
Principle of neural computation

小神经网络的混沌

Chaos in small networks of theta neurons

AIP Chaos: An Interdisciplinary
Journal of Nonlinear Science



SUBMIT YOUR ARTICLE

HOME BROWSE INFO FOR AUTHORS COLLECTIONS

SIGN UP FOR ALERTS

Home > Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science > Volume 28, Issue 7 > 10.1063/1.5028515

Full • Submitted: 11 March 2018 • Accepted: 25 June 2018 • Published Online: 17 July 2018



< PREV NEXT >

Chaos in small networks of theta neurons

Chaos 28, 073101 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5028515>

Carlo R. Laing⁹¹

more...

[View Affiliations](#) [View Contributors](#)

原著 Carlo R. Laing

翻译 Song Jian (School of Mathematics in SCUT)

Chaos

journal homepage: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5028515>

Author information

Chaos in small networks of theta neurons

Article history:

Submitted: 11 March 2018; Accepted: 25 June 2018; Published Online: 17 July 2018

CarloR.Laing^a

AFFILIATIONS

^aSchool of Natural and Computational Sciences, Massey University, Private Bag 102-904 North Shore Mail Centre, Auckland, New Zealand

摘要【ABSTRACT】

我们考虑的是瞬时耦合的神经元的小网络。对于抑制性耦合和固定参数值，一些初始条件给出了混乱的解决方案，而另一些则给出了准周期性的解决方案。这种行为似乎是由支配网络动态的方程的可逆性造成的。我们研究了初始条件和参数变化对混沌行为的稳健性，发现只要系统的可逆性得到保留，该行为就相当稳健。

Keywords: *Chimera states, Coupled oscillators, Bifurcations, Collective behavior in networks, Synchrony*

模型神经元的大型网络的行为往往令人感兴趣，但有时小型网络能更好地描述所关注的生物系统。令人惊讶的是，非常小的 Theta 神经网络（描述不变圆分叉上的鞍结点的正常形式）可以显示出混沌行为。混沌解决方案与准周期解决方案并存，显然是系统动力学可逆性的结果。这种行为对参数的变化以及对神经元的非同质化相当稳健。

文章导航

1 引言【INTRODUCTION】	5
2 3 个神经元的网络结果	6
3 4 个神经元网络的结果	13
4 讨论	14
5 附录	15
6 参考文献	16

1 引言【INTRODUCTION】

对神经网络的研究通常考虑异质神经元的大网络，其假设条件是单个神经元的行为不可能是显著的，而且真正的神经元是不相同的 [1-3]。然而，在某些情况下，小的网络是有意义的 [4, 5]，相同的神经元的特殊情况允许人们使用对称动力系统的研究技术 [6-8]。在最近的一篇文章 [9] 中，我们考虑了全对全耦合的相同 θ 神经元的大型（有时是天生的）网络。这些网络的不寻常之处在于，存在一种确切的方法，使用 Watanabe/Strogatz 定理将系统的维度从 N （网络中的神经元数量）降低到 3 [10, 11]。这些系统动力学的一个有趣的方面是，对于瞬时抑制性耦合，动力学在某些初始条件下显得混乱，但在其他初始条件下则是准周期性的。在本文中，我们对这种行为进行了更深入的研究，确定这种混沌行为对参数和初始条件变化的稳健性。

我们现在简要地调查一下以前的一些相关工作。混沌行为的概念已经存在了几十年，一些研究者对耦合振荡器的对称系统中的混沌吸引子进行了研究。例如，[12] 研究了 3 或 4 个对称耦合的强制相同振荡器的网络。这些振荡器是用模拟电路实现的，观察到了具有不同对称程度的混沌吸引器。一类特别简单的振荡器是相位振荡器，其中每个振荡器的状态由一个单一的角度变量描述。这些通常是弱耦合振荡器网络的合适模型 [6, 13]。仓本型网络，其中相位振荡器通过相位差的正弦函数进行耦合，已经被充分研究 [14, 15]。关于这种类型的网络是否能有混沌解的问题已经被几个小组解决。[16] 考虑了由相同的、全对全耦合的相位振荡器网络组成的小型网络，发现需要四个或更多的振荡器，以及耦合函数中的两个或多个谐波。[17] 发现四个或更多的异质相位振荡器的网络在耦合函数中只有一个谐波的情况下会出现混沌行为。对具有非成对相互作用的相位振荡器网络的扩展也发现了混沌行为 [18]。在由两个对称子网络组成的网络中也发现了混沌现象，子网络内和子网络间有不同的耦合 [19, 20]，在环上的仓本振荡器中也发现了混沌 [21, 22]。

