
Principle of neural computation

高维神经模型的数值分岔理论

Numerical bifurcation theory for high-dimensional neural models

The screenshot shows the Springer Open website interface. At the top, there is a navigation bar with the Springer Open logo, a search icon, and links for 'Get published', 'Explore Journals', 'Books', 'About', and 'Login'. Below this is the journal title 'The Journal of Mathematical Neuroscience' and a sub-navigation bar with 'About', 'Articles' (highlighted), 'Collections', and 'Submission Guidelines'. The main content area features the article title 'Numerical Bifurcation Theory for High-Dimensional Neural Models' by Carlo R. Laing, published on 25 July 2014. It includes a 'Download PDF' button, a 'Sections' tab (selected), and a list of sections: 'Abstract', '1 Introduction', and '2 A Low-Dimensional Model'. At the bottom of the article preview, it shows '2991 Accesses | 17 Citations | 1 Altmetric | Metrics'.

原著 Carlo R. Laing

翻译 Song Jian (School of Mathematics in SCUT)

The Journal of Mathematical Neuroscience

journal homepage:

<https://mathematical-neuroscience.springeropen.com/articles/10.1186/2190-8567-4-13>

Author information

Numerical bifurcation theory for high-dimensional neural models

Article history:

Published: 25 July 2014

CarloR.Laing^a

AFFILIATIONS

^aSchool of Natural and Computational Sciences, Massey University, Private Bag 102-904 North Shore Mail Centre, Auckland, New Zealand

摘要【ABSTRACT】

数值分岔理论涉及在参数变化时寻找并跟踪微分方程的某些类型的解，并确定它们是否发生了任何分岔（行为的定性变化）。做到这一点的主要技术是数值延续，即感兴趣的解满足一组参数化的代数方程，并随着参数的变化跟踪解的分支。做到这一点的一个有效方法是使用伪长度延续。我们介绍了伪长度延续法，然后展示了它在研究计算神经科学领域的一些模型的行为中的应用。我们考虑的模型是高维的，因为它们是由神经场模型的非局部微分方程离散化产生的，用于模拟大脑皮层的宏观模式形成。我们在一个空间维度上考虑静止和移动的模式，然后在两个空间维度上考虑平移的模式。我们讨论了文献中的各种结果，并给出了该技术的一些扩展。

Keywords: Pseudo-arclength · Continuation · Bifurcation · Neural field

文章导航

1 引言 [INTRODUCTION]	5
2 一个低维模型 [A Low-Dimensional Model]	6
3 一维模型 [One-Dimensional Models]	8
3.1 静态模式 [Stationary Patterns]	8
3.2 移动模式 [Moving Patterns]	12
4 二维模型 [Two-Dimensional Models]	13
5 扩展 [Extensions]	17
5.1 延迟 [Delays]	17
5.2 全局分叉 [Global Bifurcations]	17
5.3 后分岔 [Following Bifurcations]	19
5.4 映射 [Maps]	21
5.5 周期轨 [Periodic Orbits]	21
5.6 无方程 [Equation-Free]	21
6 结论	23
7 Competing Interests	23
8 Acknowledgements	23
9 参考文献	23

1 引言【INTRODUCTION】

在计算神经科学中出现的许多模型都是这种形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(u; \mu) \quad (1)$$

其中 u 可以是一个有限维矢量或一个函数（例如空间和时间）， μ 是一个参数矢量，导数是关于时间的， t 。在研究（1）形式的模型时，一个雄心勃勃的目标是完全理解其所有解的性质，对于所有可能的 μ 值。通过分析求解（1）可以给我们提供这些信息，但对于许多函数 g 来说，这样的解是不可能找到的。相反，我们必须集中精力寻找关于（1）的解的定性信息，以及它们如何随着参数 μ 的变化而变化。我们想回答的问题包括 (a) 典型的解随着 t 的变化是什么，即神经元或神经系统的稳态行为是什么？(b) 是否存在特殊的初始条件或系统可能处于的状态，在这些条件下的长期行为与典型的初始条件不同？(c) 这些问题的答案如何取决于 μ 的值？更具体地说，如果一个参数（例如，神经元的输入电流）发生变化，（1）的动力学是否会发生质的变化？为了尝试回答这些问题，我们通常集中于（1）的某些类型的解决方案。例如，固定点（即 u 的值使 $g(u; \mu) = 0$ ）、周期性轨道（即在时间上是周期性的解决方案）和（在空间依赖性系统中）模式化状态，如平面和螺旋波。像这样的解决方案可以是稳定的（即在这些解决方案的某个邻近区域的所有初始条件都被吸引到它们身上）或不稳定的（一些邻近的初始条件离开它们的邻近区域）。

对于许多感兴趣的系统，找到上述类型的解及其稳定性，只能用计算机进行数值计算。即使是找到所有不动点的最简单的情况也可能不是平凡的，因为它们可能有很多甚至无限个。当 u 是高维时，例如，当（1）由于离散偏微分方程（如树突或轴突上的索方程）[1,2] 而产生时，为了确定稳定性，对一个不动点进行线性化也可能具有计算上的挑战性。

在最简单的情况下，寻找（1）及其对 μ 的依赖的不动点，主要有两种方法。第一种是从给定初始条件到达到稳态的时间积分。然后 μ 稍加改变，重复此过程。这在概念上是简单的，并且存在许多精确的积分算法，但它有几个缺点：

- 在达到稳定状态之前可能会有一个很长的暂态过程，这需要长时间的模拟。
- 这种方法只能找到稳定的不动点。
- 对于固定的 μ ，可能有多个稳定的不动点，而找到哪一个不动点取决于初始条件的值，其方式可能并不明显。

第二种方法是求（1）及其对 μ 的依赖性，它涉及直接求解代数方程 $g(u; \mu) = 0$ 。一个不动点的稳定性由 g 关于它的线性化决定，包括 g 的偏导数，而不是（1）的时间积分。

数值分岔理论包括（除其他外）通过解决一组代数方程来寻找诸如（1）模型的固定点和周期性轨道，确定这些解决方案的稳定性，并在计算机上跟踪它们的参数变化。这个领域已经发展得很好，有很多书 [3-6] 书中的章节 [7]、报告 [8] 和软件包 [9-14]。本文的重点不在于涵盖一般的数值分岔理论，而是展示和回顾其在计算神经科学领域的一些模型的研究中的应用，特别是那些高维的，由非局部微分方程系统的离散化导致的神经组织的大规模模型，如 Wilson Cowan[15] 和 Amari[16] 模型。我们在第 2 节中首先解释了伪长度延续算法，并展示了如何将其应用于一个简单的模型。第 3 节考虑了一个空间维度上的静止和移动模式，而第 4 节给出了一个空间维度上的模式的例子。第 4 节给出了一个两个空间维度的模式的例子。我们在第 5 节中讨论了一些扩展的问题，并在第 6 节中得出结论。

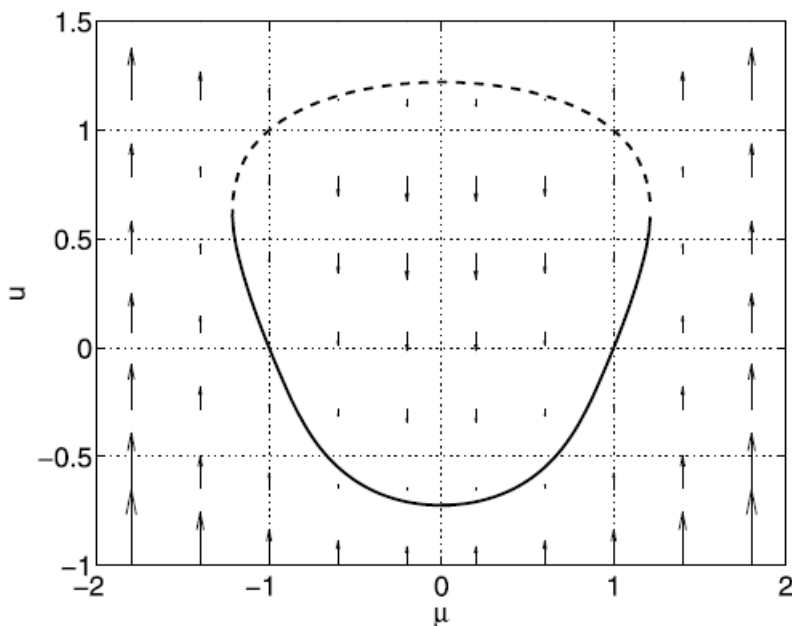
2 一个低维模型 [A Low-Dimensional Model]

作为一个小模型，我们考虑微分方程

$$\frac{du}{dt} = g(u; \mu) \equiv u^4 - u + \mu^2 - 1; \quad u \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (2)$$

并假设我们不能用分析法解决。我们看到，对于大而正的 μ ，或者大而负的 μ ，都没有固定点，因为 du/dt 总是正的。然而，对于足够小的 μ ，可能有固定点。图 1 显示了对 (2) 动力学的完整定性描述，我们看到，对于足够小的 μ ，有两个固定点，一个稳定的，一个不稳定的。我们可以通过对 (2) 进行长时间的数值积分来找到稳定的固定点。(注意，如果我们选择的初始条件太大，这将不起作用)。我们也可以用牛顿方法找到这个固定点，从足够接近它的地方开始。牛顿方法的优点是它的收敛性不取决于固定点的稳定性，因此它也可以用来寻找不稳定的固定点，如果我们开始时足够接近它。(显然，如果我们想找到不稳定的对象，数字积分本身就没有什么用处)。数值延续的基本思想是在参数的一个值上取一个固定点，然后随着参数的变化跟踪这个解，最终追踪出例如图 1 中的封闭曲线。我们还想知道这条曲线上各点的稳定性，这可以在曲线被追踪出来时或之后进行计算。

Fig. 1 Dynamics of (2). The curve of stable fixed points is shown *solid*, while the unstable fixed points are shown *dashed*. Arrows show the direction of solutions for fixed μ



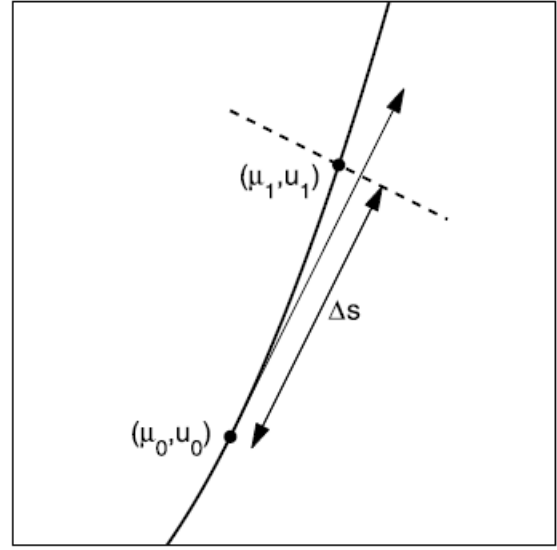
我们采用的方法是伪弓长延拓; 还有其它方法 [4]。在图 1 所示的曲线上给定一个点 (μ_0, u_0) (即 $g(u_0; \mu_0) = 0$)，我们希望找到一个附近的点 (μ_1, u_1) 满足 $g(u_1; \mu_1) = 0$ ，即也在曲线上。我们指定这个点，它不仅满足 $g(u_1; \mu_1) = 0$ ，而且满足

$$(u_1 - u_0)\dot{u}_0 + (\mu_1 - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s = 0, \quad (3)$$

