIL-Lator 生成的[7]。混合模式振荡增量分岔 (MMOIBs) 导致连续的周期加法序列, 并产生嵌套的混沌 MMO WIN-Dows。我们在数值上发现, 它们至少可以是双重嵌套的, 并用从它们的约束动力学导出的一维 Poincaré 返回映射精确地分析了它们。

MMOs 最早是在化学实验中观察到的[8-12]。它们具有由  $L$  个大的漂移和  $s$  个小的峰值组成的特征时间序列波形, 典型地表示为  $L^s$ 。MMOs 以前被发现是交替的周期和混沌序列[13]。

自从在扩展的慢-快和多时间尺度常微分方程 (ODEs) 中出现显著的 MMO 行为并能产生鸭鸣[12,14-16]以来, 它们一直是研究的热点[12,14-35]。引起简单 MMOs 的机制已由 Brons [18], Guckenheimer 和 Scheper[36], Desroches 等[37], Krupa 等人[19], Kutafina[30], 和 De Maesschalck 等人从理论上阐明[31]。

Kawczyński 等人[22, 23]和 Rachwalska 等人[24]在简单的三变量 MMO 基因分级自治 ODEs 中发现了周期添加序列, 其发生方式类似于圆图中的周期添加分叉。Shimizu 等人[27]在弱周期扰动下的 BVP 振子中, 发现了最简单的加周期 MMO 序列, 用  $1^2(1^3)^n$  表示, 或更准确地说用  $[1^2, 1^3 \times n]_{n+1}$ , 其中下标  $n+1$  是每个 MMO 序列的强迫项周期数。他们称由此产生的分叉为 MMOIBs。这种分叉序列在化学实验[9-11]中已经被发现, 并在自主[14,17]和非自主[20,21]中得到了深入的数值研究。

Avrutin 和他的同事们在理论上重点讨论了单次分段光滑和分段线性映射中的加周期和增周期分岔[38, 39]。他们研究了魔鬼楼梯平台的间隙和重叠, 给出了滞回楼梯存在的充分条件[39]。Granados 等人对这方面的工作进行了总结[40], 也给出了非滞回楼梯存在的条件。此外, Schenke 等人[41]提出了一种场景, 其中嵌套的周期增量分叉应该使用基于 DC-DC 转换器电路的三段分段线性映射来出现。

Kousaka 等人[7]试图通过提出涉及二极管的非自治约束 BVP 动力学来弥合流动中的 MMOIBs 和一维映射中的 MMOIBs 之间的差距。具体地说, 他们考虑了二极管本质上作为开关工作的退化情况。Inaba 和 Mori[42, 43]通过考虑一个理想化的情况, 其中一个参数在二极管的导通区趋于无穷大, 并可以严格定义一维

Poincaré返回映射，分析了包含二极管的扩展和强迫 van der Pol 振荡器中的混沌和环面击穿。他们成功地解释了连续 MMOIBs 的出现，表明它们以类似于圆图中周期加分叉的方式发生。Scott[17]在数值上显示连续的  $1^s(1^{s+1})^n$  序列，同时注意到镜像序列  $(1^s)^n 1^{s+1}$  似乎不存在。Kousaka 等人[7]发现了类似的结果，用一维 Poincaréreturn 映射在不变区间内具有两对向下凸的分支，它们的动力学产生了不对称的 Farey 树。在实验室实验中也观察到了这些 MMOIB 生成的 MMOs[7]。Takahashi 等人[44]也考虑了同样的动力学，表明嵌套 MMOIBs 可能发生。

在本研究中，我们使用由 Kousaka 等人提出的非张力约束分段光滑 BVP 动力学导出的一维 Poincaré返回映射来详细研究嵌套 MMOIBs[7]。首先，我们证明了导致 MMOIB 产生的 MMOs 的不变间隔随着分叉参数的变化而交替出现和消失，这说明这些间隔在连续变形下是不保持的。Inaba 等人[45]表明，当使用连续变形时，在驱动 BVP 动力学的单参数分岔图中不能总是看到连续的 MMOIBs。他们还发现了产生连续 MMOIBs 的初始条件[45]。当使用连续形变方法时，我们能够显示这些 MMOIB 产生的 MMO 在单参数分岔图中是不可见的，因为导致它们交替出现和消失的不变间隔。如果我们在 Poincaré返回图的适当极值处选择初始条件，我们可以清楚地观察到这些 MMO。

本文详细研究了 MMOIB 生成的 MMOs 发生在  $1^4$ -和  $1^5$ -生成区域之间，发现许多连续的  $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$  序列发生并累积到 MMO 增量终止切分点处[44]，在该点处一维 Poincaré返回映射的  $1^5$ -生成分支与对角线相切。

我们根据单嵌套和双嵌套 MMOIB 序列的增量终止切分，解释了它们的增量和累加的机制。这些切分叉在单嵌套和双嵌套情况下都明确存在，表明存在连续的 MMOIBs。我们在两种情况下都证实了这一点，但我们的结果表明它们之间有显著差异。在单参数分岔图中可以清楚地观察到单嵌套 MMOIB 产生的 MMO 序列，类似于简单（未嵌套）MMOIB，而双嵌套 MMO 只在极小的间隔内出现。双嵌套 MMOIBs 在 MMO 增量终止切分点处的 Poincaré返回映射的形状也不同于简单和单嵌套 MMOIBs：在双嵌套 MMOIBs 情况下，从切分点延伸的相邻曲线之间的切分点映射显示出较大的间隙。这些切线映射解释了为什么在双嵌套 MMOIB 生成区域的单参数分岔图的许多区域中都存在混沌现象。

另外，在参考文献[14,17]中，我们定义了“触发数”F 并证实了简单（非嵌套）、

单嵌套和双嵌套 MMOIB 生成的 MMO 都具有 Farey 特性。

最后，我们用理想化的二极管和分段光滑的 BVP 动力学的数值结果进行了比较，证明了在控制条件下，二极管导通区有有限斜率的 BVP 动力学的数值结果是正确的。一维 Poincaré 回归映射中的吸引子与由 ODEs 导出的第一个回归映射中的轨迹定性一致。然而，不幸的是，对于光滑的（经典的）BVP 振子，我们只能观察到两个简单的（非嵌套的）MMOIB，而不能观察到嵌套的 MMOIB，尽管我们相信如果我们能找到合适的初始条件，它们会出现。在我们以前的研究 [45] 中，我们通过选择适当的初始条件，成功地观察到了经典 BVP 振子中  $[1^2, 1^3 \times n]_{n+1}$  的 MMO 序列的连续 MMOIBs。

本文组织如下。在第二节中，我们回顾了我们在以前的研究 [7] 中首次提出的带理想化二极管的约束 BVP 动力学，并说明了如何从理想化动力学构造一维 Poincaré 映射。此外，我们还解释了在无扰动情况下向量场的几何结构。在第 3 节中，我们讨论了简单的（非嵌套的）MMOIB 生成的 MMOs 的出现和消失，这些 MMOs 是由鞍结点 bifur 引起的-阳离子和危机。在第 4 节中，我们研究了单嵌套 MMOIB 产生的 MMOs 的分叉结构，并观察到连续嵌套 MMOIB，不是用连续变形方法，而是用适当的初始条件。在第 5 节中，我们讨论了双嵌套 MMOIB，并研究了单嵌套和双嵌套 MMOIB 生成的 MMOS 之间的差异。我们还证明了简单(非嵌套)、单嵌套和双嵌套 MMOIB 生成的 MMO 具有不对称的 Farey 特性。最后，在第六节中，我们给出了一些结论。在附录中，我们通过比较一维 Poincaré 和第一返回映射中的轨迹，研究了理想化二极管和二极管导通区有有限斜率时的动力学之间的相似性。

## 2 弱周期扰动下带二极管的 BVP 振荡器与一维 Poincaré 返回映射

图 1(a) 显示了一个驱动 BVP 振荡器的电路图，其中包含一个具有完全饱和特性的非线性导体，这是我们在 Ref.[7] 中首次提出的。这里， $C = \epsilon$  是一个电容，假设它很小，所以电路的控制方程代表了慢速动力学。此外， $L$  是一个电感器，其值通过缩放归一化为 1。(请注意，尽管符号  $L$  也被用作 MMO 序列中大型活动的数量，但这两者不能混淆。) 变量  $x$  和  $y$  分别表示通过  $C$  的电压和通过  $L$  的

电流。k1 为线性电阻，B0 和 B1 sin ωτ 分别为直流偏置电压源和正弦电压源。强迫项 B1 的振幅也假定很小。最后，g(x) 是通过非线性负导体的电流(因此 x = α)，其电压-电流(v-i)特性如图 1(b)所示。采用分段线性二极管[7]可以很容易地实现非线性导体。我们称图 1(b)中的区域 x < α 和 x = α 分别为二极管 OFF 和二极管 ON 状态。如果电流 g(x) 是 x 在整个域上的函数，则电路的控制方程可以表示为两个非自治 ode 系统[26,27]。需要注意的是，由于变量 x 被约束在二极管 ON 区域的阈值电压 α 上，电路方程可以用以下分段光滑约束方程表示：

$$1. \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - (-x + x^3) \\ \dot{y} = -x - k_1 y + B_0 + B_1 \sin \omega \tau, \end{cases} \quad \text{for diode OFF,} \quad (1)$$

$$2. \begin{cases} x = \alpha \\ \dot{y} = -\alpha - k_1 y + B_0 + B_1 \sin \omega \tau, \end{cases} \quad \text{for diode ON.} \quad (2)$$

Eq.(1)中的上式由通过电容 C 的电流沿与 x 相反的方向为 C dxτ 推导而来，这就是 Kirchhoff 电流定律。相比之下，当电压 x 被约束为 α 时，在 Eq.(2)上式中 x 为 α (即常数)。ON 状态也被称为滑动滑动 [46,47]。方程中的下一个方程。(1)和(2)是由这样一个事实推导出来的，即电感器在与 y 相反方向上的电压为 L dyτ，这被称为基尔霍夫电压定律。这两个状态通过以下跃变条件连接(仅在时间上正向)：

$$\begin{aligned} 1. \text{二极管关闭 Eq.1} \rightarrow 2. \text{二极管打开 Eq.2: } & x = \alpha, \\ 2. \text{二极管打开 Eq.2} \rightarrow 1. \text{二极管关闭 Eq.1: } & y = -\alpha + \alpha^3 \end{aligned} \quad (3)$$

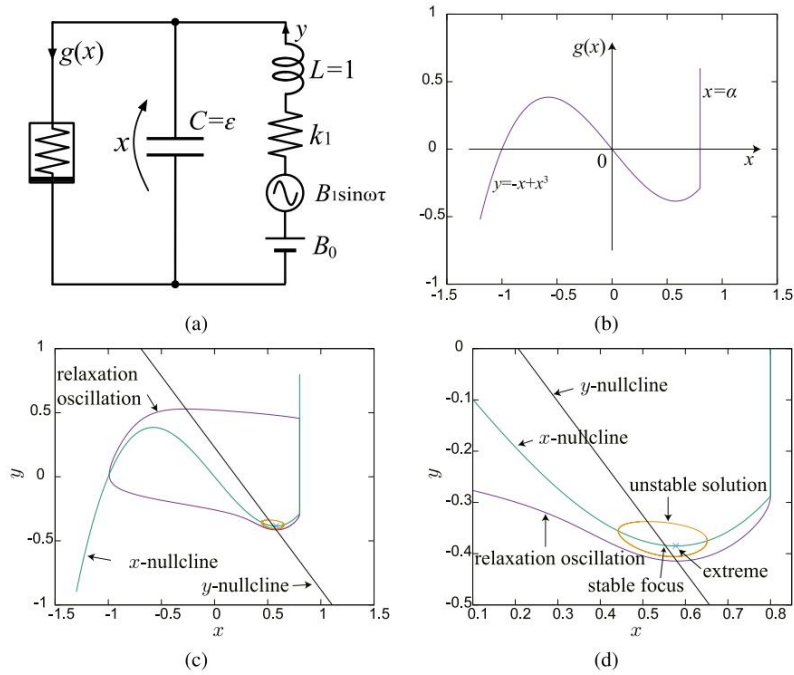


Fig. 1. BVP oscillator under a weak periodic perturbation, showing (a) the circuit diagram, (b) the  $v-i$  characteristics of the nonlinear conductor  $g(x)$ , (c) the geometric structure of the vector fields in the absence of perturbation ( $B_1 = 0$ ) for  $\varepsilon = 0.1, k_1 = 0.9, B_0 = 0.207$ , and  $\alpha = 0.8$  (green:  $x$ -nullcline, black:  $y$ -nullcline, purple: relaxation oscillation, orange: unstable periodic orbit, and cross: extreme), and (d) a magnified view of (c).