上面提到的所有研究都考虑了通过相位差异进行耦合的网络，其结果是只有振荡器之间的频率差异，而不是它们的绝对频率，可以被认为是有意义的。相比之下，这里研究的 θ 神经元可以在任意高的频率下重启，或者根本不重启，这取决于它们的输入 [23, 24]。另外，它们是通过相位的函数而不是相位差来耦合的。我们所知道唯一关于 θ 神经网络中的混沌研究是 [9, 25, 26] 和 [27]，它们实际上考虑了二次积分和发射神经元，在坐标变换下相当于 θ 神经元。在 [25] 中，作者考虑了大型稀疏的 θ 神经网络，通过 δ 函数电流脉冲进行耦合。[26] 通过周期性地改变每个神经元的输入电流，使系统非自主性，在大型或先天性网络中产生混沌。在 [27] 中，作者考虑了具有延迟抑制的大型网络，而在这里我们集中于具有瞬间抑制性耦合的小型网络。还要注意的，有几个小组 [28-30] 在具有延迟抑制性耦合的集成-发射神经元的大型网络中观察到不规则行为。然而，对小型网络的研究似乎只有 [9]。

我们考虑的是全对全耦合的 θ 神经元的小网络。 θ 神经元是一个典型的模型，是一个 I 型神经元的典型模型，对于它来说，环的开始是通过不变圆分叉上的一个鞍节点 [23, 24]。它可以通过非线性坐标转换从二次积分-发射神经元模型中推导出来 [31]。该网络的方程为

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 - \cos\theta_i + (1 + \cos\theta_i)(\eta + \kappa I) \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, N$ ，其中 η 和 κ 是常数，且

$$I = \frac{a_n}{N} \sum_{i=1}^N (1 - \cos\theta_i)^n \quad (2)$$

其中 a_n 是这样选择的

$$\int_0^{2\pi} a_n (1 - \cos\theta)^n d\theta = 2\pi \quad (3)$$

即 $a_n = 2^n(n!)^2/(2n)!$ 。函数 $a_n(1 - \cos \theta_i)^n$ 是模仿神经元 i 激发时产生的动作电位，即 θ_i 通过 π 来增加。这类模型在 $N \rightarrow \infty$ 的极限和每个神经元通过 [26,32] 随机选取 η 值的情况下进行了研究。一个重要的观察是，这个系统在 $(t \{\theta_i\})$ 的转换下是可逆的，映射到 $(-t \{-\theta_i\})$ ，对于所有 i 。

2 3 个神经元的网络结果

对于某些参数，当 $N = 3$ 时，系统 (1)-(2) 可以表现出混沌行为，如图 1(a) 所示。然而，对于相同的参数值，不同的初始条件反而会导致拟周期行为，如图 1(b)。这种混沌和更有规律的混合行为以前在其他几个可逆系统 [33,34] 中也观察到。