其中 Δs 是所选的伪弧长步长， $(\dot{u}_0, \dot{\mu}_0)$ 是 (μ_0, u_0) 处曲线的切向量，归一化为长度 1。过大表示弧长 s 的差异。几何上，条件 (3) 表示 (μ_1, u_1) 位于垂直于向量 $(\dot{u}_0, \dot{\mu}_0)$ 的线上，向量在最近点处与 (u_0, μ_0) 之间的距离为 Δs 。示意图见图 2。

伪弧长步长 Δs 由用户选择，与许多数值格式一样，存在折衷。使用较小的步长可以更好地覆盖曲线，加快牛顿法 (见下文) 的收敛速度，但需要更多的计算。为了获得 $(\dot{u}_0, \dot{\mu}_0)$ ，我们根据弧长区分 $g(u; \mu) = 0$ ，然

Fig. 2 A schematic showing the relationship expressed by (3). The curve of solutions is *solid*, and the tangent to this curve at (μ_0, u_0) is shown by the *single-headed arrow*. The *dashed line* is at right angles to this tangent



后在 (μ_0, u_0) 处求值:

$$g_u|_{(\mu_0, u_0)} \dot{u}_0 + g_\mu|_{(\mu_0, u_0)} \dot{\mu}_0 = 0, \quad (4)$$

其中下标表示偏导数。然后对其进行归一化处理。为了找到 (u_1, μ_1) , 我们用下面的牛顿迭代法同时解决 $g(u_1; \mu_1) = 0$ 和 (3)。

$$\begin{pmatrix} u_1^{(i)} \\ \mu_1^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(i-1)} \\ \mu_1^{(i-1)} \end{pmatrix} - J_{(i-1)}^{-1} \begin{pmatrix} g(u_1^{(i-1)}, \mu_1^{(i-1)}) \\ (u_1^{(i-1)} - u_0) \dot{u}_0 + (\mu_1^{(i-1)} - \mu_0) \dot{\mu}_0 - \Delta s \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, N_N$, 其中

$$J_{(i)} = \begin{pmatrix} g_u & g_\mu \\ \dot{u}_0 & \dot{\mu}_0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

并在 $(\mu_1^{(i)}, u_1^{(i)})$ 处计算偏导数。我们进行 N_N 的牛顿迭代, (假设 (5) 已经收敛) 设 $(\mu_1, u_1) = (\mu_1^{(N_N)}, u_1^{(N_N)})$ 。作为初始条件, 我们可以取 $(\mu_1^{(0)}, u_1^{(0)}) = (\mu_0 + \dot{\mu}_0 \Delta s, u_0 + \dot{u}_0 \Delta s)$, 即切线与图 2 中虚线的交点。这个点可以被看作是线性预测的结果, 而牛顿方法 (5) 被看作是修正器。固定点 (μ_1, u_1) 的稳定性取决于在这一点上评估的 g_u 的符号, 这已经被计算为 Jacobian J 的左上方条目。

为了找到曲线上的下一个点, (μ_2, u_2) , 我们使用牛顿迭代

$$\begin{pmatrix} u_2^{(i)} \\ \mu_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(i-1)} \\ \mu_2^{(i-1)} \end{pmatrix} - J_{(i-1)}^{-1} \begin{pmatrix} g(u_2^{(i-1)}, \mu_2^{(i-1)}) \\ (u_2^{(i-1)} - u_1) \dot{u}_1 + (\mu_2^{(i-1)} - \mu_1) \dot{\mu}_1 - \Delta s \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$i = 1, 2, \dots, N_N$, 其中雅可比矩阵由 (6) 给出, 偏导数在 $(\mu_2^{(i)}, u_2^{(i)})$ 处求值。切线向量 $(\dot{u}_1, \dot{\mu}_1)$ 可以用 (4) 的类比或近似值来计算

$$\dot{u}_1 \approx \frac{u_1 - u_0}{\Delta s}; \quad \dot{\mu}_1 \approx \frac{\mu_1 - \mu_0}{\Delta s}. \quad (8)$$

然后可以继续这个过程, 在曲线上找到所需的尽可能多的点。注意以下几点:

- 伪长度延续在参数/状态空间中遵循一条解的曲线，并且可以遵循这样的曲线通过鞍节点分叉，即使这样的分叉可以被认为是涉及两个解的湮灭。这是它相对于自然参数延续的主要优势，例如，自然参数延续在这样一个点上失败了 [4, 17]。
- 考虑一下 (5) 中被解决的方程的结构。第一个方程是 $g(u, \mu) = 0$ ，最后一个是伪长度条件。这种结构将在下面的章节中重复出现。
- 如果需要另一个方向的点，只需用其负数替换切向量，即在计算 (μ_1, u_1) 时， (u_0, μ_0) (u_0, μ_0) ，然后继续如上。
- 一个给定的问题可能有位于封闭曲线上的固定点，如图 1，或位于无界曲线上。
- 为了提高算法的效率，可以对该算法做一些改进。例如，我们可以在找到某个精度范围内的解后终止牛顿迭代，而不是在固定的迭代次数后终止 [4]。我们还可以在追踪解曲线的过程中调整步长，以避免牛顿方法的不必要的迭代 [4, 17]。另一个改进是，如果 u 和 μ 的量级非常不同，对其中一个进行缩放可能是有益的。一种方法是将 (3) 替换为

$$\theta^2(u_1 - u_0)\dot{u}_0 + (\mu_1 - \mu_0)\dot{\mu}_0 - \Delta s = 0, \quad (9)$$

在 $0 < \theta \ll 1$ 表示 u 的典型值远大于 μ ， $\theta < 1$ 表示 u 的典型值远大于 μ 。

- 上述算法涉及两个嵌套循环。内环在解的曲线上找到一个点，外环沿着曲线前进。

鼓励感兴趣的读者使用上述方法再现图 1，然后进一步探索。(参见软件 <http://www.massey.ac.nz/~crlaing/-code.htm>。)

3 一维模型 [One-Dimensional Models]

我们现在考虑在一个空间维度的神经场模型中出现的几种类型的模式。这些模型被用来研究宏观模式在皮层的形成，并采取非局部微分方程的形式。有关此类模型的更多背景信息，见 [16,18 -22] 和最近的综述 [23]。我们首先考虑静态模式。

3.1 静态模式 [Stationary Patterns]

考虑一个圆形区域上的典型神经场模型：

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -u(x, t) + \int_{-\pi}^{\pi} w(x - y)f(u(y, t) - h)dy, \quad (10)$$

其中 w 是一个偶函数，并且

$$f(u) = \frac{1}{1 + e^{-\beta u}} \quad (11)$$

是一个 s 型函数，其中 $\beta < 0$ 是陡度参数。变量 $u(x, t)$ 表示位置为 x ，时间为 t 的神经场，表示该点处一群神经元的活动。函数 $w(x - y)$ 表示位于 y 位置的神经元如何影响位于 x 位置的神经元，即网络的连通性。它的均匀性是畴的各向同性的表现，即畴周围没有首选方向。函数 f 被称为触发率函数，将活动 u 转换为触发频率 $f(u)$ ，而 h 是触发阈值。为了具体起见，我们将使用 Mexican-hat 连通性函数

$$w(x) = 10 \exp(-4x^2) - 6 \exp(-x^2); \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (12)$$

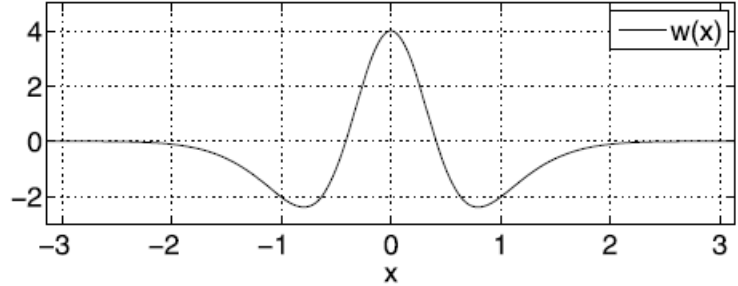
如图 3 所示。(10) 的静态解满足

$$u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} w(x-y)f(u(y)-h)dy, \quad (13)$$

众所周知, 在极限 $\beta \rightarrow \infty$ (即发射速率函数 f 倾向于 Heaviside) 的 h 范围内, 方程 (13) 支持两个碰撞解, 其中一个稳定的, 另一个不稳定的, 在动力学 (10)[16,20]。(这种碰撞解决方案被认为在短期记忆 [24] 中发挥作用。) 随着 h 的增加, 两个碰撞在鞍节点分叉中湮灭。假设我们想研究有限 β 的相同现象, 假设 $\beta = 20$ 。

Fig. 3 The connectivity function

$$w(x) = 10 \exp(-4x^2) - 6 \exp(-x^2)$$



首先要注意的是 (10) 和 (13) 在平移下都是不变的, 即找到 (13) 的一个解 $u(x)$, 任何平移 $u(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$, 也是一个解 [25]。我们只需要从这个无穷解族中选出一个, 所以我们需要一种方法只选出一个。一个简单的方法是只考虑偶数函数, 即 $u(-x) = u(x)$ 的函数。许多方程 (10) 的稳态是偶数, 但不是所有的都是 [26]。

为了表示 $u(x)$ 我们把它展开为傅里叶级数。记住它是一个偶函数

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \cos(ix) \quad (14)$$

函数 $w(x)$ 也是偶函数, 我们把它写成傅里叶级数

$$w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cos(ix) \quad (15)$$

其中 w_i 可以用通常的方法找到: 用 (15) 乘以 $\cos(jx)$, 并对 $[-\pi, \pi]$ 积分。使用恒等式 $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$, 把上面的两个傅里叶级数代入 (10), 与我们找到的项相等

$$\frac{du_j}{dt} = -u_j + w_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jy) f \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \cos(iy) - h \right) dy \quad (16)$$

$j = 0, 1, 2, \dots$, 即无限个常微分方程。它们的稳态满足

$$-u_j + w_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jy) f \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \cos(iy) - h \right) dy = 0 \quad (17)$$

$j = 0, 1, 2, \dots$ 在实践中, 我们只能求解有限个数的 u_j , 比如 N , 所以我们求解

$$-u_j + w_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jy) f \left(\sum_{i=0}^{N-1} u_i \cos(iy) - h \right) dy = 0 \quad (18)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. 注意, 如果 w 是由一个有限的傅里叶级数给出的, 即 $w_i = 0$ 对于 $i < N_F$, 那么在稳态下 $u_i = 0$ 对于 $i < N_F$, 并且 (18) 在 $N-1 = N_F$ 的截断不会引入任何误差, 如许多作者 [27-29] 所指出的。