这些条件可以推导如下。如果二极管是关的，它当  $x$  达到  $\alpha$  时，开关为 ON，当  $x$  达到  $\alpha$  时，开关为 OFF 通过非线性导体的电流降到  $-\alpha + \alpha^3$ ，即，当  $g(\alpha) = y$  时，因为通过  $C$  的电流为零。(回忆通过电容器的电流是  $cdx/d\tau$  and  $x = \alpha$  in 二极管在 ON 区域，所以是  $dx/d\tau = 0$ )。我们用龙格-库塔方法。[7]之前的研究也表明了这一点具有完全饱和特性的分段平滑动力学或者一个理想的二极管可以捕获潜在的机制导致 MMO 和 MMOIBS。我们考虑这种不可逆因为现实世界的现象总是正向发生在时间。特别是，因为这项研究的目标是 MMO 解决方案(是周期的)，一个无限大的理想系统斜率可以帮助定性解释生成的解决方案在二极管的 ON 区域采用有限斜率的 BVP 系统。的具有静摩擦的机械振荡器动力学[46-48]类似于约束 RLC 电路的二极管[42, 43, 49-51]。特别是，它们之间有显著的相似之处在一个机械振子的动力学方程之间(Szalai 和 Osinga [46,47]分析)和电力电路与二极管(由 Inaba 和 Mori[42]提出)。之一研究这种动态的最大优势是使用电路就是我们可以很容易地执行电路定性与数值结果吻合的实验实验[7, 42, 43, 50]。此外，RLC 电路具有一个二极管是所谓的自然电路，因为它们只包括两个终端元素[52]。蔡氏电路是一个众所周知的产生混沌的电路电路[52,53]，因为它是一个自然电路，不能充当模拟计算机[52]。这里是电压和电流通过两个终端元素[52]起着至关重要的作用。因此，由于 RLC 电路只有两个终端元件组成是很

自然的，它们有时有简单的动态，相当于，例如粘滑动力学[46-48]。此外，BVP的动态振子等效于 FitzHugh-Nagumo 动力学[1]。

在接下来的讨论中，我们设置常量参数，对  $\varepsilon = 0.1, k_1 = 0.9, B_0 = 0.207, B_1 = 0.01$ ，和  $\alpha = 0.8$ ，选择  $\omega$  作为分岔参数。这些常量参数值也被考虑在文献[7]，以及文献[26-28,45]，除了  $\alpha$ 。常数对  $\varepsilon, k_1$  和  $B_0$  参数的取值进行了选择，使动力会是双稳态的，有稳定的焦点和稳定的弛豫振荡，无任何扰动( $B_1 = 0$ )在  $x-y$  平面附近产生一个亚临界 Hopf 分岔[26]。图 1(c)、(d)为几何结构无扰动时( $B_1 = 0$ )的向量场和一个放大的结构视图，分别标记零倾，弛豫振荡，不稳定周期解，稳定聚焦，并接近稳定的焦点。在这里，不稳定通过反溯得到周期解在二极管的关区时间。根据参考文献[26]中的图 2，在恒定值  $B_0 = 0.207$  和折叠(鞍结)的电压之间有大约 0.004 的差异分岔)发生在稳定的弛豫振荡和没有扰动时的不稳定解。因此， $B_1$  在 0.01 处，超过这个电压差的两倍。在这样的人面前对于弱周期扰动，解可以在两者之间交替焦点和弛豫振荡以一种复杂的方式 MMO 是观察到的最重要的现象之一。在这样的环境中。我们之前已经发现了一个新的分叉结构，该常数在  $\omega-B_1$  参数平面上的分叉结构阿诺舌的底部的参数值没有达到  $B_1 = 0$ [27]。此外，如果我们设  $B_0 = 0.21$ ，我们可以观察到的混沌消失，但是双稳定性仍然存在，这也是值得注意的[54]。

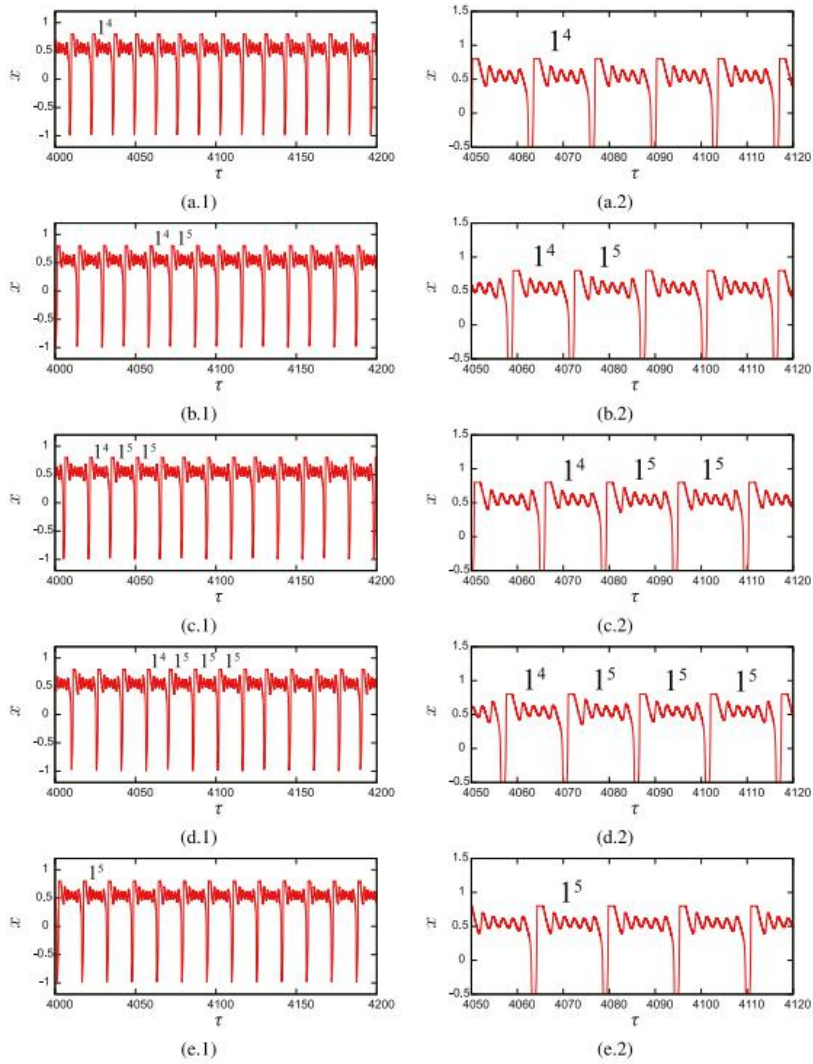
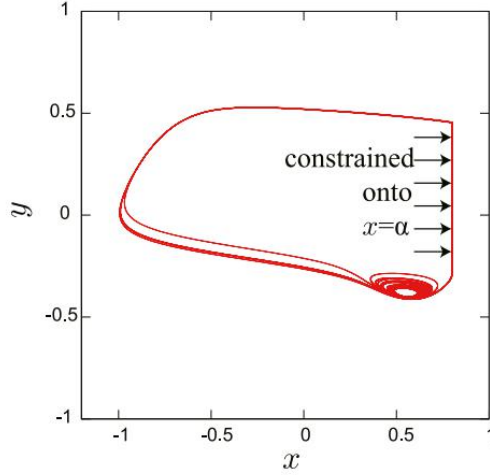


Fig. 2. Simple and MMOIB-generated MMOs observed in a constrained nonautonomous piecewise-smooth BVP oscillator (Eqs. (1), (2), and (3)), showing (a.1)  $[1^4]_1$  ( $\omega = 0.47$ ), (b.1)  $[1^4, 1^5 \times 1]_2$  ( $\omega = 0.435$ ), (c.1)  $[1^4, 1^5 \times 2]_3$  ( $\omega = 0.425$ ), (d.1)  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  ( $\omega = 0.4197$ ), and (e.1)  $[1^5]_1$  ( $\omega = 0.405$ ). In addition, (a.2), (b.2), (c.2), (d.2), and (e.2) show magnified views of (a.1), (b.1), (c.1), (d.1), and (e.1), respectively.

因为动力学可以用一个单变量系统来描述在二极管的 ON 区域的非自治 ode 和解决方程式。(1), (2)和(3)包括大的远足无法追溯时间, 则 Poincaré返回地图即可严格定义为一维[7]。我们可以证明分析这样简单的一维映射细节因为逻辑图和圆图在澄清问题上发挥了重要作用倍周期分岔背后的机制[55-57, 58]的遍历性和共振, 以及环面分解为混乱[59, 60]。这里, 我们使用一维的 Poincaré返回阐明了嵌套 MMO 游戏是如何以及为何出现的。





**Fig. 3.** Trajectory of  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  in the  $x$ - $y$  plane for  $\omega = 0.4197$ , corresponding to the time-series waveform shown in Fig. 2(d).

为了定义返回映射，我们定义了平面  $\Pi_r$  和线段  $\Sigma_1$  如下：

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \{(\tau, x, y) | x - \alpha = 0\}, \\ \Sigma_1 &= \{(\tau, x, y) | x - \alpha = 0, y = -\alpha + \alpha^3\}. \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\Pi_r$  表示二极管处于 ON 状态的平面， $\Sigma_1$  表示二极管处于 ON 状态的平面表示 in 的第二个过渡(ON Eq.(2)→OFF Eq. (1))式(3)，位于  $\Pi_r$  平面。

图 4 为矢量场的几何结构。让我们现在考虑的方案最初位于  $\Sigma_1$ ，在图中  $\tau_0$  表示的点。因为解总是包括较大的偏移(如图 2 所示)，解离开  $\Sigma_1$  最终在标记为 A in 的地方撞击了飞机  $\Pi_r$  图 4 所示。然后，它们被限制为  $\Pi_r$ ，并返回到  $\Sigma_1$ 。我们可以因此，将一维 Poincaré 返回映射  $T$  定义为

$$T: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1, \theta_0 \rightarrow \theta_1 = T(\theta_0), \quad (5)$$

$\theta_0$  和  $\theta_1$  定义为

$$\theta_0 = (\omega\tau_0/2\pi) \bmod 1, \theta_1 = (\omega\tau_1/2\pi) \bmod 1. \quad (6)$$

这里， $\tau_0$  是解在初始点的时间， $\tau_1$  是它返回的时间。

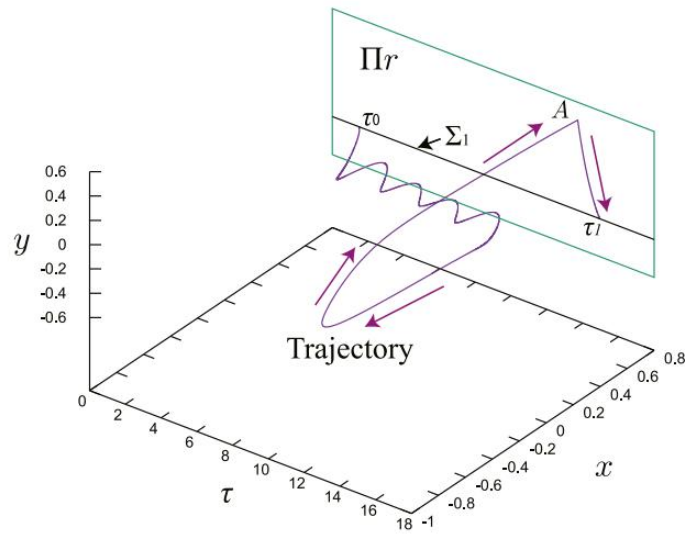


Fig. 4. Geometric structure of the vector fields.

图 5(a)、(b)为 $[1^4, 1^5 \times 11]_{12}$ 和相应的返回映射  $T$ 。有 MMOIB-generated 在 MMOs 左下方的  $T$ ，即当轨迹是在  $(0,0.2)$  区域，它们是在相似的在圆映射中添加周期的分岔序列的方法。弹道击中 14 号分支一次，15 号分支 11 次(图 5 (b))。

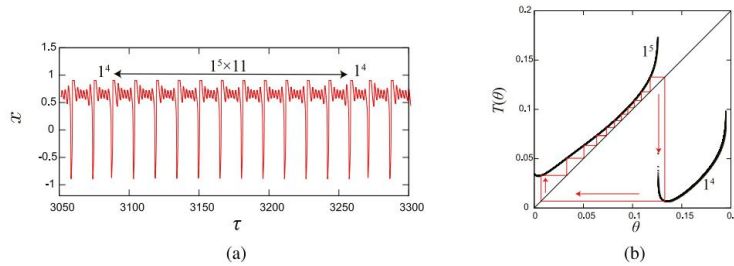


Fig. 5. (a) Time-series waveform for  $[1^4, 1^5 \times 11]_{12}$  for  $\omega = 0.411$ , which emerges after eleven MMOIBs. (b) Corresponding return map  $T$ , showing its trajectory with period 12.