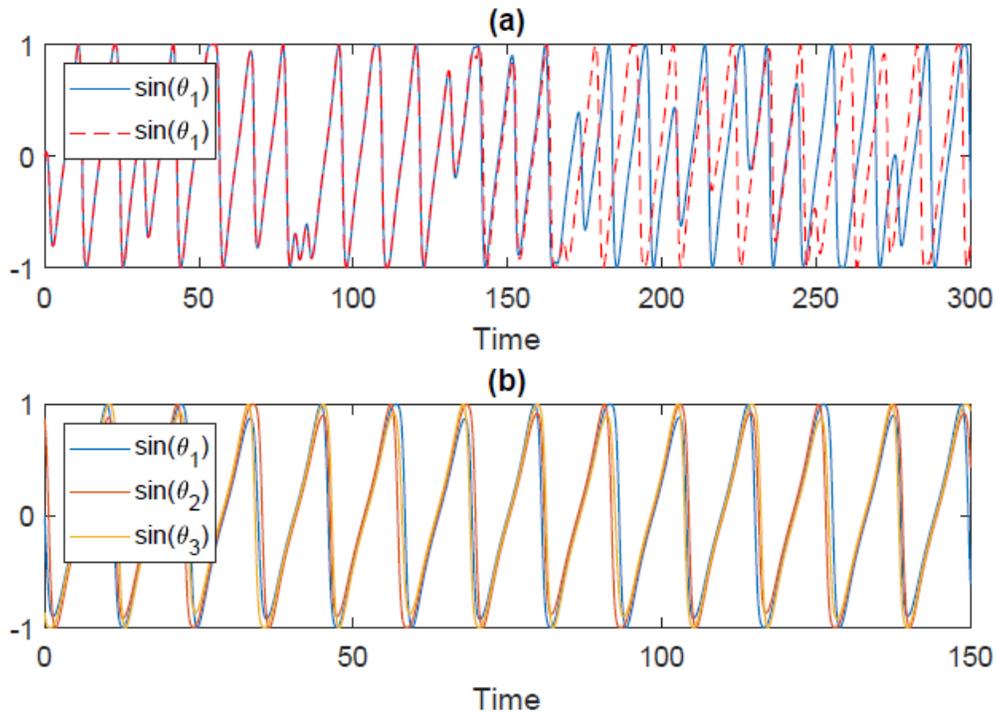


Figure 1: (a) $\sin(\theta_1)$ for initial conditions $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 1, 6)$ (red dashed) and $(10^{-4}, 1, 6)$ (blue solid). This shows the exponential divergence characteristic of a chaotic solution. (b) $\sin(\theta_i)$ for $i = 1, 2, 3$ with initial conditions $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 2\pi/3, 4\pi/3)$. This is a quasiperiodic solution. Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75, \eta = 0.1$.

为了更好地理解这种行为，我们首先考虑遍历所有初始条件。设置 $\theta_1(0) = 0$ ，并改变 $\theta_2(0)$ 和 $\theta_3(0)$ ，我们得到图 2。我们看到两个不同的区域，其中一个区域的解明显是拟周期的，最大 Lyapunov 指数等于零，另一个区域的解是混沌的（即具有正的最大 Lyapunov 指数）。注意，这个图形在对角线上是对称的，在对角线上，结果解不能是混沌的，因为系统是二维的。

为了可视化解决方案，我们将 Poincaré 部分放在 $\theta_1 = \pi, d\theta_1/dt > 0$ ，结果如图 3 所示。由于神经元是相同的，它们的放电顺序必须被保留。在这种情况下，初始条件被排序 $0 = \theta_1(0) < \theta_2(0) < \theta_3(0) < 2\pi$ ，这就是为什么点只出现在图 3 中的三个扇区。我们看到了一些混沌解和两个区域对应的准周期解在左上扇区和右下扇区的证据。拟周期解在这两个区域之间交替，因此当 $\theta_1 = \pi$ 时，那么，说， $\pi < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$ (右上扇区)，而下一次 $\theta_1 = \pi$ ，我们将有 $0 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$ (左下扇区)。在准周期轨道的中心是一个周期轨道，它在每个相位增加到 4π 之后重复，如图 4 所示。在这个轨道上，每个神经元轮流受到抑制 (θ 减少)，而其他两个神经元