现在我们展示如何在 h 变化时找到 (18) 的解并跟踪它。设 v 是 N 维的列向量, 其分量为 u_0, u_1, \dots, u_{N-1} 。 N 标量方程 (18) 可以写成向量形式为

$$F(\mathbf{v}, h) = 0 \quad (19)$$

其中, 这个方程的每个分量对应于 (18) 中的一个方程, $F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ 。对于固定的 h , 例如 h_0 , 在某个区间内, 我们期望 (19) 有几个孤立的解。其中一个或多个可能是稳定的, 可以通过向前积分 (10) 得到。(19) 的解也可以用牛顿法求得。假设其中一个解是 v_0 , 我们想找到另一个附近的解, (\mathbf{v}_1, h_1) , 满足 (19)。与 (3) 相似的伪弧长条件为

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)^T \dot{\mathbf{v}}_0 + (h_1 - h_0) \dot{h}_0 - \Delta s = 0 \quad (20)$$

上标 t 表示转置。这只是说明 (\mathbf{v}_1, h_1) 位于垂直于向量 (\dot{v}_0, \dot{h}_0) 的超平面上, 它的最近点是 Δs 到 Δs from (v_0, h_0) 的距离。类似于 (4), 我们看到 $(N+1)$ 维列向量

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{h}_0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

是 $N \times (N+1)$ 矩阵 $(F_v | F_h)$ 的空向量, 其中下标表示偏导数 (即 F_v 是 F 相对于 \mathbf{v} 的 N 次方 Jacobian, F_h 是相对于 h , 这些导数在 (\mathbf{v}_0, h_0) 进行评价。因此, 一旦找到 (21) 的矢量并将其归一化, 就可以用于 (20)。我们用 (5) 的类似方法同时解决 $F(\mathbf{v}_1, h_1) = 0$ 和 (20), 即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^{(i)} \\ h_1^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^{(i-1)} \\ h_1^{(i-1)} \end{pmatrix} - J_{(i-1)}^{-1} \begin{pmatrix} F(\mathbf{v}_1^{(i-1)}, h_1^{(i-1)}) \\ (\mathbf{v}_1^{(i-1)} - \mathbf{v}_0)^T \dot{\mathbf{v}}_0 + (h_1^{(i-1)} - h_0) \dot{h}_0 - \Delta s \end{pmatrix} \quad (22)$$

$i = 1, 2, \dots, N_N$, 其中

$$J_{(i)} = \begin{pmatrix} F_v & F_h \\ \dot{\mathbf{v}}_0 & \dot{h}_0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

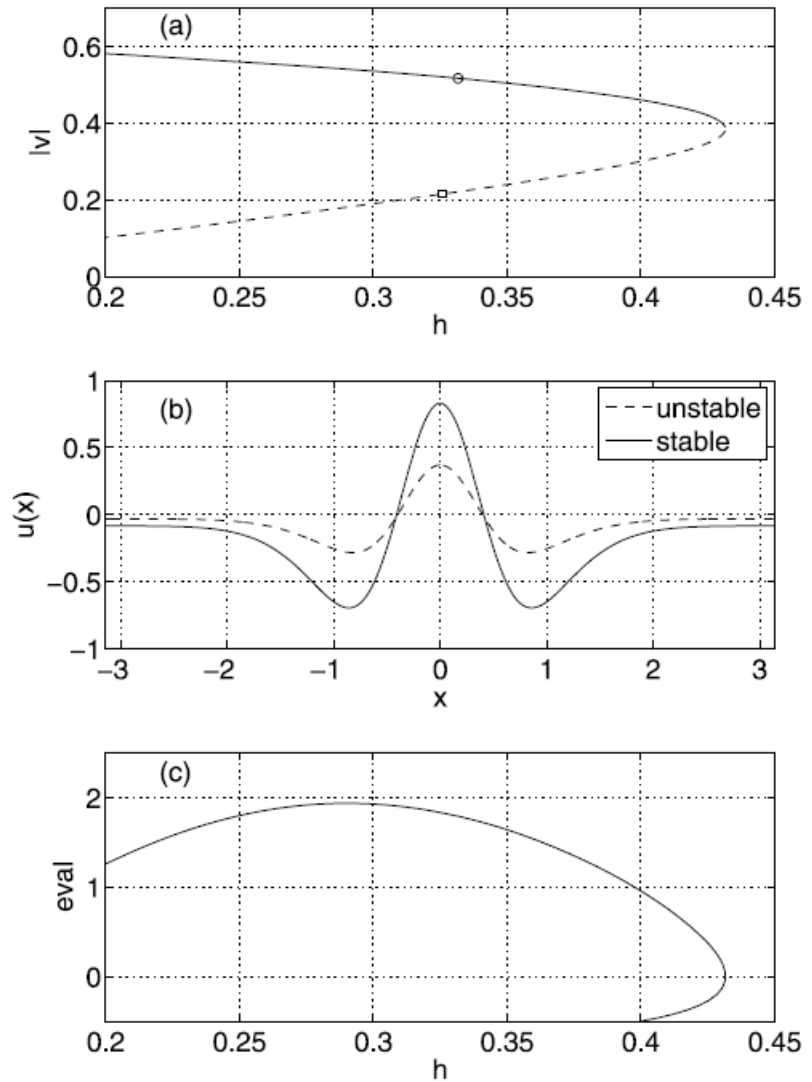
是增殖系统的 $(N+1) \times (N+1)$ Jacobian, 偏导数在 $(\mathbf{v}_1^{(i)}, h_1^{(i)})$ 处求值。如上所述, 我们进行了 N_N 的牛顿迭代, (假设 (22) 已经收敛了), 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^{(N_N)}$, $h_1 = h_1^{(N_N)}$ 。作为初始条件, 我们可以取 $\mathbf{v}_1^{(0)} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{v}}_0 \Delta s$ 和 $h_1^{(0)} = h_0 + \dot{h}_0 \Delta s$ 。不动点 (\mathbf{v}_1, h_1) 的稳定性取决于在该点处计算的 F_v 的特征值, 并且该矩阵已被计算为雅可比矩阵 J 中的左上 $N \times N$ 块。我们找到下一个解 (\mathbf{v}_2, h_2) 的方式与第 2 节中完全相同。如果需要, 也可以使用近似值 (8)。

随着 h 的变化, (19) 的下列溶液的结果如图 4 所示。在上图中, 我们看到稳定和不稳定的溶液随着 h 的增加而相互湮灭, 正如预期的那样。代表性的解决方案显示在面板 (b) 中, 与解决方案稳定性相关的最正特征值显示在面板 (c) 中。请注意, 与 (10) 解的平移不变性相关的零特征值并未出现, 因为我们选择只考虑偶数函数时, 零特征值已被移除。计算是在 $N = 15$ 的情况下进行的, 并且 (18) 中的积分是使用梯形规则进行的, 该规则在周期域上非常精确 [30]。

在本节结束时, 应提出以下几点:

- 使用傅里叶级数离散 (10) 的另一种选择是使用均匀网格直接离散空间域 $[-\pi, \pi]$ 。(10) 中的积分可以用梯形法则求值。另外, 由于积分是一个卷积, 它可以使用快速傅里叶变换和频率空间的乘法来有效地评估。使用这种类型的离散化仍然可以直接限制为偶函数。本质上, 我们只对定义域 $([\pi, 0])$ 的一半上定义的函数工作, 并在必要时施加均匀性。

Fig. 4 (a) Solutions of (19). The norm of v is plotted vertically; *solid curve* indicates stable solutions, *dashed* unstable. (b) Even solutions of (13) at the two points indicated in panel (a). (c) Most positive eigenvalue associated with solutions of (19). Parameters: $N = 15$, $\beta = 20$



- 如上所述, 我们只能找到偶解, 并且只能确定相对于同样是偶的扰动的稳定性。因此, 我们将不会发现导致解不均匀的任何分岔。
- 如果我们对非偶解感兴趣, 我们可以在 (14) 中加入正弦项, 代入 (10), 并推导出控制其系数演化的微分方程。然后我们就得想办法去除掉解的平移不变性。
- 系统的对称性 (即对群体行动的不变性) 与从连续相关解族中选择解的方法之间的关系在 [25,31] 中得到了更详细的讨论。
- 其他几篇处理不同背景下高维问题的延续性的文献是 [32-35]。

现在我们考虑一个空间维度中的移动模式。

3.2 移动模式 [Moving Patterns]

让我们再次考虑这个模型

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)f(u(y,t)-h)dy \quad (24)$$

f 由 (11) 给出, 但现在有了耦合函数

$$w(x) = (1/2)e^{-|x|} \quad (25)$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$, 我们看到 (24) 的空间均匀稳态满足

$$u = f(u-h) \quad (26)$$

将 u 和 $f(u-h)$ 对几个 h 的值画在同一个图上, 如图 5 所示, 我们可以看到, 对于中等的 h , 存在三个这样的稳态, 但如果 $|h|$ 太大, 则只存在一个稳态。让我们选择一个 h 的值, 使其存在三个稳态, $u_1 < u_2 < u_3$, 并将部分域初始化为 $u = u_1$, 其余为 $u = u_3$ 。这样, 我们就可以看到图 6 中的行为, 即, 形成了一个连接这两个稳定状态的锋面, 并以恒定的速度朝增加 x 的方向移动。我们想要找到这个正面的形状, 以及它的属性 (速度, stability) 如何依赖于一个参数, 比如 h 。

要使用上面的思想, 我们需要用公式表示一个 (或多个) 代数方程。我们以与前方相同的速度移动到一个移动坐标系。令 $\xi = x - ct$, 方程 (24) 变成

$$\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = c \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi} - u(\xi,t) + \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi-y)f(u(y,t)-h)dy. \quad (27)$$

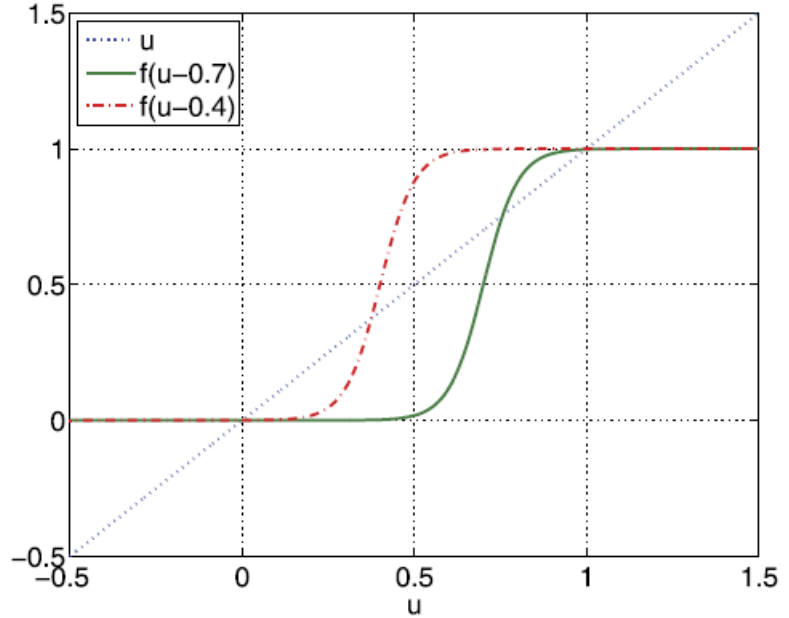
如果 c 是前端的速度, 则前端在 (ξ, t) 坐标系中是静止的, 即满足

$$0 = c \frac{du}{d\xi} - u + \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi-y)f(u(y)-h)dy. \quad (28)$$