### 3. 导致 MMOIB 生成 MMO 的不变间隔交替出现和消失

在本研究中，我们旨在利用一维 Poincaré 返回映射  $T$  来阐明 MMOIBs 产生的机制。首先，我们证明了包含 MMOIB 生成的 MMOs 的不变区间随着分叉参数  $\omega$  的变化而交替出现和消失。图 6(a)-(c)给出了 Poincaré 返回图及  $[14, 15 \times 3]_4$  生成点附近参数值的轨迹。Kousakaet 等[7]人的研究表明，MMOIB 生成的 MMO 出现在图  $T$  的左下方，大约在  $(0, 0.2)$ 。然而，正如这些图所示，这个不变区间并不总是存在的，因此在使用连续变形方法时也不会出现。设  $M$  和  $N$  为整数次迭代，迭代次数足够大，可以消除瞬态，获得平稳状态，即我们认为状态  $T(\theta_0) - T^M(\theta_0)$

是瞬态的,  $T^{M+1}(\theta_0)-T^{M+N}(\theta_0)$  是平稳的, 其中  $\theta = \theta_0$  为初始条件。地图  $T$  的左下方, 在  $(0, 0.2)$  左右。然而, 正如这些数字所示, 这个不变区间并不总是存在, 因此在使用连续变形方法时也不会出现。这里, 连续变形法涉及到从  $\omega=\omega_{\text{present}}$  到  $\omega=\omega_{\text{next}}=\omega_{\text{present}}+\Delta\omega$  ( $0<\Delta\omega\ll 1$ ) 的参数跟踪, 并以在  $\omega=\omega_{\text{present}}$  最新得到的变量  $T^{M+N}(\theta_0)$  为初始条件  $\theta_0(\omega=\omega_{\text{next}})$ , 使连续的分岔发生。随着  $\omega$  的变化, 不同周期的不变区间在  $T$  的左下方交替出现和消失, 如下所述。

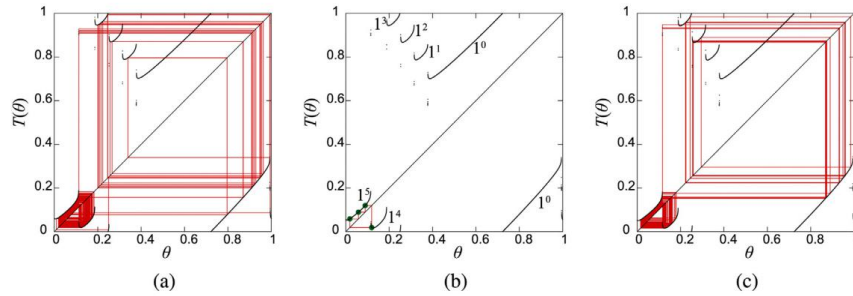


Fig. 6. One-dimensional Poincaré return map  $T$  and its trajectory, showing (a) wide-band chaos ( $\omega = 0.422$ ), (b)  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  ( $\omega = 0.4197$ ), and (c) wide-band chaos ( $\omega = 0.4187$ ).

图 7(a)显示了用上述连续变形法从右到左绘制的单参数分岔图。图的底部所示的周期性轨迹是 MMOIB 生成的 MMOs, 所以我们可以观察到许多连续的 MMOIBs。图 7(b)是图 7(a)的放大视图, 图 7(a)中, 我们可以观察到  $n=1,2,3$  时的  $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$ 。这些窗口通过 sn1、sn2 和 sn3 点的切线(鞍节点)分岔出现, 通过 cr1、cr2 和 cr3 点的危机消失。由于  $T$  左下角不变区间的缺失(如图 6(a)和(c)所示), 导致了宽带混沌, 如图 7(b)中  $\omega \in [\text{sn2}, \text{cr1}]$ ,  $\omega \in [\text{sn3}, \text{cr2}]$ 。

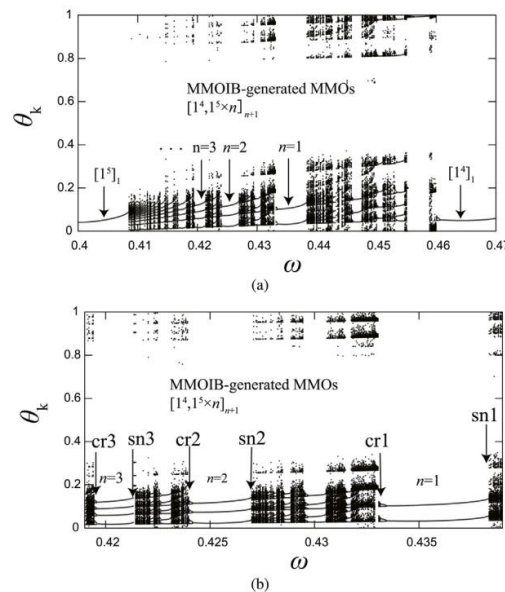


Fig. 7. (a) One-parameter bifurcation diagram between  $[1^5]_1$  and  $[1^4]_1$ , constructed by tracing from right to left via continuous deformation, showing the occurrence of many successive MMOIB-generated  $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$  MMOs. (b) Magnified view of (a), showing the MMOs for  $n = 1, 2$ , and  $3$ .

首先，我们考虑出现在 MMOIB 生成 MMOs 地图 T 左下角的不变区间。图 8(a)-(c)分别给出了 $[1^4, 1^5]_2$ ,  $[1^4, 1^5 \times 2]_3$ ,  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  出现的不变区间。如上所述，这些间隔分别通过标记 sn1、sn2 和 sn3 点的切线(鞍节点)分岔产生，并通过标记 cr1、cr2 和 cr3 点的危机消失(图 7(b))。现在，我们以 $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  ( $\omega = 0.4197$ )为例，如图 8(c)所示。这显示了应用了 4 次的映射 T (T4)，以及绿色突出显示的四个间隔在 T4 下是不变的。接下来，我们表示 T4 的最小不稳定不动点(即图 8(c)中 J4,1 的右边)除以  $q_{4,1}^+$ ，并将  $q_{4,1}^-$  定义为点

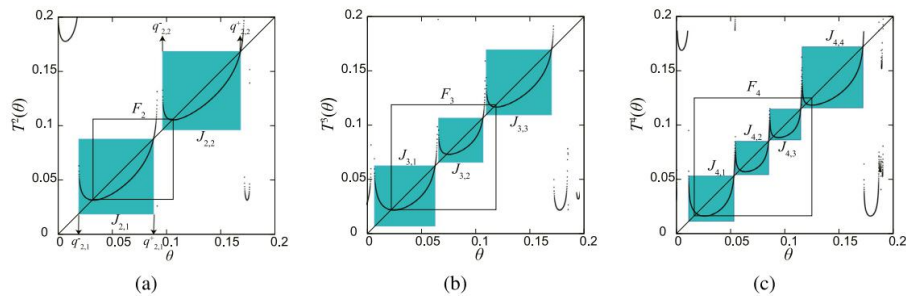


Fig. 8. Invariant intervals where MMOIB-generated MMOs appear, showing those for (a)  $[1^4, 1^5 \times 1]_2$  ( $\omega = 0.435$ ), (b)  $[1^4, 1^5 \times 2]_3$  ( $\omega = 0.425$ ), and (c)  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  ( $\omega = 0.4197$ ).

分别令  $T(J_{4,1}) = J_{4,2}$ ,  $T(J_{4,2}) = J_{4,3}$ ,  $T(J_{4,3}) = J_{4,4}$ ,  $T(J_{4,4}) = J_{4,1}$ 。在这些区间内，T4 具有与 logistic 图相似的形状，所以 $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  通过切线分岔产生，并由于倍周期分岔而消失。此外，图 7(b)中，由于 cr3 的危机，J4,1、J4,2、J4,3 和 J4,4 区间消失。绿色不变区间 J2,1 和 J2,2(图 8(a))和 J3,1, J3,2 和 J3,3(图 8(b))的定义相似。

为了方便，我们也标注了点  $q_{2,1}^-$ ,  $q_{2,1}^+$ ,  $q_{2,2}^-$  和  $q_{2,2}^+$ (图 8(a))。由于不变区间 J2,1(或 J2,2), J3,1 (J3,2, 或 J3,3), 和 J4,1 (J4,2, J4,3 或 J4,4) 的左边缘的斜率是陡峭的，例如，初始倍周期分岔的产生与 cr1、cr2、cr3 处的危机之间的  $\omega$ -区间较窄，如图 7(b)所示。

图 9(a)和(b)显示了 T4 在切线分岔之前的形状，其中 MMO 序列 $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  出现了，而在危机之后，不变区间 J4,1 (J4,2, J4,3 或 J4,4)消失。再次注意，当使用连续变形时，这些不变间隔不会出现。图 9(c)显示了危机刚结束时的 T4，其中  $J_{4,1}^-$ ,  $J_{4,2}^-$ ,  $J_{4,3}^-$ , 和  $J_{4,4}^-$ (图 9(b)中绿色部分)的定义与 J4 相似， $p$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ )不是 T4 的不变区间。

图 9(c)描绘了返回图离开  $\theta = q$ (红色箭头)后的轨迹，其中  $T_4(q)$ 为 T4 的极值。值得注意的是， $T_8(q) > q_{4,4}^+$ ,  $\omega = 0,41944407$ ，因此我们可以确定  $\omega =$

0.41944407 的图 T4(或 T)为图 7(b)中 cr3 危机后得到的图。此外, 请注意图 9(b)和(c)中存在小区间, 即  $J_{4,1}^+$  与  $J_{4,2}^+$ ,  $J_{4,2}^+$  与  $J_{4,3}^+$ , 以及  $J_{4,3}^+$  与  $J_{4,4}^+$ , 其中  $q_{4,1}^+ < q_{4,2}^-$ ,  $q_{4,2}^+ < q_{4,3}^-$  和  $q_{4,3}^+ < q_{4,4}^-$ 。此外, 我们很容易在图 T2 中看到  $\omega = 0.435$  的一个小区间  $[q_{2,1}^+, q_{2,2}^-]$ (图 8(a)), 这是我们在 cr1 处略远离危机的地方获得的。

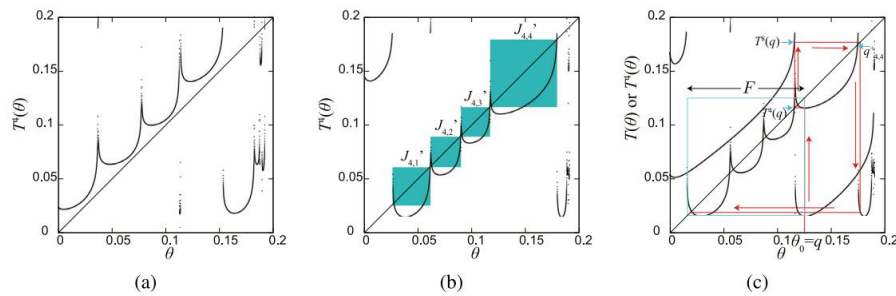


Fig. 9. Plots of  $T^4$  (and  $T$  in (c)) obtained (a) before the tangent bifurcation ( $\omega = 0.422$ ), (b) after the crisis ( $\omega = 0.4187$ ), and (c) immediately after the crisis ( $\omega = 0.4194407$ ).

间隔  $F$  如图 9(c)所示。如果不变区间  $J_{4,1}$  ( $J_{4,2}, J_{4,3}$  或  $J_{4,4}$ )因危机而消失, 则解落入此区间。然而, 由于它包括轻微的间隙, 该解决方案最终留下  $T$  的左下角 (见图 6(a)和(c))。这样, 不变间隔交替出现和消失, 而不随分叉参数的变化而连续变形。MMOIB 生成的 MMO 对于每个参数值都是唯一的, 因为不变区间在  $\theta=q$  处有一个唯一的极值, 但它们并不总是出现 (即使它们肯定存在), 因为解不一定会出现在  $T$  左下角的不变区间中。图 10 所示, 通过使用连续变形方法从左到右跟踪而构造的单参数图, 显示出了图 7 中没有出现的 MMO 序列[22, 23]。在我们以前的研究[7, 27]中, 我们从数字上表明由定义的通用常数 (其中  $\omega_{SN}$  是第  $n$  个界定分岔参数值) 在  $n$  大时能收敛到一个单位吗

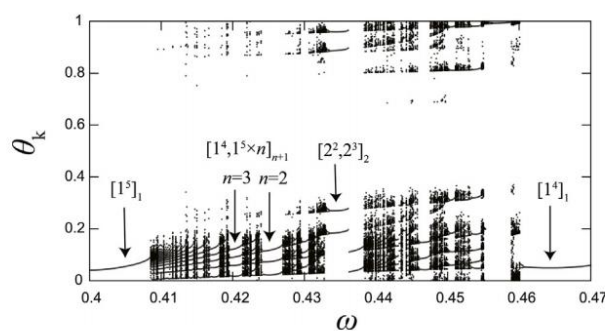


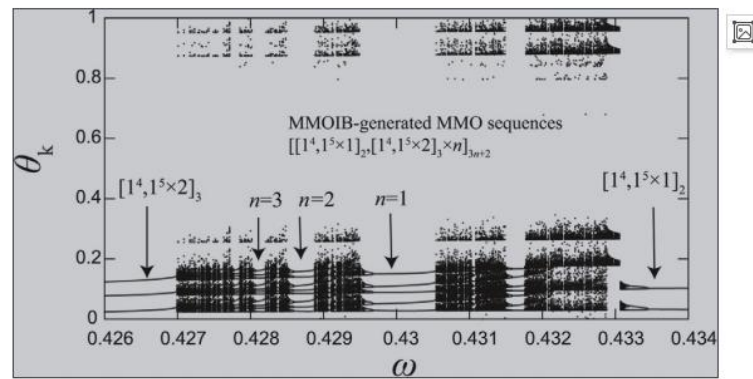
Fig. 10. One-parameter bifurcation diagram between  $[1^5]_1$  and  $[1^4]_1$ , constructed by tracing from left to right using a continuous deformation method.