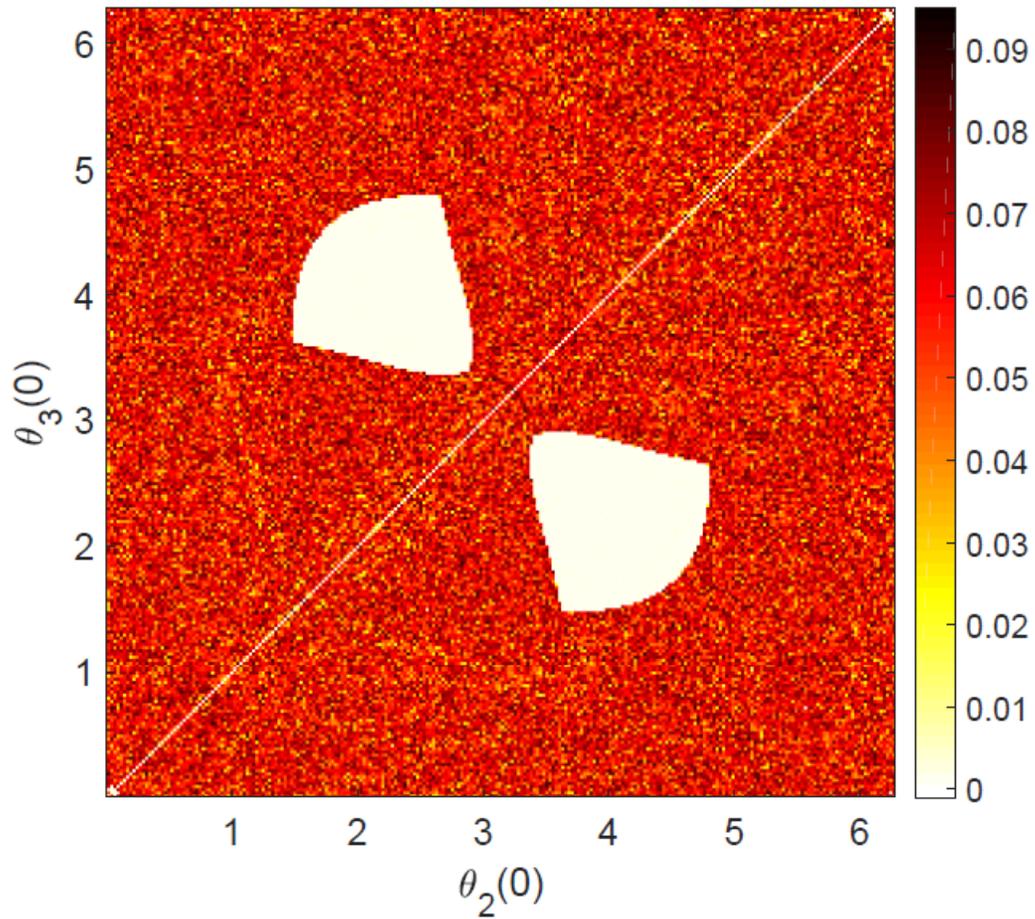


Figure 2: Maximal Lyapunov exponent for solutions starting with $\theta_1(0) = 0$ and $\theta_2(0)$ and $\theta_3(0)$ given by the values shown. Most initial conditions result in chaotic solutions (positive Lyapunov exponent) while some give quasiperiodic solutions (zero Lyapunov exponent). Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75, \eta = 0.1$.

则发出信号: 首先是神经元 2, 然后是神经元 3, 最后是神经元 1。(当然也有一个顺序相反的解决方案。) 虽然观测不同的准周期轨道需要不同的初始条件, 但混沌区的初始条件似乎可以充分探索这一区域。