解决 (28) 的一个自然方法是截断定域, 然后使用 N 个等间距的网格点将其离散。积分的计算方法见 3.1 节, 空间导数采用有限差分或快速傅里叶变换 [30]。然而, 实施 (28) 在每个网格点会给 N 方程, 但有 $N+1$ 未知数, 即你在每个网格点的值, 速度和 c 。这只是反映了这一事实 (24) 平移不变的, 因此有一个连续的家人面前的解决方案满足 (28), 通过简单的翻译就能彼此不同。正如 3.1 节所述, 我们需要一种方法来选择其中之一。实现这一点的一个简单方法是施加固定条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u - \hat{u})\hat{u}_\xi d\xi = 0 \quad (29)$$

Fig. 5 Solutions of (26) occur when the function $f(u-h)$ intersects the diagonal, where f is given by (11) and $\beta = 20$



其中 \hat{u} 是一个模板函数。方程 (29) 是使 u 和 \hat{u} [36,37] 之间的差值 L^2 范数最小化的结果，因此 \hat{u} 应该与我们试图找到的解有点相似。因此，我们可以同时求解 (28) 和 (29)，每个网格点的速度为 u ，速度为 c 。令 \mathbf{v} 为 $(N+1)$ 维列向量，其 $(N+1)$ 第一个分量为 u ，其 $(N+1)$ 第二个分量为 c ，则方程 (28) 和 (29) 可写成

$$F(\mathbf{v}, h) = 0, \quad (30)$$

其中， $F: \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ 。只要加上 (20) 这样的伪弧长条件，就可以得到 $N+2$ 方程组的解，如 3.1 节所示。为了用这种方法找到在 c 的特定值处的前端的稳定性，我们需要找到关于前端线性化 (28) 的所有特征值。在增广系统的雅可比矩阵中，线性化表现为左上角的 $N \times N$ 块。注意这个线性化有一个零特征值特征向量等于 (离散的) 空间导数， $\partial u / \partial \xi$ 。前端的稳定性是由特征值决定的，而不是这个。(在原始系统中，即非离散系统中，波的稳定性涉及到确定一个连续谱 [38]，我们找到的离散特征值集是它的近似。

随着 h 的变化，跟随前面的结果如图 7 所示。我们在 $[0, 50]$ 的域中使用了 1000 个均匀间隔的点，模板函数是 $\hat{u}(\xi) = 0.5(1 + \tanh(25 - \xi))$ 。我们看到，对于 h 值的范围存在一个稳定前端，它的速度可能是正的，负的或零，取决于 h 的值。当空间均匀稳定态发生鞍点分岔时， h 与 $h = 0.5$ 相差太远，即稳定前沿只存在两个空间均匀稳定状态，且两个稳定状态相互连接时才存在。(在每个不稳定的分支上都发现了一些点后，就停止了继续。) 虽然我们只考虑了一个前端解决方案，但本节中描述的技术可以用于跟踪其他移动模式，如凸点或脉冲 [27,28,37,39,40]。我们现在考虑二维空间的解。

4 二维模型 [Two-Dimensional Models]

我们考虑这个模型

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = A \int_0^L \int_0^L w(x-x', y-y') f(u(x', y', t) - h) dx' dy' - u(x, y, t) - a(x, y, t) \quad (31)$$

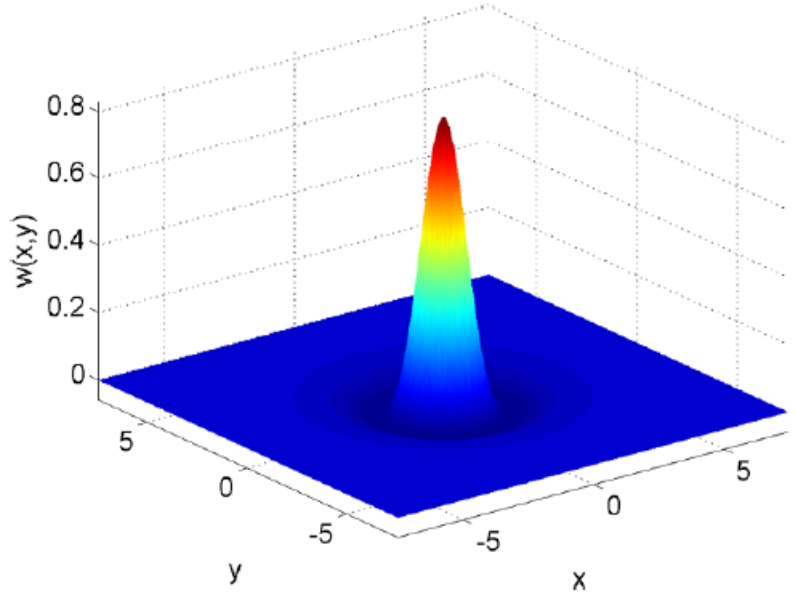
$$\tau \frac{\partial a(x, y, t)}{\partial t} = Bu(x, y, t) - a(x, y, t) \quad (32)$$

定义在方域 $[0, L]^2$ 上, 具有 x 和 y 的周期边界条件。除了活动变量 u 之外, 我们还有一个“恢复”(或“适应”)变量 a , 它由 u 驱动, 在时间尺度上强度为 B 。放电速率函数由 (11) 给出, 我们用

$$w(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)) - 0.17 \exp(-0.2(x^2 + y^2)) \quad (33)$$

即墨西哥帽连通, 如图 8 所示。当 $a = B = 0$ 时, 式 (31)(32) 能够支持空间局部的“凸点”解, 当 a 的影响足够强时(即 B 从 0 增加), 这些凸点以恒定的速度运动。图 9 显示了一个例子。肿块以恒定速度向左移动(即在负 x 方向)。 u 和 a 字段都有一个峰值, a 的最大值稍晚于 u 。我们想找到这个碰撞对模型中各种参数的依赖关系。

Fig. 8 The Mexican-hat coupling function (33)



第一步是移动到一个移动坐标系中, 其中凹凸是固定的, 如 3.2 节所示。原则上, bump 可以朝任何方向移动, 但我们指定它是朝负 x 方向移动。让 $(xi) = x + ct$ (31) - (32) 变成

$$\frac{\partial u(\xi, y, t)}{\partial t} = A \int_0^L \int_0^L w(\xi - x', y - y') f(u(x', y', t) - h) dx' dy' - u(\xi, y, t) - a(\xi, y, t) - c \frac{\partial u(\xi, y, t)}{\partial \xi}, \quad (34)$$

$$\tau \frac{\partial a(\xi, y, t)}{\partial t} = Bu(\xi, y, t) - a(\xi, y, t) - c\tau \frac{\partial u(\xi, y, t)}{\partial \xi}, \quad (35)$$

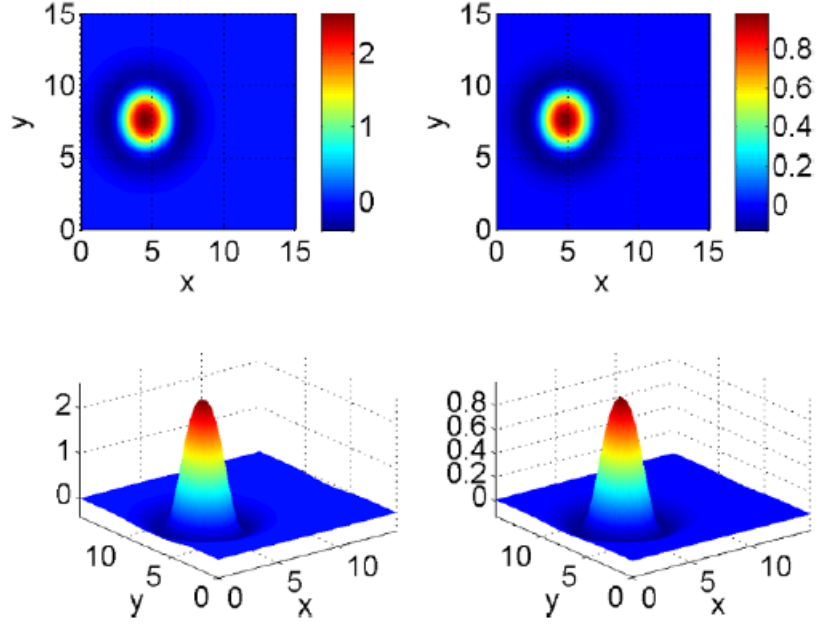
如果 $c(> 0)$ 是凸点的速度, 则它是 (34)-(35) 的一个平稳解, 即满足

$$0 = A \int_0^L \int_0^L w(\xi - x', y - y') f(u(x', y') - h) dx' dy' - u(\xi, y) - a(\xi, y) - c \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi} \quad (36)$$

$$0 = Bu(\xi, y) - a(\xi, y) - c\tau \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi} \quad (37)$$

现在 (36)-(37) 的任何解都可以在 ξ 或 y 方向上被任意的量转换, 所以我们需要去除这些简并。我们首先要求解是关于 $y = L/2$ 对称的, 即 $u(\xi, y - L/2) = u(\xi, L/2 - y)$, 同样对于 a 。然后, 我们施加一个标量条件, 它消除了关于 ξ 方向上的平移的不变性。有许多方法可以做到这一点, 但一个简单而可靠的方法是指定域中心

Fig. 9 Leftward-moving bump solutions of (31)–(32). *Left column: u , right column: a .* Parameters: $L = 15$, $A = 2$, $\beta = 5$, $h = 0.8$, $B = 0.4$, $\tau = 3$



u 的值等于它在 $y = L/2$ 上的平均值，即

$$u(L/2, L/2) - \frac{1}{L} \int_0^L u(\xi, L/2) d\xi = 0 \quad (38)$$

(也可以使用类似于 (29) 的条件，施加于 $y = L/2$ 。注意，由于 (36)-(37) 的解在两个方向的平移下是不变的，我们需要施加两个条件来消除这些简并。我们离散在两个方向上具有 N 等间距的点的方域。使 (36) 和 (37) 满足于每一个 N^2 点，得到 $2n^2$ 方程，与 (38) 结合，得到 $2n^2 + 1$ 方程和相同数目的未知数。这些方程可以写成这样的形式

$$F(\mathbf{v}, \lambda) = 0, \quad (39)$$

其中 $F: \mathbb{R}^{2N^2+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N^2+1}$ ， λ 是系统的一个参数。在 (39) 中加入一个伪长度条件，就可以随着 λ 的变化而得到解决。(注意 (39) 通常是一个非常大的方程组，见下文)。典型的结果显示在图 10 中，我们改变 A 。当 A 过大或过小时，一个稳定的凸点在鞍节点分岔中被破坏。(在发现每个不稳定分支上的一些点后，继续进行的过程被停止)。