因为 MMOIB 序列收敛并累积到 MMO 增量终止的切线分岔点, 其中 15 分支与对角线  $\theta = T(\theta)$  相切(见图 5(b))。

## 4 嵌套的 MMOs

在这一节中，我们讨论 MMOIB 生成的 MMOs 的嵌套分岔结构。在上一节中，我们解释了连续 MMOIB 生成的 MMO 序列型随着分岔的出现而交替消失变化。如果我们用  $m$  来表示  $n$  的一个特定值，那么数值结果表明，随着分叉参数  $\omega$  的改变，嵌套的 MMOIBs 可以连续生成。下面给出了一些具体的例子。

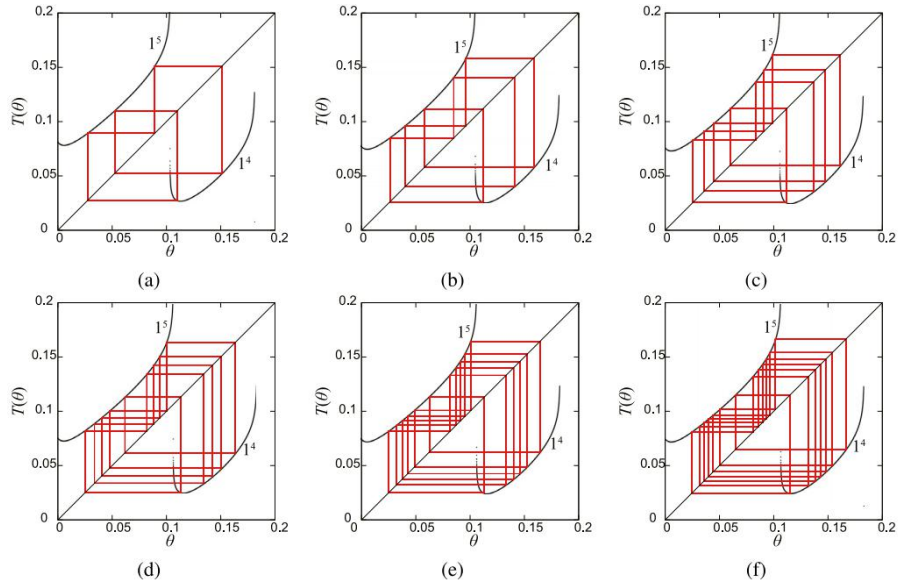
图 11 显示了产生的区域之间的单参数分岔图，我们将分别用  $A_{11}$  和  $B_{11}$  表示。在这里，我们可以看到 MMOIB 生成的 MMOs 可以嵌套。



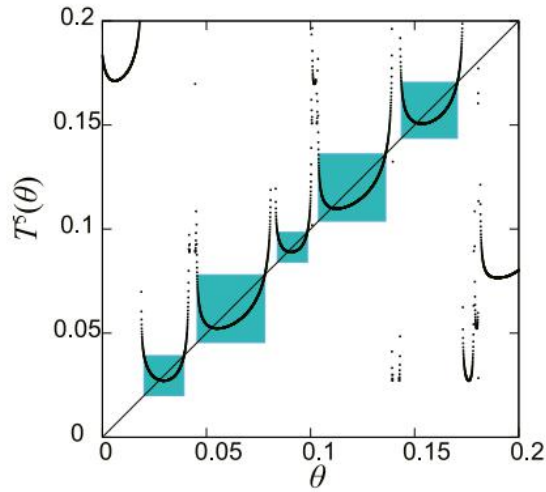
**Fig. 11.** One-parameter bifurcation diagram between the  $[1^4, 1^5 \times 1]_2$ - and  $[1^4, 1^5 \times 2]_3$ -generating regions, created by tracing from right to left, showing nested MMOIB-generated MMOs.

这表明了  $m=1$  case 情况由于时间序列波形非常复杂，因此很难从这些波形中识别出增量序列的强阶。因此，我们还绘制了图中平面内映射  $T$  的轨迹。图 12 和图 13 示出了一个具有五个不变间隔的映射的例子。因为  $T^5$ （以绿色突出显示）的形状像这些区间的逻辑图，倍周期分叉导致混乱，解释了内部危机的产生。嵌套的 MMOIBs 序列可以根据 MMOs 增量终止切分来理解，MMOIB 生成的 MMOs 向其增量和累积，该切分向该 MMO 增量终止切分向该 MMO 增量终止切分向该 MMO 增量终止切分向该 MMO 增量和累积果。由右向左追踪生成的区域之间的单参数分岔图，显示嵌套的 MMOIB 生成的 MMOs 发生在  $\omega=0.4269778$ 。图 14 表示  $T^3$  在切分点处的形状。由于序列的出现而终止，因此在这一点的  $T^3$  映射在三个点  $P_{3,1}$ ,  $P_{3,2}$  和  $P_{3,3}$  处与斜线相切。这三个切点的顺序由它们的下标给出，即  $T(P_{3,1}) = P_{3,2}$ ,  $T(P_{3,2}) = P_{3,3}$  和  $T(P_{3,3}) = P_{3,1}$  图示形状表明有许多连续的嵌套 MMOIBs 发生。

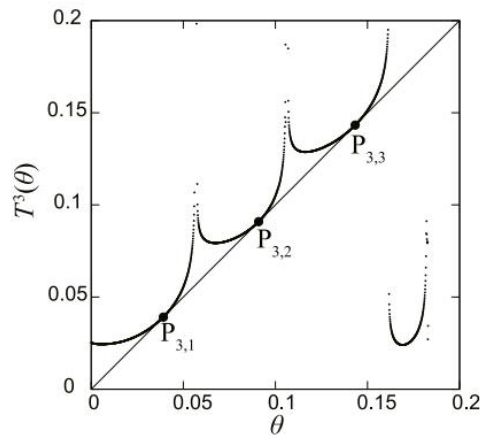




**Fig. 12.** Trajectories of the nested MMOIB-generated  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times n]_{3n+2}$  MMOs, for the cases (a)  $n = 1$  (period 5,  $\omega = 0.43$ ), (b)  $n = 2$  (period 8,  $\omega = 0.4287$ ), (c)  $n = 3$  (period 11,  $\omega = 0.4281$ ), (d)  $n = 4$  (period 14,  $\omega = 0.4278$ ), (e)  $n = 5$  (period 17,  $\omega = 0.4276$ ), and (f)  $n = 6$  (period 20,  $\omega = 0.42748$ ).



**Fig. 13.**  $T^5(\theta)$ , showing five invariant intervals, for the nested MMOIB-generated  $[[1^4, 1^5]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 1]_5$  MMO sequence ( $\omega = 0.43$ ).



**Fig. 14.** Shape of  $T^3(\theta)$  at an MMO increment-terminating tangent bifurcation point ( $\omega = 0.4269778$ ), which could explain  $[[1^4, 1^5]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times n]_{3n+2}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

在  $m = 2$  的情况下，在产生两种区域之间可以观察到类似的嵌套 MMOIBs。图 15 示出了一个单参数分岔图，该分岔图是用连续变形法从右向左追踪得到的。然而，在这种情况下，在图中只能看到有限数量的 MMOIB 生成的 MMOs。（在图中标记为“有限”）。然而，这并不意味着只有少数这种类型的 MMOIBs 发生。图 16 显示了在 MMO 增量终止切分点处获得的  $T^4$  图的形状。由于连续的 MMOIB 序列以  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$  序列的出现而终止，因此对于  $\omega = 0.4213724$ ， $T^4$  在四个点与对角线相切，这表明有许多连续的  $[A_{12}, B_{12} \times n]$  序列发生。同样的，在图中只有有限数量的 MMOIB 出现。图 15 出于同样的原因，当使用连续变形方法时，出现不是由 MMOIBs 引起的 MMOs。捕获图中未见的 MMOs。在图 15 中我们没有使用连续变形方法，而是将初始点设为一个固定值，其中  $T(q)$  是  $T$  的极值。众所周知，在只包括一个极值的简单一维映射中，如 logistic 映射，离开极值的解变成吸引子。因此，我们期望  $T$  的解在不变区间内收敛到吸引子（MMOIB 生成的 MMO 序列）因为很难。在实践中，对于  $\omega$  的每一个值，将初始点设为  $\theta_0 = q$ ，我们取而代之的是初始点  $\theta_0 = q$ ，其中  $T(q)$  是极值在 MMO 增量终止切线分叉点 ( $\omega = 0.4213724$ ) 处，以创建如图所示的单参数分岔图。图 17(b). 为了比较图 17(a) 展示出了图 1 的放大视图图 15。从图中可以看出 17(b)，如果初始点固定在  $T$  的极值附近，则会出现许多连续的 MMOIB 生成的 MMOs。

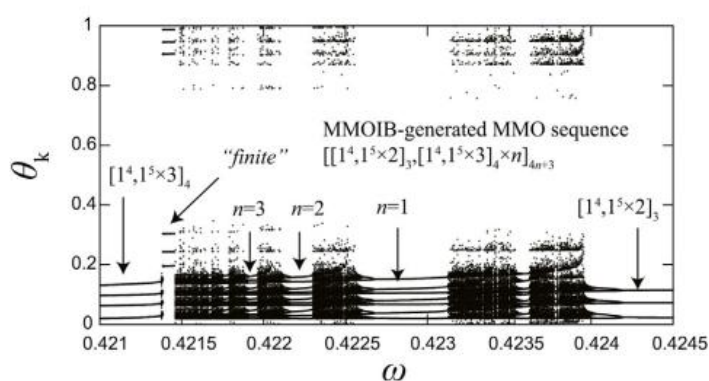
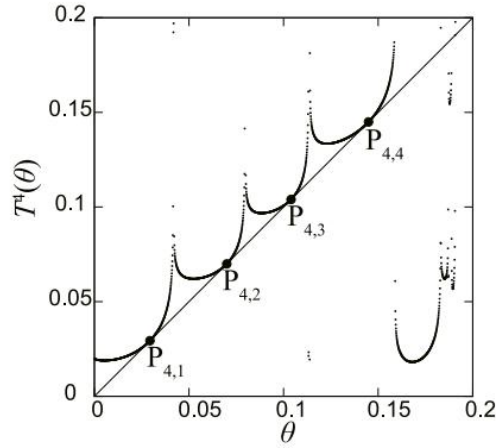


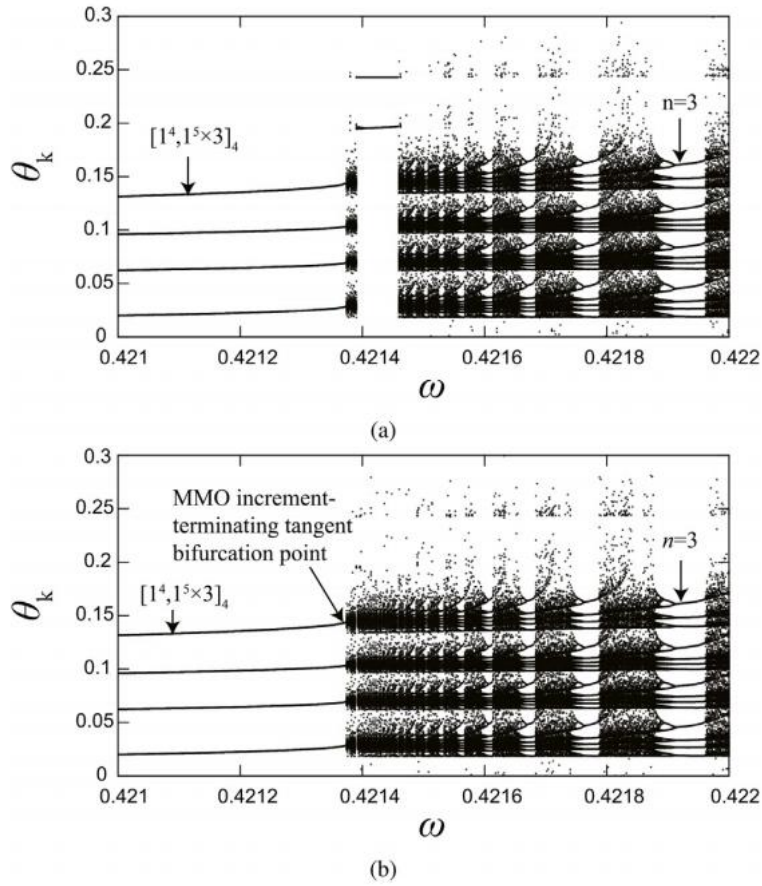
Fig. 15. One-parameter bifurcation diagram between the  $[1^4, 1^5 \times 2]_3$ - and  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$ -generating regions, obtained using a continuous deformation method by tracing the bifurcation parameter  $\omega$  from right to left. Here, we can see a finite number of nested MMOIB-generated MMOs.