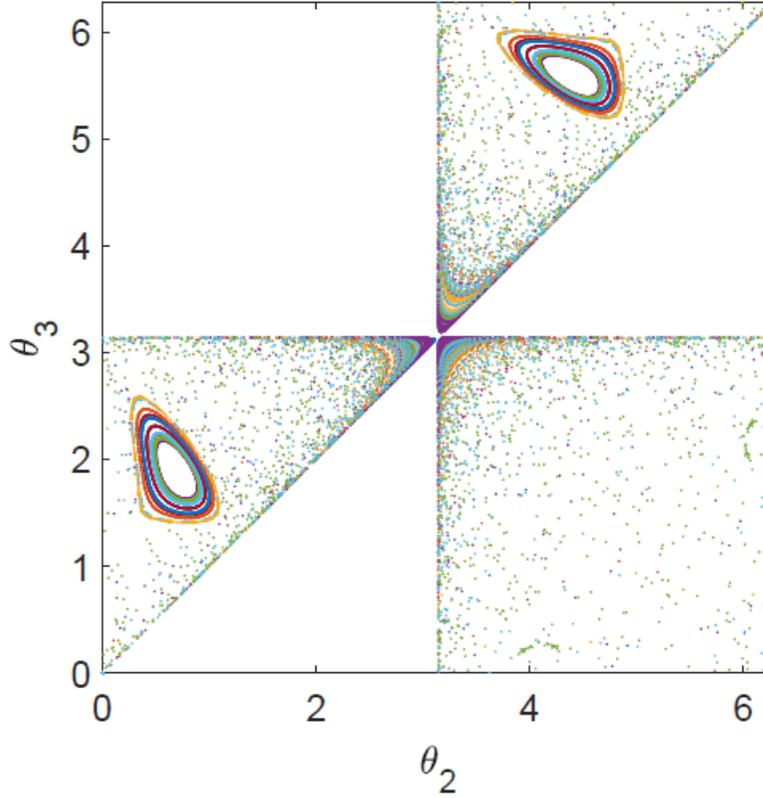


Figure 3: Poincaré section at $\theta_1 = \pi$ with $d\theta_1/dt > 0$. 20 different initial conditions were used and each solution starting with a specific initial condition is plotted a different colour. We see coexisting chaotic and quasiperiodic solutions. Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75, \eta = 0.1$.

完全同步对应于图 3 中的中心点, 而在对角线上, $\theta_2 = \pi$ 和 $\theta_3 = \pi$ 三个振荡器中的两个是同步的。对于线性顺序, 发现完全同步状态是中性稳定的。定义 $x \equiv \theta_2 - \pi$ 和 $y \equiv \theta_3 - \pi$, 仅用 $\sqrt{x^2 + y^2} < 0.1$ 从长度 10^5 的时间单位的模拟中绘出点, 我们得到图 5 (a)。假设这些点是由二阶映射生成的

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x_n^2 + a_{12}x_ny_n + a_{22}y_n^2 \\ b_{11}x_n^2 + b_{12}x_ny_n + b_{22}y_n^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

并使用非线性最小二乘找到最适合图 5 (a) 中所有点的系数, 我们得到了映射

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 & 0 \\ 0 & 0.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.376x_n^2 - 0.773x_ny_n + 0.011y_n^2 \\ -0.009x_n^2 - 0.743x_ny_n + 0.377y_n^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(系数四舍五入到小数点后 3 位)。由该映射引起的方向场如图 5 (b) 所示。注意 x 和 y 轴, 以及对角线, 都是近似不变的。

该系统的一个有趣方面涉及到在同步状态 (原点) 的给定距离内所花费的时间量。假设映射 (5) 的动态接近于

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_n^2 - bx_ny_n \\ -bx_ny_n + ay_n^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