注意以下几点:

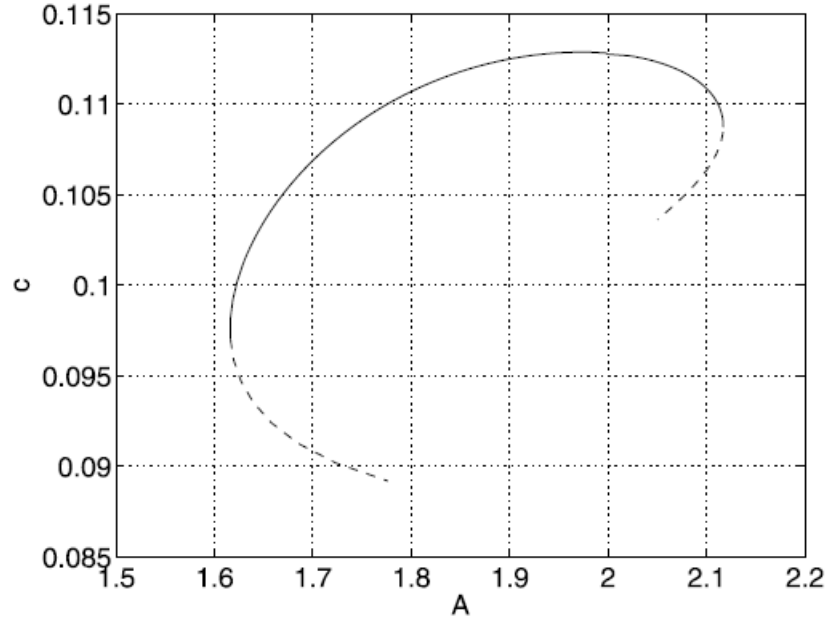
- (36) 中的卷积使用二维快速傅里叶变换 (FFT) 进行计算，即取 w 和 $f(u - h)$ 的 FFT(离散)，将它们相乘，然后取反 FFT。偏导数的计算使用有限差分近似，但也可以使用 FFT[30] 实现。
- 让我们给 (39) 附加一个伪长度条件，并通过连接 \mathbf{v} 和 λ 定义一个向量 $V \in \mathbb{R}^{2N^2+2}$ 之间。得到的方程组可以写成 $G(\mathbf{V}) = 0$ 。给定 (39) 的解，沿着这条曲线找到下一个点等于用牛顿法解 $G(\mathbf{V}) = 0$ ，即迭代

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n - J^{-1}G(\mathbf{V}_n); \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

其中 J 是 G 的雅可比矩阵，在 \mathbf{V}_n 处求值。对于一个合理的离散化，需要一个很大的 N 值，因此 J 将太大而不能存储，更不用说倒置了，所以我们将 (40) 写成

$$J\Delta_n = G(\mathbf{V}_n), \quad (41)$$

Fig. 10 Speed of a two-dimensional bump, c , as a function of A . *Solid*: stable, *dashed*: unstable. Parameters: $L = 15$, $\beta = 5$, $h = 0.8$, $B = 0.4$, $\tau = 3$, $N = 256$



其中 $\Delta_n = V_n - V_{n+1}$ 。这是一个未知数 Δ_n 的线性方程，但我们可以用 GMRES 算法 [41,42] 来代替直接求解它。GMRES 算法的一些实现，例如在 Matlab 中的实现，不需要明确地形成 Jacobian J ，只需要评估 J 与任意向量 ϕ 的乘积。对于一般的问题，这可以通过对 G 的一个额外评估，用有限差分近似的方式，以无矩阵的方式完成

$$J\phi \approx \frac{G(\mathbf{V}_n + \epsilon\phi) - G(\mathbf{V}_n)}{\epsilon}, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (42)$$

类似地，我们需要 J 的特征值，或者至少是一些具有最大实部的特征值，来确定稳定性。Matlab 中的 `eigs` 函数不需要 J ，只需要它与任意向量的乘积，可以像上面那样实现。

请注意，对于这里考虑的特定问题，可以精确计算 J 与任意向量的乘积，而不需要近似 (42)，正如 Rankin et al.[43] 所解释的。这些作者使用 GMRES 来跟踪二维神经场方程的平稳解，但这里的结果可能是第一个旅行解。

- 除了旅行颠簸 [44]，出现在两个空间维度的模式包括固定的颠簸组 [19,37,43]，”呼吸” 颠簸 [45]，环和旋转的颠簸组 [46]，波 [47]，螺旋形 [48,49] 和目标模式 [45,50]。虽然静止的模式和那些以恒定速度传播的模式（无论是平移还是旋转）可以用本节观点来处理，但像呼吸颠簸和目标波这样的模式在时间上具有内在的周期性，因此必须用稍微不同的技术来处理。
- 我们已经直接使用快速傅里叶变换对 (31) 中的二重积分进行了计算，但是使用其他傅里叶技术在二维神经场方面取得了一些早期进展 [19,48]，见 [51]。例如，假设 w 的傅里叶变换为

$$\frac{1}{s^4 + s^2 + 1} \quad (43)$$

在 $s^2 = k_x^2 + k_y^2$ 和 k_x 和 k_y 是两个变换变量。对 (31) 进行二维傅里叶变换，我们得到

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} + \hat{a} = \frac{A\hat{f}}{s^4 + s^2 + 1}, \quad (44)$$

帽子表示傅里叶变换。(44) 乘以 $s^4 + s^2 + 1$, 然后进行傅里叶反变换, 利用傅里叶变换恒等式, 我们得到

$$(\nabla^4 - \nabla^2 + 1) \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y, t) + a(x, y, t) \right) = Af(u(x, y, t) - h) \quad (45)$$

形式上等价于 (31) 但只涉及到衍生品。这个公式的优点是 (36)-(37) 的解满足

$$(\nabla^4 - \nabla^2 + 1) \left(c \frac{\partial u}{\partial \xi} + u + a \right) = Af(u - h), \quad (46)$$

$$c\tau \frac{\partial u}{\partial \xi} = Bu - a, \quad (47)$$

只涉及到导数。这些导数的有限差分近似可以使用稀疏矩阵实现, 从而消除了存储和操作大型完整矩阵的需要。这个想法随后被其他几个组织采用 [47,50]。

在此方法中, 假定耦合函数为二维中仅与距离有关的函数, 并由

$$w(r) = \int_0^\infty s J_0(rs) \hat{w}(s) ds, \quad (48)$$

其中 J_0 是第一类 0 阶贝塞尔函数, $\hat{w}(s)$ 是 w 的傅里叶变换 (在上面的例子中, $\hat{w}(s) = 1/(s^4 + s^2 + 1)$)。

我们现在讨论对这里所提出的思想的一些扩展。

5 扩展 [Extensions]

5.1 延迟 [Delays]

我们已经考虑了微分方程, 其导数仅取决于变量在当前时刻的值。然而, 延迟在神经系统中普遍存在 [52-56](和其他地方), 因此对延迟微分方程的研究自然就产生了。这样的系统可以使用数值积分, 例如, Matlab 的 dde23, 但遵循周期轨道和确定不动点的稳定性比非延迟系统要复杂得多, 因为问题的无维性质, 即使是标量方程。DDE-BIFTOOL[11] 软件包可用于此类计算, 参见 [57]。

5.2 全局分叉 [Global Bifurcations]

使用伪弧长延拓和通过线性化确定其稳定性的下列解将只检测局部分支, 如鞍点和 Hopf。然而, 全局分岔也可以在确定系统动力学方面发挥作用 [58-60]。它们还提供了另一种观察空间局部隆起或前沿的方式。举个例子, 考虑 (28), 用 x 代替 ξ 值。利用耦合函数 (25) 是 $(1 - d^2/dx^2)$ 的格林函数这一事实, 用这个算子作用于 (28), 得到

$$0 = \left(1 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \left(c \frac{d}{dx} - 1 \right) u + f(u(x) - h) \quad (49)$$

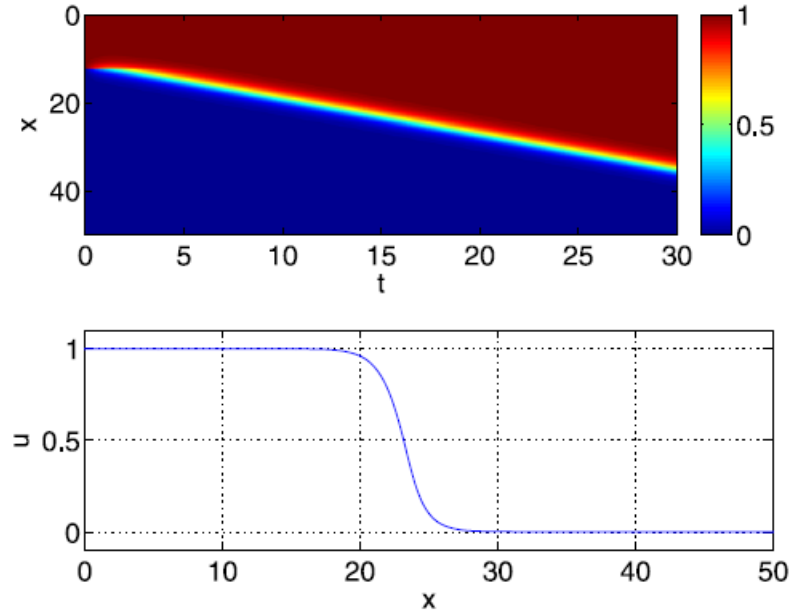
即

$$cu''' - u'' - cu' + u = f(u - h), \quad (50)$$

右上撇表示对空间的导数。(另一种推导 (49) 的方法是对 (28) 进行傅里叶变换, 利用 w 的变换等于 $1/(1 + k^2)$ 其中 k 是变换变量, 然后重新排列并对 [22] 进行傅里叶反变换) 该常微分方程有满足 $u = f(u - h)$ 的不动点, 图 6 中的前方为两个不动点之间的异宿连接。现在 (50) 可以写成

$$u' = v, \quad (51)$$

Fig. 6 *Top*: space–time plot of a solution of (24)–(25), where the domain has been truncated to $[0, 50]$. *Colour* indicates the value of u . *Bottom*: front at $t = 15$. Parameters: $\beta = 20$, $h = 0.3$



$$v' = z, \quad (52)$$

$$z' = \frac{f(u-h)}{c} - \frac{u}{c} + v + \frac{z}{c}, \quad (53)$$

在不动点处的雅可比矩阵 $(u, v, z) = (\bar{u}, 0, 0)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{f'(\bar{u}-h)-1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \quad (54)$$