图 18 示出对应于图 15 和 17(b) 中的  $[A_{12}, B_{12} \times n]$  在平面中嵌套的 MMOIBs 生成的 MMO 轨迹。在图 2 和图 5, 我们看到连续的] 出现简单的（非嵌套的）MMOIBs。我们的数值结果明显表明，嵌套 MMOIB 生成的 MMO 序列出现在  $[1^4, 1^5 \times m]_{m+1}$  - 和  $[1^4, 1^5 \times m]_{m+2}$  - 之间的连续  $n$  和整数  $m$  上。

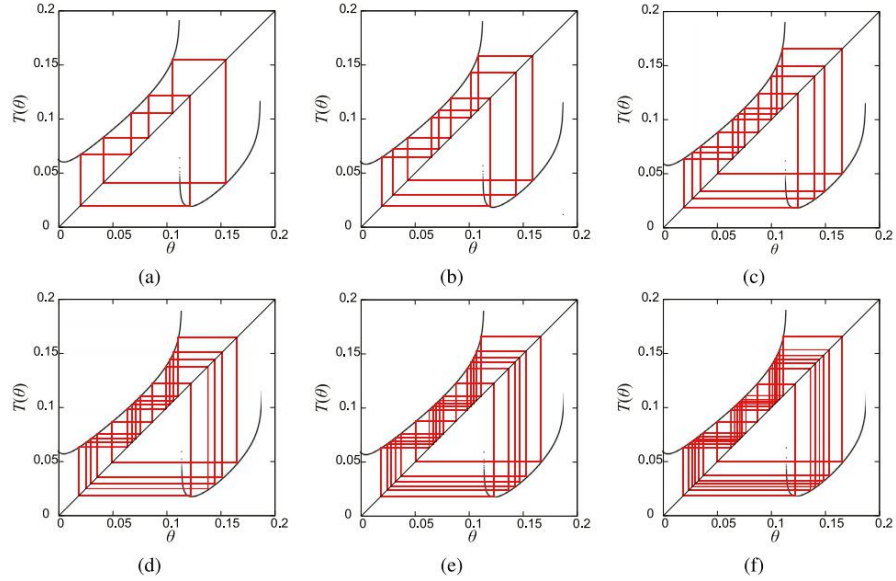




**Fig. 16.** Shape of  $T^4(\theta)$  at an MMO increment-terminating tangent bifurcation point ( $\omega = 0.4213724$ ) that could explain  $[[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_4 \times n]_{4n+3}$  as  $n \rightarrow \infty$ .



**Fig. 17.** Magnified view of the one-parameter bifurcation diagram shown in Fig. 15 between the  $[1^4, 1^5 \times 2]_3$ - and  $[1^4, 1^5 \times 3]_4$ -generating regions, showing nested MMOIB-generated MMOs. Here, (a) was obtained by tracing from right to left using a continuous deformation method, while (b) was obtained using the fixed initial condition  $\theta_0 = q$  with  $\omega = 0.4213742$  and shows successive nested MMOIB-generated MMOs.



**Fig. 18.** Trajectories of the nested MMOIB-generated  $[[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_4 \times n]_{4n+3}$  MMOs, for the cases (a)  $n = 1$  (period 7,  $\omega = 0.423$ ), (b)  $n = 2$  (period 11,  $\omega = 0.4222$ ), (c)  $n = 3$  (period 15,  $\omega = 0.42196$ ), (d)  $n = 4$  (period 19,  $\omega = 0.42178$ ), (e)  $n = 5$  (period 23,  $\omega = 0.42168$ ), and (f)  $n = 6$  (with period 27,  $\omega = 0.42161$ ).

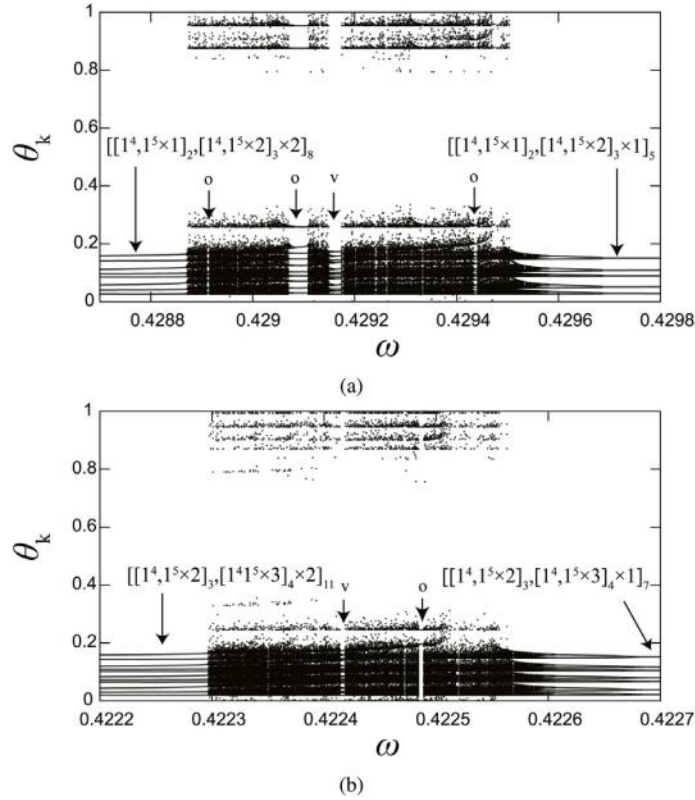
## 5 双嵌套 MMOIBs 与非对称 Farey 树

到目前为止，我们已经分析了嵌套的 MMOIB 生成的 MMO 序列，其中 A1 和 B1 是相邻序列，用  $[A1, B1 \times n]$  表示。在这一节中，我们证明了一个类似的规则可以应用于这些嵌套序列，即 MMOIBs 可以双重嵌套。对于单嵌套的 MMOIB 生成的 MMO 序列，如果将 1 和 m 分别定义为对应于特定整数 m 和 n 的连续值的值。  $[[1^4, 1^5 \times 1]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2 \times m}]_{(l+2)m+(l+1)} \equiv A2$ ,  $[[1^4, 1^5 \times 1]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2 \times (m+1)}]_{(l+2)(m+1)+(l+1)} \equiv B2$  是相邻的单嵌套 MMO 序列，我们的数值结果强烈地表明 A2, B2 n 型的双嵌套 MMO 序列存在于连续的 n。

具体来说，我们表明  $[[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 1]_5, [[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 2]_8 \times n]_{8n+5}$  序列可以先后出现和消失之间的单独区域生成邻嵌套 MMOIB-generated MMO 序列  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 1]_5$  和  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 2]_8$ 。换句话说，在产生  $A_{21} = [[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 1]_5$  和  $B_{21} = [[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 2]_8$  的区域之间连续出现了许多  $[A_{21}, B_{21} \times n]$  序列。在这个例子中，这些是双重嵌套的 MMOs，即  $l = 1, m = 1$ 。

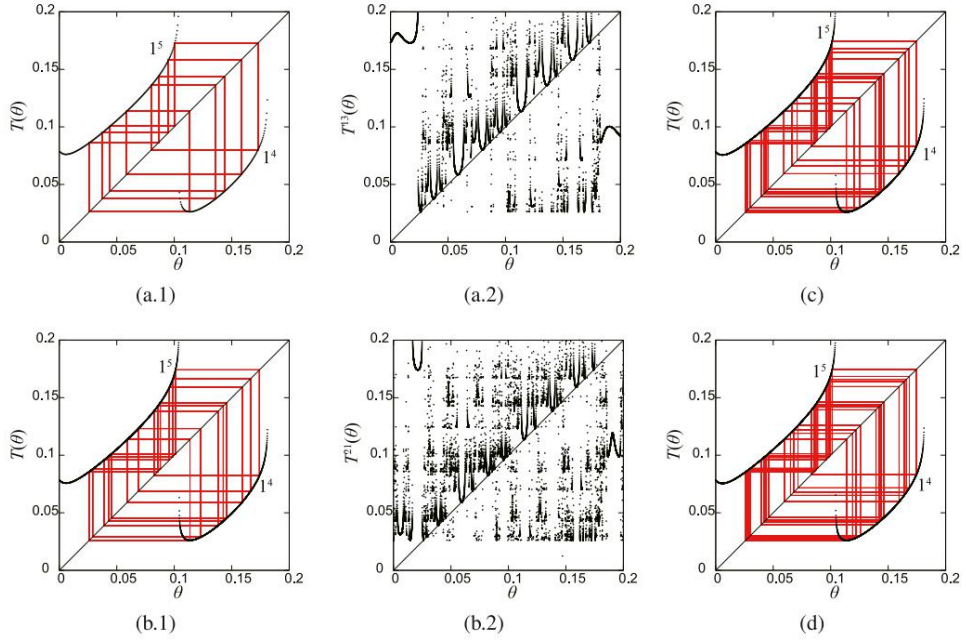
然而，应该注意的是，上面讨论的嵌套 MMOIBs 和双重嵌套的 MMOIBs 之间有一个显著的区别。图 19(a)显示了  $[A_{21}]_5$  和  $[B_{21}]_8$  区域之间的单参数分岔图的

放大图。在这里，标有“o”的 MMO 窗口并不是 MMOIB 生成的，因为它们的一些值都超过了 0.2，也就是说，在 T 的左下角并没有不变的间隔。相比之下，那些标记“v”的是 MMOIB 生成的，尽管它们非常小，我们几乎无法观察到图 19(a) 中的一个。然而，当我们仔细研究单参数分岔图时，我们确实可以发现连续的双嵌套 MMOIB 生成的 MMO 序列。



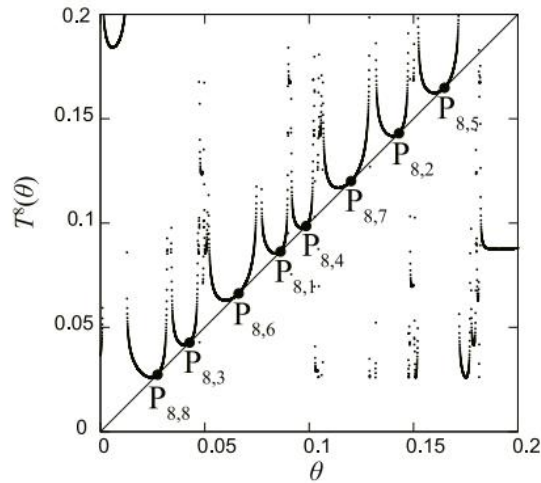
**Fig. 19.** Highly magnified views of the one-parameter bifurcation diagram shown in Fig. 15, between the (a)  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 1]_5$ - and  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 2]_8$ -generating regions and (b)  $[[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_4 \times 2]_{11}$ - and  $[[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_4 \times 2]_{11}$ -generating regions. Here, the sequences  $[[[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 1]_5, [[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 2]_8 \times n]_{8n+5}$  and  $[[[1^4, 1^5 \times 2], [1^4, 1^5 \times 3] \times 1]_7, [[1^4, 1^5 \times 2], [1^4, 1^5 \times 3] \times 2]_{11} \times n]]_{11n+7}$  appear for successive  $n$  in (a) and (b), respectively, even though only one (indicated by “v”) is visible in each diagram.

图 20 显示了几个双嵌套 MMOIB 生成的 MMOs 轨迹。图 20(a.1)和(a.2)分别为 T 的轨迹和  $T^{13}$  在  $n = 1$  时的不变区间( $\omega = 0.42917$ )，图 20(b.1)和(b.2)分别为  $n = 2$  时的不变区间( $\omega = 0.4290065$ )。图 20(a.2)和(b.2)分别为 13 和 21 个不变区间。与图 8 和图 13 所示的简单(未嵌套)和单嵌套 MMOIB 生成的 MMOs 相比，图 20(a.2)和(b.2)所示的双嵌套 mmoib 生成 mmoib 的不变间隔不仅很小，而且它们之间的差距也很大。然而，如果我们仔细研究放大后的单参数分岔图，它们确实一个接一个地出现(图 20(c)和(d))。



**Fig. 20.** Trajectories of the doubly nested MMOIB-generated  $[[[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 1]_5, [[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 2]_{8 \times n}]_{8n+5}$  MMO sequences, for the cases (a.1)  $n = 1$  (period 13,  $\omega = 0.42917$ ), (b.1)  $n = 2$  (period 21,  $\omega = 0.4290065$ ), (c)  $n = 3$  (period 29,  $\omega = 0.42895$ ), and (d)  $n = 4$  (period 37,  $\omega = 0.4289223$ ). Here, (a.2) and (b.2) also show the shapes of  $T^{13}(\theta)$  and  $T^{21}(\theta)$ , respectively.