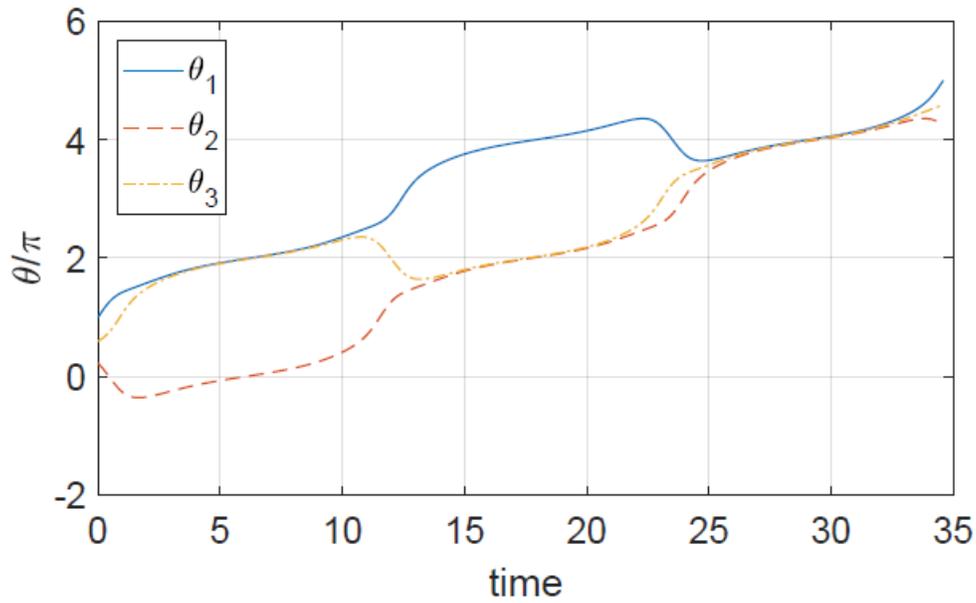


Figure 4: One period of the periodic orbit at the centre of the quasiperiodic regions in Fig. 3. Initially $\theta_1 = \pi$ and at the final time $\theta_1 = 5\pi$. Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75, \eta = 0.1$.

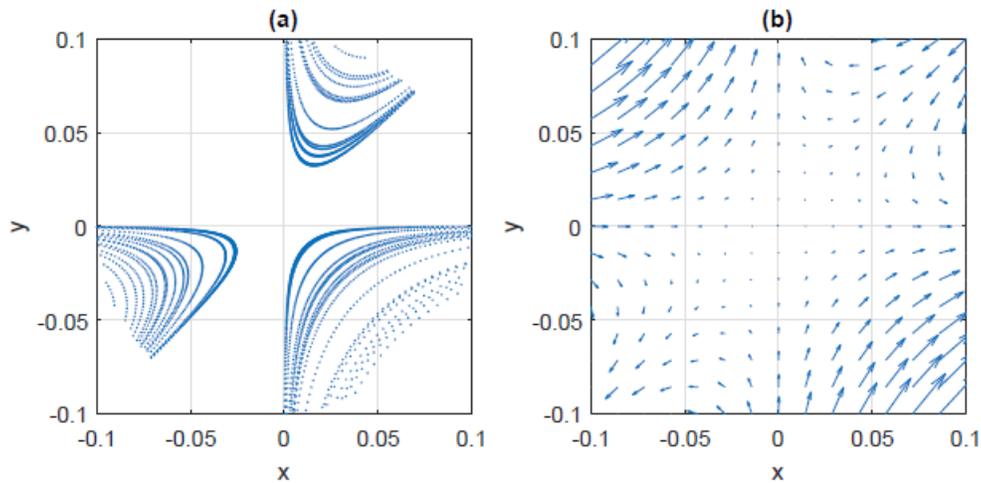


Figure 5: (a) points from the Poincaré section $\theta_1 = \pi$ with $d\theta_1/dt > 0$ with $\sqrt{x^2 + y^2} < 0.1$, i.e. in a neighbourhood of the fully synchronous state. (b) Direction field induced by the map (5), obtained by fitting a general second-order map to the points in panel (a). Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75, \eta = 0.1$.

对于某些正常数 a, b , 考虑初始条件 $(x_0, y_0) = (\epsilon, -\epsilon)$; $0 < \epsilon \ll 1$. y_n 从下衰变为零, 因此 x 动态近似为 $x_{n+1} = x_n + ax_n^2$. 由于 x_n 随时间变化缓慢, 我们可以用微分方程 $dx/dt = ax^2$, 其中 $x(0) = \epsilon$ 来近似这个映射. x 达到显著正值的时间扩展为 ϵ^{-1} . 这与双曲鞍相反, 它由 $dx/dt = \lambda x; dy/dt = -\mu y$ 对于正的 λ, μ . 用 $x(0) = \epsilon$ 求解 x 动力学, 得到 $-\ln \epsilon$ 的逃逸时间标度。