这个 λ 的特征值满足

$$\lambda^3 - \lambda^2/c - \lambda + (1 - f'(\bar{u}-h))/c = 0. \quad (55)$$

对于 $h \approx 0.5$, $f'(\bar{u}-h) \approx 0$, 其中 \bar{u} 要么是较高的固定点, u_1 , 要么是较低的固定点, u_3 (见图 5 和章节 3.2), 因此 (55) 可以约写为

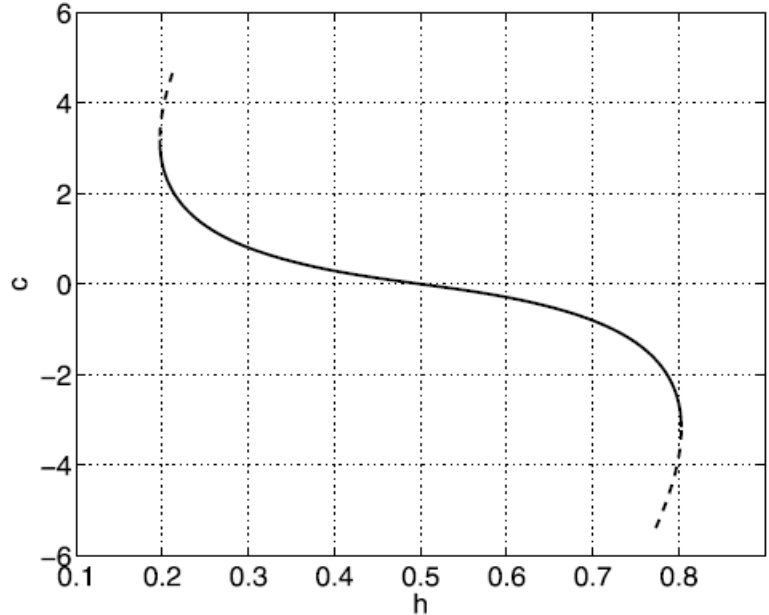
$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1/c) = 0, \quad (56)$$

即两个不动点都有二维不稳定流形和一维稳定流形 (对于 $c < 0$)。当一个不稳定流形与另一个稳定流形相交时, 不动点之间发生异宿连接, 这是本系统的一个余维一事件, 即它一般发生在参数 c 的孤立值处。这些值如图 7 所示。它们可以通过“射击”来找到: 使用一个不动点稳定流形的初始条件, 向后对 (51)-(53) 进行数值积分, 并改变 c , 直到这个轨迹与另一个不动点的不稳定流形相交。如果 c 为负, 则稳定和 unstable 歧管的维数互换, 但上述论点仍然适用。

注意:

- 同样地, 一个前沿可以被看作两个不动点之间的异宿连接, 一个空间定位的脉冲可以被看作到一个不动点的同宿轨道。这适用于脉冲是静止的 [18,61,62] 还是运动的 [39] (在这种情况下, 速度作为参数出现, 如上所述)。

Fig. 7 Speed of a front, c , as a function of h . *Solid*: stable, *dashed*: unstable. Parameters: $\beta = 20$



- 存在一类同宿轨道和异宿轨道的延拓软件 [10,63]。
- 许多作者已经使用了将 (28) 这样的积分方程通过傅里叶变换转换为微分方程的方法 [18,61,62,64]。为了使这种方法有效，耦合函数的傅里叶变换应该是变换变量平方的有理函数。
- 所得到的微分方程有时具有额外的结构 (例如,它们是哈密顿的),这可以在它们的分析中加以利用 [18,61]。
- 在空间上具有周期的解也可能是我们感兴趣的,并且通过考虑 (50) 形式的微分方程的周期解而不是等价的积分方程 (28), 可能更容易找到它们。

5.3 后分岔 [Following Bifurcations]

到目前为止,我们一直遵循代数方程的解,因为单个参数的变化。局部分叉发生在该参数的孤立值处。然而,当第二个参数变化时,跟踪这些分支通常会提供更多的信息。为了证明这一点,我们回到 3.1 节的问题,即,我们寻找 (10) 的固定解,其中 f 由 (11) 给出,但耦合函数为

$$w(x) = 10 \exp(-4x^2) - B \exp(-x^2) \quad (57)$$

第 3.1 节中的分析对应于 $B = 6$ 的情况。3.1 节的分析与 $B = 6$ 的情况相对应,但我们想知道改变 B 对存在稳定解的 h 值范围的影响 (见图 4)。我们按照第 3.1 节的方法进行,但现在系数 w_i 是 B 的函数,即我们求解

$$-u_j + w_j(B) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jy) f \left(\sum_{i=0}^{N-1} u_i \cos(iy) - h \right) dy = 0 \quad (58)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。这组方程可以简写为

$$F(\mathbf{v}, h, B) = 0, \quad (59)$$

如前所述, 其中 $F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. 对于给定的 h 和 B , (59) 的解是 10 的静止解。然而, 对于一个固定的 B , 我们希望找到 h 的值, 在这个值上发生鞍节点分岔, 如图 4。在这一点上, F 的雅各布系数有一个零特征值。与这个特征值对应的特征向量 $\phi \in \mathbb{R}^N$ 就满足了

$$J\phi = 0, \quad (60)$$

其中 J 是 $N \times N$ 雅可比矩阵。现在 ϕ 在其大小的缩放范围内是唯一的所以要选择一个特定的 ϕ

$$\phi^T \phi - 1 = 0 \quad (61)$$

即 ϕ 有单位长度。因此, 对于一个固定的 B , 鞍点分岔处 h 的值 (且该点的解 \mathbf{v}) 满足

$$F(\mathbf{v}, h, B) = 0, \quad (62)$$

$$J\phi = 0, \quad (63)$$

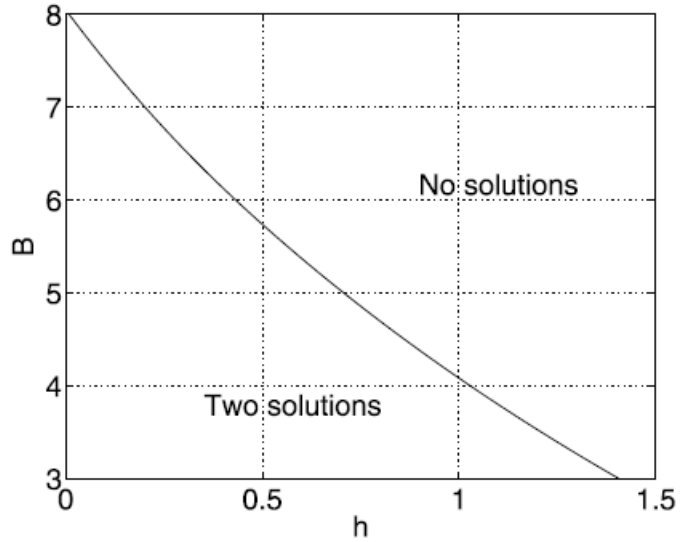
$$\phi^T \phi - 1 = 0. \quad (64)$$

这是一个 $2N + 1$ 方程的集合, 包含 $2N + 1$ 未知数 (\mathbf{v} 的 N 分量, ϕ 的 N 分量, 和 h)。注意 J 依赖于 \mathbf{v} , h 和 B , 并且使用第 4 节中讨论的方法可以很容易地找到 J 和 ϕ 的乘积。将 \mathbf{v} , ϕ 和 h 连接起来, 形成 $(2N + 1)$ -维向量 \mathbf{W} , 可以写成方程 (62)-(64)

$$H(\mathbf{W}, B) = 0, \quad (65)$$

其中 $H: \mathbb{R}^{2N+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1}$ 。(65) 的解可以按照通常的方式变化 B , 将找到的 B 的值与 \mathbf{W}_s 的对应元素作图, 可以在 (h, B) 平面上描画出鞍节点分叉曲线。这样做的结果如图 11 所示。我们看到, 随着 B 的减少, 发生鞍节点分叉的 h 的值增加, 反之亦然。

Fig. 11 Curve of saddle-node bifurcations of stationary single-bump solutions of (10), where the coupling function is (57). A stable and unstable pair exist to the left of this curve. Figure 4(a) is a horizontal “slice” through this figure at $B = 6$. Parameters: $N = 15$, $\beta = 20$



虽然我们在这里没有展示任何, 但 Hopf 分岔也可能发生在神经场模型中, 导致振荡行为 [20,22,65,66]。它们由一对通过虚轴的雅可比矩阵的复共轭特征值来描述。Hopf 分岔曲线可以遵循两个参数的变化方式, 与上面解释的鞍节点分岔类似, 主要的区别是在最简单的公式中有 $\mathcal{O}(3N)$ 方程要求解, 而不是 $\mathcal{O}(2N)$, 因为对应方程的实部和虚部都需要求解 [8,67]。注意, 更复杂的算法可以减少鞍节点分岔和 Hopf 分岔 [4] 时需要求解的方程的数量。

5.4 映射 [Maps]

伪弧长延拓是在参数变化时求解代数方程解的一种方法。在本文中，我们使用了定义微分方程平稳解的代数方程，无论是在平稳坐标系还是一致运动坐标系中。然而，对于一些动力系统，我们可能对离散时间映射中的不动点感兴趣，例如，它们可能对应于底层系统的周期轨道 [68-70](见下文)。定义这些不动点的方程也是代数的，因此可以用上面讨论的相同方法来处理。注意微分方程不动点的稳定性准则不同于映射不动点的稳定性准则 [58 60]。

5.5 周期轨 [Periodic Orbits]

我们只考虑了微分方程的静止解，但许多微分方程的解在时间上是周期性的，例如，由霍普夫分叉产生的解 [58, 59]。在时间或空间上的周期性强迫 [71,72]，也可以分别产生在时间或空间上的周期性解。寻找和跟踪周期性轨道可以用伪长度延续法来完成。其主要思路如前：构造一组周期性轨道所满足的代数方程。这样的轨道以有限维的方式表示，例如使用有限傅里叶级数展开，或者更常见和有效的是使用每个变量的分片多项式函数 [59, 73]。然后将轨道的这一表示方法代入治理微分方程，得到一组必须满足的代数方程。对于自主微分方程（即不明确依赖时间的方程），存在着对时间转移的不变性，就像我们在第 3 节中看到的对空间转移的不变性一样。3. 这种不变量可以用同样的方式来消除，即用标量相位条件从一个连续系列中选择一个 [73]。

另一种寻找周期轨道的方法是在相空间中放置一个 Poincaré 截面，使其与周期轨道相交，然后它就成为从该截面到自身的映射的一个固定点。举个例子，考虑 FitzHugh-Nagumo 方程 [74]