这些双重嵌套的 MMOIBs 向 MMO 增量终止的切线分岔点聚集，即在 8 个点( $P_{8,1}$ - $P_{8,8}$ )处， $T^8$  与对角线  $T^8(\theta) = \theta$  相切，如图 21 所示。同样，下标 8, k 表示点的顺序，即， $P_{8,k} = T^{k-1}(P_{8,1})$  对于  $k = 2-8$  和  $T(P_{8,8}) = P_{8,1}$ 。值得注意的是，从切线点开始延伸的  $T^8$  分支，如  $P_{8,6}$  和  $P_{8,1}$  之间存在较大的间隙，说明图 19(a)所示的单参数分岔图中很多区域出现了混沌。



**Fig. 21.** Shape of the  $T^8(\theta)$  map at the MMO increment-terminating tangent bifurcation point ( $\omega = 0.4288686$ ) that could explain  $[A_{11}, B_{11} \times n]_{8n+5}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

我们也可以找到双重嵌套 MMOIB 产生的 MMO 的轨迹  $[A_{22}, B_{22} \times n]$ ,  $A_{22} = [[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_{4 \times 1}]_7$  和  $B_{22} = [[1^4, 1^5 \times 2]_3, [1^4, 1^5 \times 3]_{4 \times 2}]_{11}$  相邻单嵌套的



MMO 序列, 见图 19 中的单参数分岔图(b)。在这个例子中, 这些是双重嵌套的 MMOs, 即  $l = 2, m = 1$ 。同样, 双重嵌套 MMOIB 生成的 MMOs 是用“v”表示的, 而那些没有嵌套的 MMOs 则用“o”表示。图 22(a)和(b)显示了  $n = 1$  ( $\omega = 0.4224185$ ) 和  $n = 2$  ( $\omega = 0.42223499$ )时  $\theta_k - \theta_{k+1}$  平面的轨迹。它们向另一个 MMO 增量终止的切线分岔点(图 22(c))累积, 该分岔点在 11 点处与  $\theta = T^{11}(\theta)$ 相切。同理,  $T^{k-1}(P_{11,1}) = P_{11,k}$  当  $k = 2-11$  时,  $T(P_{11,11}) = P_{11,1}$ 。

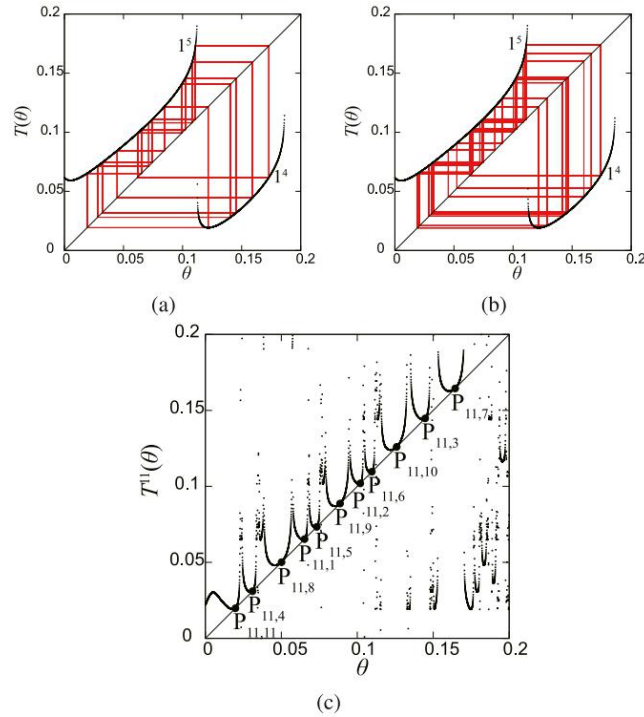


Fig. 22. Trajectories of the doubly nested MMOIB-generated  $[[[1^4, 1^5 \times 2], [1^4, 1^5 \times 3] \times 1]_7, [[1^4, 1^5 \times 2], [1^4, 1^5 \times 3] \times 2]_{11} \times n]_{11n+7}$  MMO sequences, for the cases (a)  $n = 1$  (period 18,  $\omega = 0.4224185$ ) and (b)  $n = 2$  (period 29,  $\omega = 0.42223499$ ). In addition, (c) shows  $T^{11}(\theta)$  at the MMO increment-terminating tangent point ( $\omega = 0.4222962$ ) that could explain  $[A_{22}, B_{22} \times n]_{11n+7}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

对于双重嵌套的情况, 我们已经证实了在  $l = 1, m = 1$  的情况下  $n$  到 4 的结果, 以及在  $l = 2, m = 1$  的情况下  $n$  到 2 的结果, 尽管它们可能会依次出现。当跟踪双重嵌套序列时, 一个问题是很难从  $T$  轨迹中识别它们, 因为如果  $l = 2$  和  $m = 1, n = 2$  时这些已经很长了(周期 29);追踪任何进一步的序列都需要使用动态。另一个问题来自于有限的计算机计算精度。然而, 分段线性技术可能是处理这个问题的一种强大的方法;我们已经在四段分段线性非自治 BVP 振荡器中观察到 MMOIBs[29]。

图 23 显示不对称法里的树木来自我们的数值结果,蓝色的树用  $[A_0, B_0 \times n]$ ,两个绿色的树木用  $[A_{11}, B_{11} \times n]$ 和  $[A_{12}, B_{12} \times n]$ ,和两个粉红色树用  $[A_{21}, B_{21} \times n]$ 和  $[A_{22}, B_{22} \times n]$ 分别代表简单(不嵌套),单独嵌套,和双重嵌套 MMOIB 产生的 MMOs。

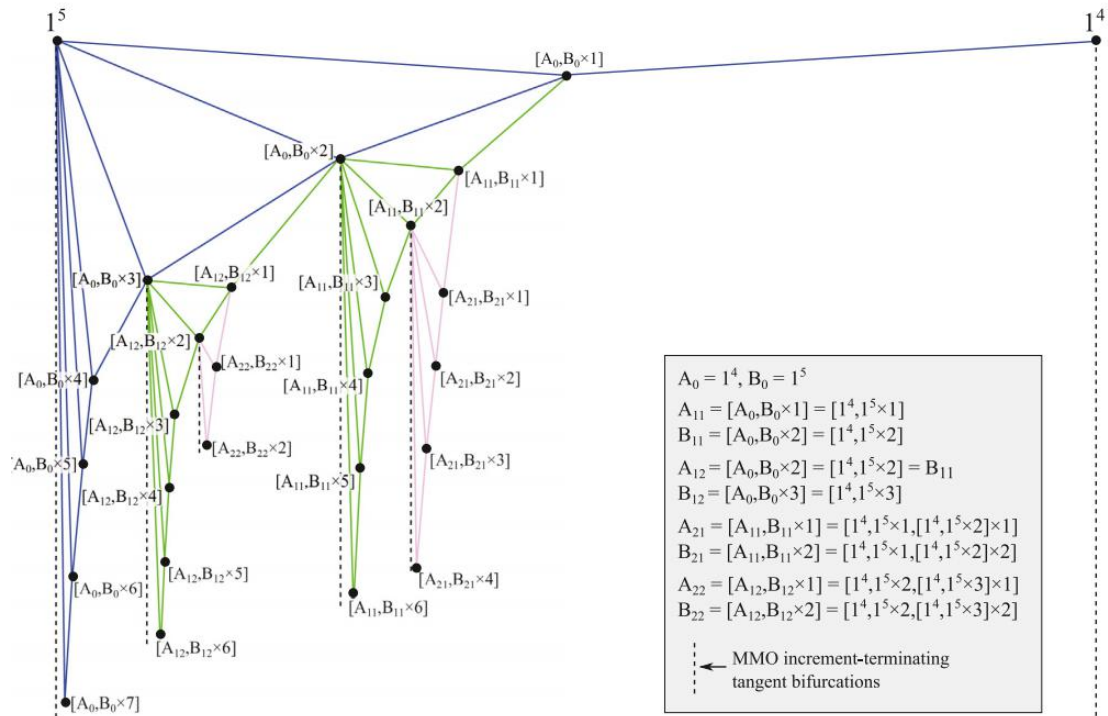


Fig. 23. Asymmetric Farey trees derived from our numerical results.

这些简单的、单嵌套的和双嵌套的 MMOIBs 的生成与 Farey 算法有如下关系。首先，我们用  $L_N$  和  $S_N$  分别表示一个周期内的大振荡和小波峰数。以下参考文献。[14,17]，我们还定义了“发射数” $F = L_N / (L_N + S_N)$ 。然后，我们可以通过以下论点来确认 MMOs 具有 Farey 特征。对于简单的 MMOs,  $F = 1/6$  代表  $1^5$ ,  $F = (n+1)/(6n+5)$  代表  $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$ 。然后，存在一个 MMOIB 生成的 MMO 序列  $[1^4, 1^5 \times (n+1)]_{n+2}$ 。最后，对于双重嵌套的 MMOIBs,  $F = (lm+2m+2l+3)/(6lm+11m+12l+16)$  代表  $[[1^4, 1^5 \times l]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2} \times (m+1)]_{(l+2)(m+1)+(l+1)}$ ， $F = (lmn+2mn+2ln+3n+lm+2m+l+1)/(6lmn+11mn+12ln+16n+6lm+11m+6l+5)$  代表  $[[[1^4, 1^5 \times l]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2} \times m]_{(l+2)m+(l+1)}, [[1^4, 1^5 \times l]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2} \times (m+1)]_{(l+2)(m+1)+(l+1)} \times n]_{(l+2)(m+1)n+(l+1)n+(l+2)m+(l+1)}$ 。这一次，有一个双重嵌套 MMOIB 产生的 MMO 序列  $[[[1^4, 1^5 \times l]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2} \times m]_{(l+2)m+(l+1)}, [[1^4, 1^5 \times l]_{l+1}, [1^4, 1^5 \times (l+1)]_{l+2} \times (m+1)]_{(l+2)(m+1)+(l+1)} \times (n+1)]_{(l+2)(m+1)(n+1)+(l+1)(n+1)+(l+2)m+(l+1)}$ ， $F$  展示在 Box I。

这证实了连续简单、单嵌套和双嵌套 MMOIB 生成 MMOs 的非对称 Farey 特征。

$$\begin{aligned}
F &= \frac{lm(n+1) + 2m(n+1) + 2l(n+1) + 3(n+1) + lm + 2m + l + 1}{6lm(n+1) + 11m(n+1) + 12l(n+1) + 16(n+1) + 6lm + 11m + 6l + 5} \\
&= \frac{lmn + 2mn + 2ln + 3n + 2lm + 4m + 3l + 4}{6lmn + 11mn + 12ln + 16n + 12lm + 22m + 18l + 21} \\
&= \frac{(lm + 2m + 2l + 3) + (lmn + 2mn + 2ln + 3n + lm + 2m + l + 1)}{(6lm + 11m + 12l + 16) + (6lmn + 11mn + 12ln + 16n + 6lm + 11m + 6l + 5)}
\end{aligned}$$

Box 1.

## 6 结论

在本研究中，我们研究了在弱周期扰动下由带二极管的约束 BVP 振荡器产生的嵌套 MMOs。我们从这些动力学中导出了一维 Poincaré 返回映射，并用它们来解释引起各种 MMO 分岔现象的机制。首先，我们证明了包括 MMOIB 产生的 MMOs 在内的不变间隔随着分叉参数的变化而交替出现和消失。这意味着，即使这种 MMO 存在，它们也不一定出现在使用连续变形方法创建的单参数分叉图中。然而，我们也证明，如果选择 Poincaré 返回映射  $T$  的初始值  $\theta_0$ ，使得  $T(\theta_0)$  取一个适当的极值，它们可以被这样的图捕获。本文的主要目的是阐明单嵌套和双嵌套 MMOIB 结构的形成机制。如果我们用  $A_i$  和  $B_j$  表示相邻的 MMO 序列，根据我们的数值结果，我们可以找到尽可能多的单嵌套和双嵌套 MMOIB 生成的 MMOs。这些 MMOIB 序列可以用 MMO 增量终止切分点处的复合映射来解释，连续的 MMOIB 向该切分点增量和累积。然而，我们发现单嵌套和双嵌套 MMOIBs 之间有显著的差异：前者的序列在单参数分叉图中以类似于传统 MMOIBs 的方式出现，而后者的序列更复杂，在分叉图中以非常小的间隔出现。在未来的工作中，我们计划通过使用符号动力学结合分段线性技术来更精确地分析这些嵌套 MMOIB 序列来克服目前研究的精度限制。

## 附录

在本附录中，我们通过将控制方程表示为常微分方程来研究由光滑(经典)和分段光滑的强迫 BVP 振子产生的 MMOIBs。图 24(a)和(b)分别显示了平滑和分段平滑情况下  $g(x)$  的  $v$ - $i$  特性。电路方程可以写成下面两个非自治微分方程：

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - g(x) \\ \dot{y} = -x - k_1 y + B_0 + B_1 \sin \omega \tau \end{cases} \quad (11)$$

其中  $g(x)$  是一个非线性项，可以表示为

$$g(x) = \begin{cases} -x + x^3 & \text{in the smooth case,} \\ -x + x^3 & x < \alpha \\ u(x - \alpha) + (-\alpha + \alpha^3) & x \geq \alpha \end{cases} \quad (12)$$

在分段光滑的情况下，斜率  $u$  是有限的。在本附录中，我们将常量参数设置为相同的值， $\varepsilon = 0.1, k_1 = 0.9, B_0 = 0.207, B_1 = 0.01, \alpha = 0.8$

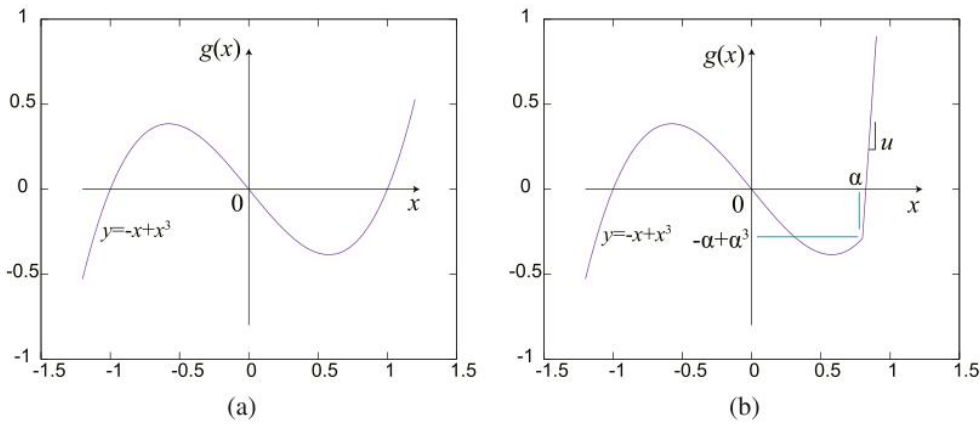


Fig. 24. Characteristics of  $g(x)$  in the (a) smooth and (b) piecewise-smooth cases.

$\Pi$  采用如下公式进行定义：

$$\Pi = \{(\tau, x, y) \mid x = \alpha, y - g(x) < 0 (\dot{x} < 0)\} \quad (13)$$

虽然 stroboscopic  $\Pi$  更便于研究光滑动力学，但我们将重点放在  $\Pi$  上，研究给出的方程(1)、(2)、(3)以及方程(11)和(12)动力学之间的关系。

首先，我们分析方程(11)和(12)在光滑的情况下，图 25(a)示出了  $\Pi$  上的单参数分叉图，该分叉图是通过从右到左的追踪经由连续变形获得的。不幸的是，这里只能观察到两个 MMOIBs，这里将其标记为“ $n = 1$ ”和“ $n = 2$ ”。它们的时间序列波形如图 26 所示。然而，我们仍然相信连续的 MMOIBs 可能会发生，因为它们是迷人的现象，显然有很强的秩序。此前，Scott[17]预测过它们的化学动力学中可能会出现无限序列的 MMOIBs，尽管它们无法从数值上观察到这种连续的 MMOIB 生成的 MMOs。尽管如此，他们的断言可能是正确的，因为 MMOIBs 的发生方式类似于在圆形图中产生的加周期分叉，这一点已经被随后的研究所阐明[7,22-24,29]。



回想一下，当比较图 7(a)和图 10 时，我们可以观察到滞后现象，这是通过连续变形从右向左和从左向右跟踪 $\omega$ 获得的。此外，当使用连续变形方法时，我们无法观察到连续的单嵌套 MMOIBs，如图 15 和 17(a)所示，尽管可以通过将初始条件设置为 $\theta_0 = q$ 来确认这种 MMOIBs 的存在，其中  $T(q)$ 是一维 Poincare 返回图  $T$  的极值。此外，在我们之前的工作[45]中，我们证实了方程(11)和(12)中 $[1^2, 1^3 \times n]_{n+1}$ 连续 MMOIB 生成的 MMOIB 的存在性。通过在没有扰动的前提下将初始条件设置到弛豫振荡路径上的一个点而具有平滑的非线性项，因为当扰动较弱时，这种 MMOs 相对靠近弛豫振荡。尽管这一证据并不那么有力，但我们也成功地从数字上观察到了 50 多个 MMOIBs[27]，在其他研究中，我们能够追踪到所需数量的 MMOIBs[27,45]。也就是说，即使我们将初始条件设置为弛豫振荡路径上的一个点，即  $(\tau_0, x_0, y_0) = (0, 1.12847365485316, 0.30858426904279)$ ，在没有扰动的前提下，我们也无法观察到 $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$ 的 MMOIBs 生产的 MMOs。图 25(b)显示了这些初始条件的单参数分叉图。鉴于这一失败，我们停止尝试观察连续的简单(非嵌套)MMOIBs，因为找到合适的初始条件极其困难。

Bc

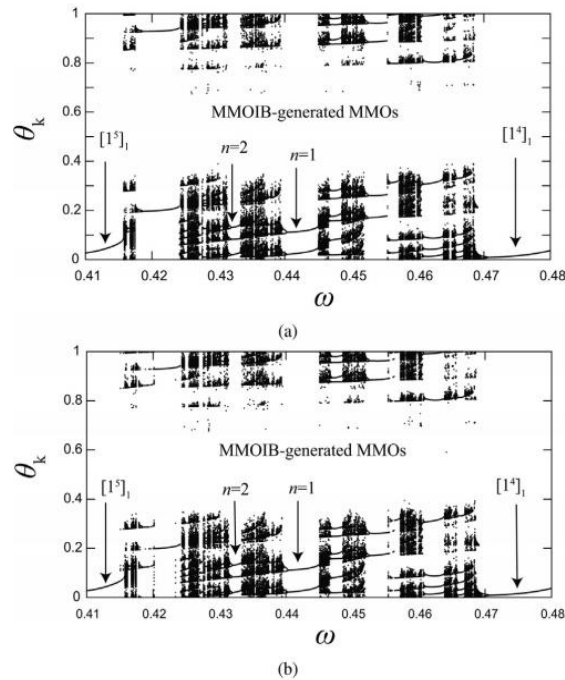


Fig. 25. One-parameter bifurcation diagrams generated in the smooth case using (a) a continuous deformation method and (b) the fixed initial conditions  $(\tau_0, x_0, y_0) = (0, 1.12847365485316, 0.30858426904279)$ , a point on the relaxation oscillation path ( $\dot{x} = 0$  and  $\ddot{x} < 0$ ) with no perturbation applied.

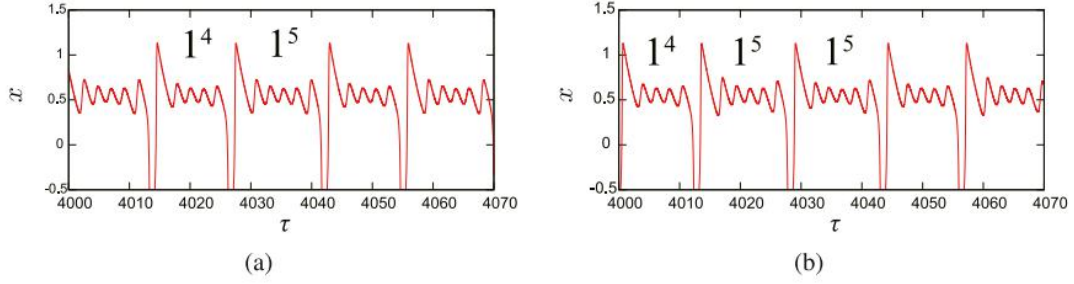


Fig. 26. MMOIB-generated MMOs  $[1^4, 1^5 \times n]_{n+1}$  in the smooth case, for (a)  $n = 1$  with  $\omega = 0.443$  and (b)  $n = 2$  with  $\omega = 0.432$ .

相比之下，我们能够在方程给出的分段光滑常微分方程中观察到简单的(非嵌套的)、单嵌套的和双嵌套的MMOIBs生成的MMOs。此时方程(11)和(12) $u = 100$ 。这里，我们使用显式线性解来获得二极管导通区域的解。图 27(a)和(b)显示了  $\theta_k - \theta_{k+1}$  平面内  $\theta_k = \frac{\omega\tau_k}{2\pi}$  的时间序列波形和曲线，其中  $\tau_k$  是  $\Pi$  上的第  $k$  个时间步长( $k > 600$ )；这些图被称为首次返回图。虽然对于  $u = 100$ ，我们可以观察到图 5 和图 27 之间的定性一致性，但是请注意，我们不能精确地显示指示  $1^4$  和  $1^5$  的一维地图的分支，因为  $\Pi$  上的返回地图被精确地表示为二维地图。

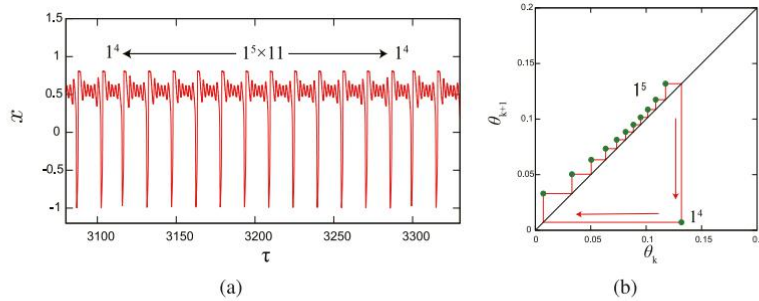
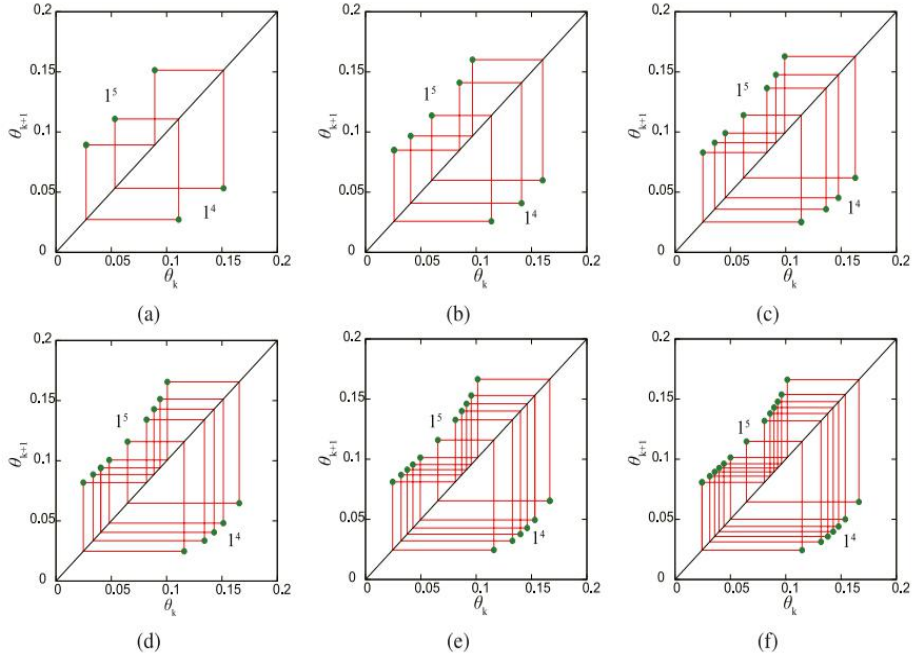
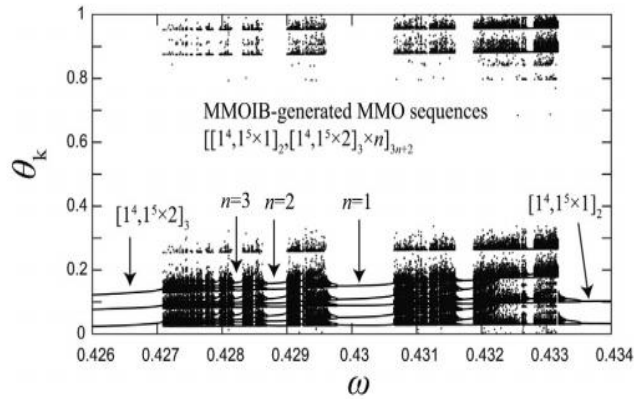


Fig. 27. (a) Time-series waveform for  $[1^4, 1^5 \times 11]_{12}$  in the piecewise-smooth case with  $u = 100$  and  $\omega = 0.4111$ , which emerges after 11 MMOIBs, and (b) the corresponding first return map, showing the trajectory with period 12. These are in qualitatively agreement with Fig. 5(a) and (b), respectively.

幸运的是，我们可以追踪单个嵌套的MMOIBs生成的MMOs，这些MMOs在通过  $m = 1$  和  $u = 100$ (图 28)的连续变形获得的单参数分叉图中与图 11 定性一致。图 29(a)–(f)分别示出了对应于图 12(a)–(f)的  $\theta_k - \theta_{k+1}$  平面中类似的第一返回图和轨迹。

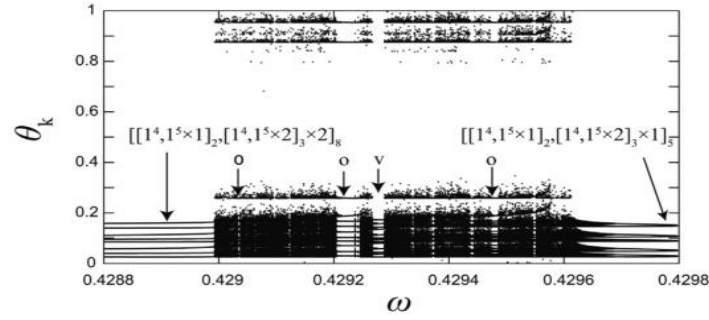


**Fig. 29.** First return maps and trajectories of the singly nested MMOIB-generated  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times n]_{3n+2}$  MMOs in the piecewise-smooth case ( $u = 100$ ) for (a)  $n = 1$  (period 5,  $\omega = 0.4302$ ), (b)  $n = 2$  (period 8,  $\omega = 0.4289$ ), (c)  $n = 3$  (period 11,  $\omega = 0.42827$ ), (d)  $n = 4$  (period 14,  $\omega = 0.42795$ ), (e)  $n = 5$  (period 17,  $\omega = 0.427735$ ), and (f)  $n = 6$  (period 20,  $\omega = 0.4276$ ). These are in qualitative agreement with Fig. 12(a)–(f), respectively.

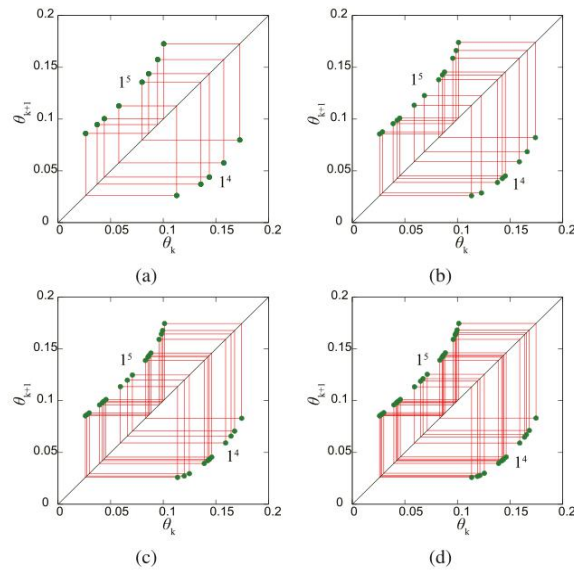


**Fig. 28.** One-parameter bifurcation diagram in the piecewise-smooth case showing singly nested MMOIBs, generated via continuous deformation ( $u = 100$ ). This is in qualitative agreement with Fig. 11.