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v(v + 0.1)(1 - v) - w + 1}{0.1} \quad (66)$$

$$\frac{dw}{dt} = v - 0.5w \quad (67)$$

有稳定的周期轨道。图 12 显示了稳定周期轨道和暂态轨道。我们定义 Poincaré 截面

$$\Sigma = \{(v, w) : v > 0.5, w = 1\}, \quad (68)$$

并选择一个初始条件 $(v, w) = (V_0, 1)$ 。(图 12 中 $V_0 = 1.2$) 现在用这个初始条件积分 (66)-(67)，直到解再次在 Σ 中， $(v, w) = (V_1, 1)$ 。使用这个初始条件重复，从而生成序列 V_0, V_1, V_2, \dots ，它们是映射的迭代

$$V_i = \psi(V_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (69)$$

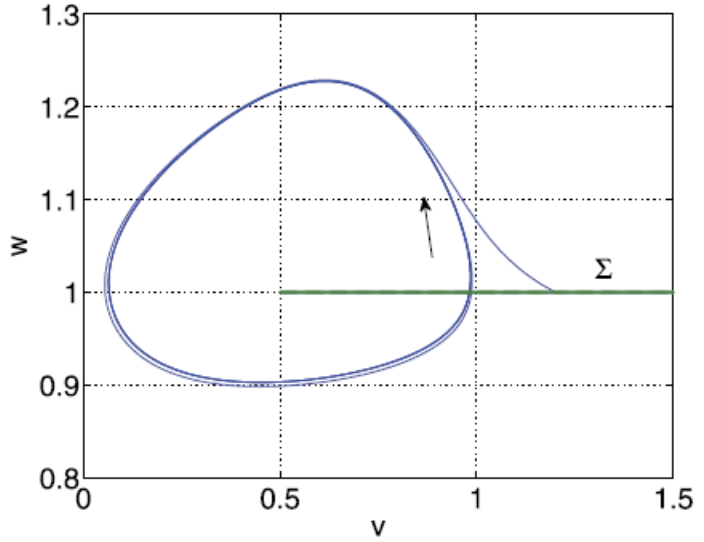
图 12 中的周期轨道是这个映射的一个不动点，由 $V^* = \psi(V^*)$ 定义，这是一个代数方程，其解可以随着参数的变化而变化。注意 ψ 是用一组微分方程的数值积分定义的，并且这个积分必须精确地完成，才能使技术成功 [68]。只要初始条件足够接近，这种方法就能找到一个不稳定的周期轨道。这种方法的一种修改是“多次拍摄”，将几个 Poincaré 截面放在相空间中，一个连续地从一个集成到下一个，并连接结果 [59,75]。

这种技术，在短时间段内使用底层系统的数值积分来寻找稳定和不稳定的对象，是使用时间步进器进行分岔分析的一个例子 [76]。它构成了我们现在讨论的“无方程”方法的基础。

5.6 无方程 [Equation-Free]

在研究诸如 (1) 这样的系统时，通常假定人们可以使用子程序或通过调用 Matlab 的“函数文件”来明确而快速地评估 $g(u; \mu)$ ，例如。然而，并不要求明确指定 $g(u; \mu)$ ，只要给定 u 和 mu ，就可以得到 $g(u; \mu)$ 的

Fig. 12 Finding a periodic orbit of (66)–(67) using a Poincaré section, Σ . The *arrow* indicates the direction of motion. See text for details



合理准确的估计，就可以使用上面的想法。这一思想构成了研究复杂多尺度系统的”无方程”方法的一部分 [77-79]。现在我们简要地总结一下一些相关的想法。

假设我们有一个定义明确的动力系统

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \phi(\mathbf{v}; \mu), \quad (70)$$

其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 $1 \ll n$ 。 \mathbf{v} 的分量可以是与霍奇金-赫胥黎型神经网络相关的所有变量，或者是一些相互作用粒子的位置和速度。我们将 (70) 称为模型的微观或精细尺度描述。还假设我们相信 (70) 可以被动力系统有效地描述

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \Phi(\mathbf{V}; \mu) \quad (71)$$

其中 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^m$ 和 $m \ll n$ 。确定这种情况—以及变量 \mathbf{V} 实际上是什么—是一个复杂的话题，我们不会在这里讨论，但最简单的是， \mathbf{V} 的一个特定分量可能是 \mathbf{v} 的一些分量的平均值，比如说。我们所说的”有效描述”是指对 (71) 的分岔分析或数值积分会得到与对 (70) 进行这些操作类似的结果，任何差异都很容易解释，而且不重要。我们把 (71) 称为我们模型的”宏观”或”粗略”描述。我们想对 (71) 进行分岔分析，但我们没有 Φ 的明确表达。为了对特定的 \mathbf{V} 和 μ 评估 $\Phi(\mathbf{V}; \mu)$ ，我们需要两个在 \mathbf{v} 和 \mathbf{V} 之间的运算符。第一个是一个提升算子 $L: \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}^n$ 这样 $L(\mathbf{V}) = \mathbf{v}$ 。我们还需要一个限制性算子 $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 这样 $R(\mathbf{v}) = \mathbf{V}$ 。这些算子必须满足一致性条件 $R(L(\mathbf{V})) = \mathbf{V}$ 。由于 L 从一个低维空间映射到一个高维空间，它往往不是唯一的。

为了评估 $\Phi(\mathbf{V}_0; \mu_0)$ ，我们首先提升 \mathbf{V}_0 以产生 \mathbf{v}_0 ，其中 $L(\mathbf{V}_0) = \mathbf{v}_0$ 。然后我们用初始条件 \mathbf{v}_0 (和 $\mu = \mu_0$) 初始化细尺度模型 (70)，并在短时间内模拟 (70)，比如持续时间 Δ ，产生状态 $\mathbf{v}(\Delta)$ 。对其进行限制可以得到 $\mathbf{V}(\Delta)$ 的估计，即 $\mathbf{V}(\Delta) = R(\mathbf{v}(\Delta))$ 。因此，我们有

$$\frac{\mathbf{V}(\Delta) - \mathbf{V}_0}{\Delta} \approx \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} = \Phi(\mathbf{V}_0; \mu_0) \quad (72)$$

换句话说，我们估计 $\phi(\mathbf{V}; \mu)$ 通过在微观系统中运行一个短脉冲，适当地初始化，并限制结果。由于通常有许多不同的 \mathbf{v}_0 与特定的 \mathbf{V}_0 一致，使用不同的 \mathbf{v}_0 运行多个突发，然后取平均值通常可以得到更好的 $\phi(\mathbf{V}_0; \mu_0)$ 估值，理想情况下，这是在多个处理器上并行完成的。因此原则上我们可以计算 $\phi(\mathbf{V}; \mu)$ 对于任意 \mathbf{V} 和 μ ，这就是对 (71) 进行分岔分析 (或数值积分) 所需要的全部。注意 \mathbf{V} 大约可以静止，即使不是 (如果 \mathbf{V} 是一个网

络的平均发射率, 和 \mathbf{v} 包含电压的神经网络, 例如) 所以当找到固定的 ϕ 点, 一个可能需要放松 $\phi = 0$ 时确定的标准。

通常情况下, 无方程方法的难点在于细节, [80-82] 中展示了计算神经科学中的一些应用。如这些论文所示, \mathbf{V} 的选择通常可以使用数据挖掘技术半自动完成。(对 (70) 进行了长时间的模拟, 挖掘结果以发现数据集是否存在低维参数化。如果是, 这些参数构成 \mathbf{v} 的分量。) 请注意, 虽然我们将微观模型 (70) 写成了确定性微分方程, 但它同样可以是一个随机微分方程, 甚至是一个时间和状态都是离散的动力系统 [79,83]。本文提出的方法在 [84] 中有一个有趣的概括, 其中对函数 ϕ 的模拟是在实验中实时评估的, 而不是通过运行计算机模拟。

6 结论

数值延拓是一种强大的技术, 当参数变化时, 允许一个人跟随代数方程组的解。我们对这种技术进行了介绍, 讨论了它在计算神经科学中出现的各种模型的研究中的使用, 并通过一些例子演示了它的使用。该技术是一般的, 但我们集中在高维系统出现的离散神经场模型。通过适当的修改, 该技术可用于跟踪两个参数变化时的分岔, 以及跟踪在时间上具有周期性、均匀平移或旋转的解。它在高维系统中的应用在过去一直受到内存和计算时间问题的限制, 但随着更便宜的内存和更快的处理器的不断出现, 我们希望这项技术在复杂的、高维的动力系统的研究中继续发挥作用。

7 Competing Interests

The author declares that he has no competing interests.

8 Acknowledgements

I thank Stephen Coombes, Kyle Wedgwood, Daniele Avitabile and the referees for useful comments.

9 参考文献

1. Bressloff PC: Waves in Neural Media. Berlin: Springer; 2014.
2. Ermentrout GB, Terman DH: Mathematical Foundations of Neuroscience. Volume 64. Berlin: Springer; 2010.
3. Seydel R: Practical Bifurcation and Stability Analysis. Volume 5. Berlin: Springer; 2010.
4. Govaerts WJ: Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria. Philadelphia: SIAM; 2000.
5. Krauskopf B, Osinga HM, Galán-Vioque J: Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path Following and Boundary Value Problems. Understanding Complex Systems. Berlin: Springer; 2007.
6. Allgower EL, Georg K: Introduction to Numerical Continuation Methods. Philadelphia: SIAM; 2003.
7. Beyn W-J, Champneys A, Doedel E, Govaerts W, Kuznetsov YA, Sandstede B: Numerical continuation, and computation of normal forms. In Handbook of Dynamical Systems. Edited by Fiedler B. Amsterdam: Elsevier; 2002:149-219. [Handbook of Dynamical Systems, vol. 2.]

8. Salinger AG, Bou-Rabee NM, Pawlowski RP, Wilkes ED, Burroughs EA, Lehoucq RB, Romero LA: *Loca 1.0 library of continuation algorithms: theory and implementation manual*. Sandia National Laboratories, SAND2002-0396; 2002.
9. Doedel EJ, Champneys AR, Fairgrieve TF, Kuznetsov YA, Sandstede B, Wang X: “Auto97,” *Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*; 1998.
10. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA: *Matcont: a Matlab package for numerical bifurcation analysis of odes*. *ACM Trans. Math. Softw.* 2003, 29(2):141-164.
11. Engelborghs K, Luzyanina T, Roose D: *Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using dde-biftool*. *ACM Trans. Math. Softw.* 2002, 28(1):1-21.
12. Ermentrout B: *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: a Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. Volume 14. Philadelphia: SIAM; 2002.
13. Uecker H, Wetzels D, Rademacher JDM: *pde2path - A Matlab package for continuation and bifurcation in 2D elliptic systems*. arXiv:1208.3112; 2012.
14. Dankowicz H, Schilder F: *Recipes for Continuation*. Philadelphia: SIAM; 2013.
15. Wilson HR, Cowan JD: *A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue*. *Kybernetik* 1973, 13(2):55-80.
16. Amari S: *Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields*. *Biol. Cybern.* 1977, 27(2):77-87.
17. Doedel E, Keller HB, Kernevez JP: *Numerical analysis and control of bifurcation problems (i): bifurcation in finite dimensions*. *Int. J. Bifurc. Chaos* 1991, 1(03):493-520.
18. Laing C, Troy W, Gutkin B, Ermentrout G: *Multiple bumps in a neuronal model of working memory*. *SIAM J. Appl. Math.* 2002, 63:62.
19. Laing C, Troy W: *PDE methods for nonlocal models*. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2003, 2(3):487-516.
20. Pinto DJ, Ermentrout GB: *Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks: II. lateral inhibition and standing pulses*. *SIAM J. Appl. Math.* 2001, 62(1):226-243.
21. Bressloff P: *Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields*. *J. Phys. A, Math. Theor.* 2012, 45(3):033001.
22. Coombes S: *Waves, bumps, and patterns in neural field theories*. *Biol. Cybern.* 2005, 93(2):91-108.
23. Coombes S, beim Graben P, Potthast R, Wright J (Eds): *Neural Fields: Theory and Applications*. Berlin: Springer; 2014.
24. Wimmer K, Nykamp DQ, Constantinidis C, Compte A: *Bump attractor dynamics in prefrontal cortex explains behavioral precision in spatial working memory*. *Nat. Neurosci.* 2014, 17:431-439.
25. Beyn W-J, Thümmel V: *Freezing solutions of equivariant evolution equations*. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2004, 3(2):85-116.
26. Elvin AJ: *Pattern formation in a neural field model*. PhD thesis. Auckland, New Zealand, Massey University; 2008.
27. Laing C, Longtin A: *Noise-induced stabilization of bumps in systems with long-range spatial coupling*. *Phys. D, Nonlinear Phenom.* 2001, 160(3):149-172.
28. Ermentrout B, Folias SE, Kilpatrick ZP: *Spatiotemporal pattern formation in neural fields with linear*