最后，图 30 和图 31(a)–(d)分别示出了包含双嵌套 MMOIBs 生成的 MMOs 的单参数分叉图以及  $l = 1, m = 1$  的  $\Pi$  上的第一返回图的对应轨迹。这些分别与图 19(a)和 20(a1)、(b1)、(c)和(d)定性一致。在这里，标记为“o”和“v”的 MMO 窗口分别不是 MMOIBs 生成的和 MMOIBs 生成的。即使双嵌套 MMOIBs 生成的 MMOs 出现的区域非常狭窄，但通过仔细观察单参数分叉图，仍然可以依次追踪它们。



**Fig. 30.** Magnified view of the one-parameter bifurcation diagram shown in Fig. 28, between the  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 1]_5$ - and  $[[1^4, 1^5 \times 1]_2, [1^4, 1^5 \times 2]_3 \times 2]_8$ -generating regions. This is in qualitative agreement with Fig. 19(a). Here, the sequence  $[[[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 1]_5, [[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 2]_8 \times n]_{8n+5}$  appears for successive  $n$ , even though only one (indicated by "v") is visible in the diagram, similar to the sequence shown in Fig. 19(a).



**Fig. 31.** First return maps and trajectories of the doubly nested MMOIB-generated  $[[[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 1]_5, [[1^4, 1^5 \times 1], [1^4, 1^5 \times 2] \times 2]_8 \times n]_{8n+5}$  MMOs in the piecewise smooth case ( $u = 100$ ) for (a)  $n = 1$  (period 13,  $\omega = 0.42928$ ), (b)  $n = 2$  (period 21,  $\omega = 0.429124$ ), (c)  $n = 3$  (period 29,  $\omega = 0.4290635$ ), and (d)  $n = 4$  (period 37,  $\omega = 0.4290401$ ). These are in qualitative agreement with Fig. 20(a.1), (b.1), (c) and (d), respectively.

## 参考文献

- [1] R. FitzHugh, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.* 1 (1961) 445–466.
- [2] J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. Inst. Radio Eng.* 50 (1962) 2061–2070.
- [3] T. Nomura, S. Sato, S. Doi, J.P. Segundo, M.D. Stiber, A Bonhoeffer–van der Pol oscillator model of locked and non-locked behaviors of living pacemaker neurons, *Biol. Cybernet.* 69 (1993) 429–437.
- [4] T. Nomura, S. Sato, S. Doi, J.P. Segundo, M.D. Stiber, Global bifurcation structure of a

Bonhoeffer–van der Pol oscillator driven by periodic pulse trains, *Biol. Cybernet.* 72 (1994) 55–67.

[5] S. Sato, S. Doi, Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs, *Math. Biosci.* 112 (1992) 243–259.

[6] S. Doi, S. Sato, The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains, *Math. Biosci.* 125 (1995) 229–250.

[7] T. Kousaka, Y. Ogura, K. Shimizu, H. Asahara, N. Inaba, Analysis of mixed-mode oscillation-incrementing bifurcations generated in a nonautonomous constrained Bonhoeffer–van der Pol oscillator, *Physica D* 353–354 (2017)48–57.

[8] J.L. Hudson, M. Hart, D. Marinko, An experimental study of multiple peak periodic and nonperiodic oscillations in the Belousov–Zhabotinskii reaction, *J. Chem. Phys.* 71 (1979) 1601–1606.

[9] M. Orban, I.R. Epstein, Complex periodic and aperiodic oscillation in the chlorite-thiosulfate reaction, *J. Phys. Chem.* 86 (1982) 3907–3910.

[10] J. Maselko, H.L. Swinney, Complex periodic oscillations and Farey arithmetic in the Belousov–Zhabotinskii reaction, *J. Chem. Phys.* 85 (1986) 6430–6441.

[11] F.N. Albahadily, J. Ringland, M. Schell, Mixed-mode oscillations in an electrochemical system. I. A Farey sequence which does not occur on a torus, *J. Chem. Phys.* 90 (1989) 813–821.

[12] M. Brons, T.J. Kaper, H.G. Rotstein, Introduction to focus issue: Mixed mode oscillations: experiment, computation, and analysis, *Chaos* 18 (2008) 015101.

[13] H.L. Swinney, Observations of order and chaos in nonlinear systems, *Physica D* 7 (1983) 3–15.

[14] V. Petrov, S.K. Scott, K. Showalter, Mixed-mode oscillations in chemical systems, *J. Chem. Phys.* 97 (1992) 6191–6198.

[15] T. Yoshinaga, H. Kawakami, K. Yoshikawa, A circuit metaphor for nonlinear oscillation in a chemical system at a water-oil interface, *IEICE Trans. J71-A* (1988) 1843–1851 (in Japanese).

[16] C. Kuehn, *Multiple Time Scale Dynamics*, Springer International Publishing, 2015.

[17] S.K. Scott, *Chemical Chaos*, Oxford University Press, 1993.

[18] M. Brons, M. Krupa, M. Wechselberger, Mixed mode oscillations due to the generalized canard phenomenon, *Fields Inst. Commun.* 49 (2006) 39–64.

- [19] M. Krupa, N. Popović, N. Kopel, Mixed-mode oscillations in three timescale systems: A prototypical example, *SIAM J. Applied Dyn. Sys.* 7 (2008)361–420.
- [20] G. Markman, K. Bar-Eli, Periodic perturbations of an oscillatory chemical system, *J. Phys. Chem.* 98 (1994) 12248–12254.
- [21] M. Brons, P. Gross, K. Bar-Eli, Circle maps and the devil’s staircase in a periodically perturbed oregonator, *Int. J. Bifurc. Chaos* 7 (1997) 2621–2628.
- [22] A.L. Kawczyński, V.O. Khavrus, P.E. Strizhak, Complex mixed-mode periodic and chaotic oscillations in a simple three-variable model of nonlinear system, *Chaos* 10 (2000) 299–310.
- [23] A.L. Kawczyński, P.E. Strizhak, Period adding and broken farey tree sequence of bifurcations for mixed-mode oscillations and chaos in the simplest three-variable nonlinear system, *J. Chem. Phys.* 112 (2000) 6122–6130.
- [24] M. Rachwalska, A.L. Kawczyński, Period-adding bifurcations in mixed-mode oscillations in the Belousov–Zhabotinsky reactions at various residence times in a CSTR, *J. Phys. Chem.* 105 (2001) 7885–7888.
- [25] M. Sekikawa, N. Inaba, T. Yoshinaga, T. Hikiyama, Period-doubling cascades of canards from the extended Bonhoeffer–van der Pol oscillator, *Phys. Lett. A* 374 (2010) 3745–3751.
- [26] K. Shimizu, M. Sekikawa, N. Inaba, Mixed-mode oscillations and chaos from a simple second-order oscillator under weak periodic perturbation, *Phys. Lett. A* 375 (2011) 1566–1569.
- [27] K. Shimizu, Y. Saito, M. Sekikawa, N. Inaba, Complex mixed-mode oscillations in a Bonhoeffer–van der Pol oscillator under weak periodic perturbation, *Physica D* 241 (2012) 1518–1526.
- [28] K. Shimizu, M. Sekikawa, N. Inaba, Experimental study of complex mixedmode oscillations generated in a Bonhoeffer–van der Pol oscillator under weak periodic perturbation, *Chaos* 25 (2015) 023105.
- [29] K. Shimizu, N. Inaba, Piecewise-linear Bonhoeffer– van der Pol dynamics explaining mixed-mode oscillation-incrementing bifurcations, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2016 (2016) 033A01.
- [30] E. Kutafina, Mixed mode oscillations in the Bonhoeffer–van der Pol os-cillator with weak periodic perturbation, *Comput. Appl. Math.* 34 (2015)81–92.
- [31] P. De Maesschalck, E. Kutafina, N. Popović, Three time-scales in an extended Bonhoeffer–van der Pol oscillator, *J. Dynam. Differential Equations* 26 (2014) 955–987.

- [32] H.G. Rotstein, *Mixed-Mode Oscillations in Single Neurons*, Springer New York, New York, NY, 2013, pp. 1–9.
- [33] J.G. Freire, J.A.C. Gallas, Stern–brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer–van der Pol and the FitzHugh–Nagumo models of excitable systems, *Phys. Lett. A* 375 (2011) 1097–1103.
- [34] J.G. Freire, J.A.C. Gallas, Stern–Brocot trees in the periodicity of mixed-mode oscillations, *Phys. Chem. Chem. Phys.* 13 (2011) 12191–12198.
- [35] M. Desroches, T.J. Kaper, M. Krupa, Mixed-mode bursting oscillations: Dynamics created by a slow passage through spike-adding canard explosion in a square-wave burster, *Chaos* 23 (2013) 046106.
- [36] J. Guckenheimer, C. Scheper, A geometric model for mixed-mode oscillations in a chemical system, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 10 (2011) 92–128.
- [37] M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. Kuehn, H.M. Osinga, M. Wechselberger, Mixed-mode oscillations with multiple time scales, *SIAM Rev.* 54 (2012) 211–288.
- [38] V. Avrutin, M. Schanz, On multi-parametric bifurcations in a scalar piecewise-linear map, *Nonlinearity* 19 (2006) 531–552.
- [39] V. Avrutin, A. Granados, M. Schanz, Sufficient conditions for a period incrementing big bang bifurcation in one-dimensional maps, *Nonlinearity* 24 (2011) 2575.
- [40] A. Granados, L. Alsedà, M. Krupa, The period adding and incrementing bifurcations: from rotation theory to applications, *SIAM Rev.* 59 (2017) 225–292.
- [41] B. Schenke, V. Avrutin, M. Schanz, On a bifurcation structure mimicking period adding, *Proc. Royal Soc. A* 467 (2011) 1503–1518.
- [42] N. Inaba, S. Mori, Chaos via torus breakdown in a piecewise-linear forced van der Pol oscillator with a diode, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 38 (1991) 398–409.
- [43] N. Inaba, S. Mori, Chaotic phenomena in a circuit with a diode due to the change of the oscillation frequency, *IEICE Trans. E* 71 (1988) 842–849.
- [44] H. Takahashi, T. Kousaka, H. Asahara, N. Stankevich, N. Inaba, Mixedmode oscillation-incrementing bifurcations and a devil’s staircase from a nonautonomous, constrained Bonhoeffer–van der Pol oscillator, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2018 (2018) 103A02.
- [45] N. Inaba, H. Ito, K. Shimizu, H. Hikawa, Complete mixed-mode oscillation synchronization

in weakly coupled nonautonomous Bonhoeffer–van der Pol oscillators, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2018 (2018) 063A01.

[46] R. Szalai, H.M. Osinga, Arnol'd tongues arising from a grazing-sliding bifurcation, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* 8 (2009) 1434–1461.

[47] R. Szalai, H.M. Osinga, Invariant polygons in systems with grazing-sliding, *Chaos* 18 (2008) 023121.

[48] Y. Yoshitake, A. Sueoka, H. Tamura, N. Shoji, Vibrations of nonlinear systems with discontinuities (Case of forced self-excited vibration accompanied by dry friction), *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C* 61 (1995) 768–774 (in Japanese).

[49] M. Ohnishi, N. Inaba, Singular bifurcation into instant chaos in a piecewise-linear circuit, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 41 (1994) 433–442.

[50] M. Sekikawa, N. Inaba, T. Tsubouchi, K. Aihara, Analysis of torus breakdown into chaos in a constraint Duffing van der Pol oscillator, *Int. J. Bifurc. Chaos* 18 (2008) 1051–1068.

[51] M. Sekikawa, N. Inaba, T. Tsubouchi, Chaos via duck solution breakdown in a piecewise linear van der Pol oscillator driven by an extremely small periodic perturbation, *Physica D* 194 (2004) 227–249.

[52] T. Matsumoto, L.O. Chua, M. Komuro, The double scroll, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 32 (1985) 798–818.

[53] L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, The double scroll family, Part I and II, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 33 (1986) 1073–1118.

[54] N. Inaba, M. Sekikawa, Chaos disappearance in a piecewise linear Bonhoeffer–van der Pol dynamics with a bistability of stable focus and stable relaxation oscillation under weak periodic perturbation, *Nonlinear Dynam.* 76 (2014) 1711–1723.

[55] P. Collet, J.P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval As Dynamical Systems*, Birkhäuser, Basel, 1980.

[56] R.M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261 (1976) 459–467.

[57] T.Y. Li, J.A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Month.* 82 (1975) 985–992.

[58] Y. Kaznelson, Sigma-finite invariant measures for smooth mapping of the circle, *J. Anal. Math.* 31 (1977) 1–18.



- [59] S. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, E. Siggia, Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems, *PhysicaD* 8 (1983) 303–342.
- [60] K. Kaneko, Supercritical behavior of disordered orbits of a circle, *Progr. Theoret. Phys.* 72 (1984) 1089–1103.