- adaptation. In *Neural Fields: Theory and Applications*. Edited by Coombes S, beim Graben P, Potthast R, Wright J. Berlin: Springer; 2014.
29. Kilpatrick ZP: Coupling layers regularizes wave propagation in stochastic neural fields. *Phys. Rev. E* 2014, 89(2):022706.
30. Trefethen L: *Spectral Methods in MATLAB*. Volume 10. Philadelphia: SIAM; 2000.
31. Rowley CW, Kevrekidis IG, Marsden JE, Lust K: Reduction and reconstruction for self-similar dynamical systems. *Nonlinearity* 2003, 16(4):1257.
32. Cliffe KA, Spence A, Tavener SJ: The numerical analysis of bifurcation problems with application to fluid mechanics. *Acta Numer.* 2000, 2000(9):39–131.
33. Dijkstra HA, Wubs FW, Cliffe KA, Doedel E, Dragomirescu IF, Eckhardt B, Gelfgat AY, Hazel A, Lucarini V, Salinger AG, Phipps ET, Sanchez-Umbria J, Schuttelaars H, Tuckerman LS, Thiele U: Numerical bifurcation methods and their application to fluid dynamics: analysis beyond simulation. *Commun. Comput. Phys.* 2014, 15(1):1–45.
34. Bär M, Bangia AK, Kevrekidis IG: Bifurcation and stability analysis of rotating chemical spirals in circular domains: boundary-induced meandering and stabilization. *Phys. Rev. E* 2003, 67(5):056126.
35. Schneider TM, Gibson JF, Burke J: Snakes and ladders: localized solutions of plane couette flow. *Phys. Rev. Lett.* 2010, 104:104501.
36. Lord G, Thümmel V: Computing stochastic traveling waves. *SIAM J. Sci. Comput.* 2012,34(1):B24–B43.
37. Coombes S, Schmidt H, Laing C, Svanstedt N, Wyller J: Waves in random neural media. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2012, 32:2951–2970.
38. Coombes S, Owen MR: Evans functions for integral neural field equations with heaviside firing rate function. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2004, 3(4):574–600.
39. Pinto D, Ermentrout G: Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks: I. traveling fronts and pulses. *SIAM J. Appl. Math.* 2001, 62(1):206–225.
40. Curtu R, Ermentrout B: Pattern formation in a network of excitatory and inhibitory cells with adaptation. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2004, 3(3):191–231.
41. Quarteroni A, Sacco R, Saleri F: *Numerical Mathematics*. Berlin: Springer; 2007. [Texts in Applied Mathematics.]
42. Saad Y, Schultz MH: GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1986, 7(3):856–869.
43. Rankin J, Avitabile D, Baladron J, Faye G, Lloyd D: Continuation of localized coherent structures in nonlocal neural field equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 2014, 36(1):B70–B93.
44. Bressloff PC, Kilpatrick ZP: Two-dimensional bumps in piecewise smooth neural fields with synaptic depression. *SIAM J. Appl. Math.* 2011, 71(2):379–408.
45. Folias SE, Bressloff PC: Breathing pulses in an excitatory neural network. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2004, 3(3):378–407.
46. Owen M, Laing C, Coombes S: Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities. *New J. Phys.* 2007, 9:378.

47. Coombes S, Venkov N, Shiau L, Bojak I, Liley D, Laing C: Modeling electrocortical activity through improved local approximations of integral neural field equations. *Phys. Rev. E* 2007, 76(5):051901.
48. Laing CR: Spiral waves in nonlocal equations. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005, 4(3):588-606.
49. Huang X, Troy WC, Yang Q, Ma H, Laing CR, Schiff SJ, Wu J-Y: Spiral waves in disinhibited mammalian neocortex. *J. Neurosci.* 2004, 24(44):9897-9902.
50. Kilpatrick ZP, Bressloff PC: Spatially structured oscillations in a two-dimensional excitatory neuronal network with synaptic depression. *J. Comput. Neurosci.* 2010, 28(2):193-209.
51. Laing CR: Pde methods for two-dimensional neural fields. In *Neural Fields: Theory and Applications*. Edited by Coombes S, beim Graben P, Potthast R, Wright J. Berlin: Springer; 2014.
52. Coombes S, Laing C: Delays in activity-based neural networks. *Philos. Trans. R. Soc., Math. Phys. Eng. Sci.* 2009, 367(1891):1117-1129.
53. Laing CR, Longtin A: Dynamics of deterministic and stochastic paired excitatory-inhibitory delayed feedback. *Neural Comput.* 2003, 15(12):2779-2822.
54. Meijer H, Coombes S: Travelling waves in models of neural tissue: from localised structures to periodic waves. *EPJ Nonlinear Biomed. Phys.* 2014, 2(1):3.
55. Meijer HG, Coombes S: Travelling waves in a neural field model with refractoriness. *J. Math. Biol.* 2014, 68(5):1249-1268.
56. Faye G, Faugeras O: Some theoretical and numerical results for delayed neural field equations. *Phys. D, Nonlinear Phenom.* 2010, 239(9):561-578.
57. Szalai R: Knut: A continuation and bifurcation software for delay-differential equations. [<http://gitorious.org/knut/page>]
58. Guckenheimer J, Holmes P: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Volume 42. New York: Springer; 1983.
59. Kuznetsov YA: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Volume 112. Berlin: Springer; 1998.
60. Wiggins S: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Berlin: Springer; 1990.
61. Elvin A, Laing C, McLachlan R, Roberts M: Exploiting the Hamiltonian structure of a neural field model. *Phys. D, Nonlinear Phenom.* 2010, 239(9):537-546.
62. Coombes S, Lord GJ, Owen MR: Waves and bumps in neuronal networks with axo-dendritic synaptic interactions. *Phys. D, Nonlinear Phenom.* 2003, 178(3):219-241.
63. Champneys AR, Kuznetsov YA, Sandstede B: A numerical toolbox for homoclinic bifurcation analysis. *Int. J. Bifurc. Chaos* 1996, 6(05):867-887.
64. Guo Y, Chow CC: Existence and stability of standing pulses in neural networks: I. existence. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005, 4(2):217-248.
65. Blomquist P, Wyller J, Einevoll GT: Localized activity patterns in two-population neuronal networks. *Phys. D, Nonlinear Phenom.* 2005, 206(3):180-212.
66. Coombes S, Schmidt H, Avitabile D: Spots: breathing, drifting and scattering in a neural field model. In *Neural Fields: Theory and Applications*. Edited by Coombes S, beim Graben P, Potthast R, Wright J. Berlin: Springer; 2014.
67. Griewank A, Reddien G: The calculation of Hopf points by a direct method. *IMA J. Numer. Anal.* 1983, 3(3):295-303.

68. Wasylenko TM, Cisternas JE, Laing CR, Kevrekidis IG: Bifurcations of lurching waves in a thalamic neuronal network. *Biol. Cybern.* 2010, 103(6):447-462.
69. Shiao L, Laing CR: Periodically forced piecewise-linear adaptive exponential integrate-and-fire neuron. *Int. J. Bifurc. Chaos* 2013, 23(10):1350171.
70. Laing CR, Coombes S: Mode locking in a periodically forced “ghostbursting” neuron model. *Int. J. Bifurc. Chaos* 2005, 15(04):1433-1444.
71. Coombes S, Laing C: Pulsating fronts in periodically modulated neural field models. *Phys. Rev. E* 2011, 83(1):011912.
72. Schmidt H, Hutt A, Schimansky-Geier L: Wave fronts in inhomogeneous neural field models. *Phys. D, Nonlinear Phenom.* 2009, 238(14):1101-1112.
73. Doedel E, Keller HB, Kernevez JP: Numerical analysis and control of bifurcation problems (ii): bifurcation in infinite dimensions. *Int. J. Bifurc. Chaos* 1991, 1(04):745-772.
74. Hastings SP: Single and multiple pulse waves for the Fitzhugh-Nagumo. *SIAM J. Appl. Math.* 1982, 42(2):247-260.
75. Sánchez J, Net M: On the multiple shooting continuation of periodic orbits by Newton-Krylov methods. *Int. J. Bifurc. Chaos* 2010, 20(01):43-61.
76. Tuckerman LS, Barkley D: Bifurcation analysis for timesteppers. In *Numerical Methods for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems*. Edited by Doedel E, Tuckerman LS. New York: Springer; 2000:453-466. [The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 119.]
77. Kevrekidis IG, Samaey G: Equation-free multiscale computation: algorithms and applications. *Annu. Rev. Phys. Chem.* 2009, 60(1):321-344.
78. Kevrekidis Y, Samaey G: Equation-free modeling. *Scholarpedia* 2010, 5(9):4847.
79. Theodoropoulos C, Qian Y-H, Kevrekidis IG: “Coarse” stability and bifurcation analysis using timesteppers: a reaction-diffusion example. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2000, 97(18):9840-9843.
80. Laing CR: On the application of “equation-free modelling” to neural systems. *J. Comput. Neurosci.* 2006, 20(1):5-23.
81. Laing C, Frewen T, Kevrekidis I: Coarse-grained dynamics of an activity bump in a neural field model. *Nonlinearity* 2007, 20(9):2127.
82. Laing CR, Frewen T, Kevrekidis IG: Reduced models for binocular rivalry. *J. Comput. Neurosci.* 2010, 28(3):459-476.
83. Zou Y, Fonoberov VA, Fonoberova M, Mezic I, Kevrekidis IG: Model reduction for agent-based social simulation: coarse-graining a civil violence model. *Phys. Rev. E* 2012, 85(6):066106.
84. Sieber J, Gonzalez-Buelga A, Neild SA, Wagg DJ, Krauskopf B: Experimental continuation of periodic orbits through a fold. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100:244101.