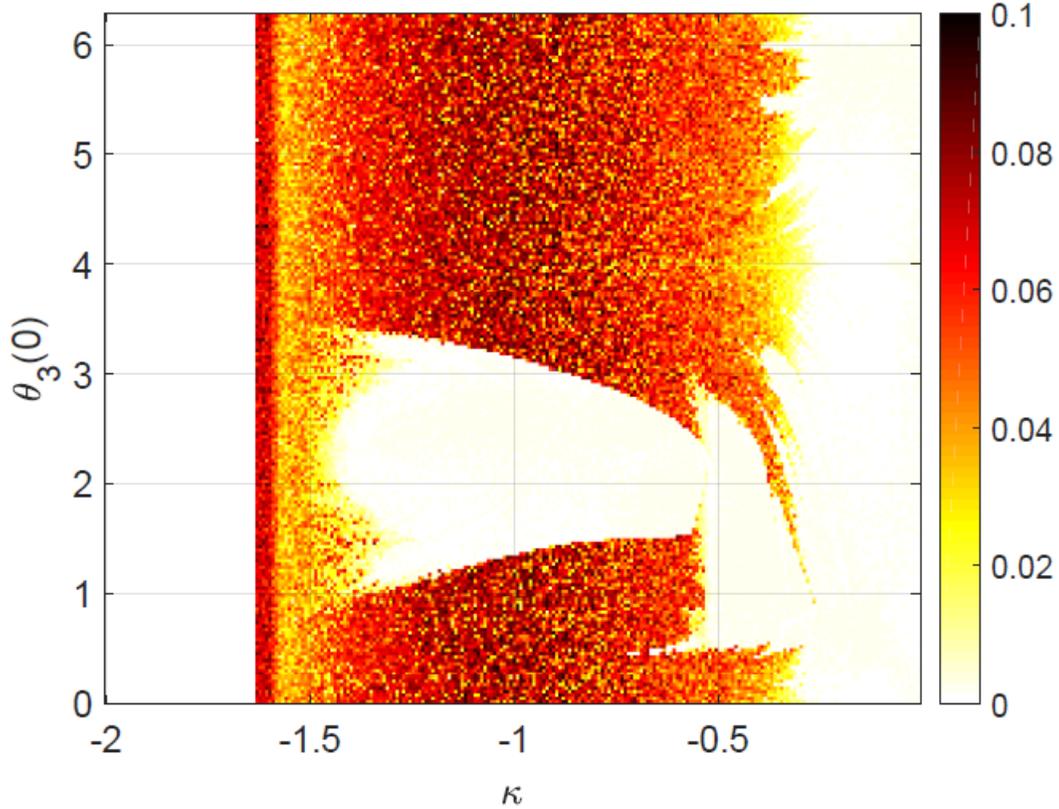


Figure 6: Maximal Lyapunov exponent for solutions starting with $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 4$ and $\theta_3(0)$ given by the value shown. Chaotic solutions have positive Lyapunov exponent. Parameters: $N = 3, n = 2, \eta = 0.1$.

我们现在考虑改变其他参数。对于固定 η , $\theta_1(0)$ 和 $\theta_2(0)$, 扫过 κ 和 $\theta_3(0)$; 我们得到图 6。我们看到, κ 的各种初始条件和值都会导致混沌行为, 而且如果 κ 太大、太负或太接近零, 运动就不会混沌 (至少对于这些初始条件而言)。大负 κ 的混沌行为的突然转变是由于这些 κ 值存在一个稳定的不动点。如果 κ 很小, 神经元就弱耦合。因此, 弱耦合振子理论是适用的 [6,13,35], 系统可以简化为只涉及相位差的一对方程。动力学将位于两个圆环上, 混沌动力学将是不可能的。正 κ 和随机选择初始条件 (未显示) 的模拟从未发现混沌行为, 与 [9] 中的结果一致。

对于固定 κ , $\theta_1(0)$ 和 $\theta_2(0)$, 扫过 η 和 $\theta_3(0)$; 我们得到图 7。我们还看到, η 的各种初始条件和值会导致混沌行为, 而且如果 η 太大, 运动就不会混沌 (至少对于这些初始条件而言)。通过改变 n 和 $\theta_3(0)$, 我们得到图 8。当 $n = 1$ 时, 解不是混沌的, 最大指数似乎随着 n 的增加而增加, 直到 $n = 10$ 左右, 然后减小, 导致混沌行为的 $\theta_3(0)$ 值的比例也是如此。

在极限 $n \rightarrow \infty$ 中, (2) 变成

$$I = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\theta_i - \pi) \quad (7)$$

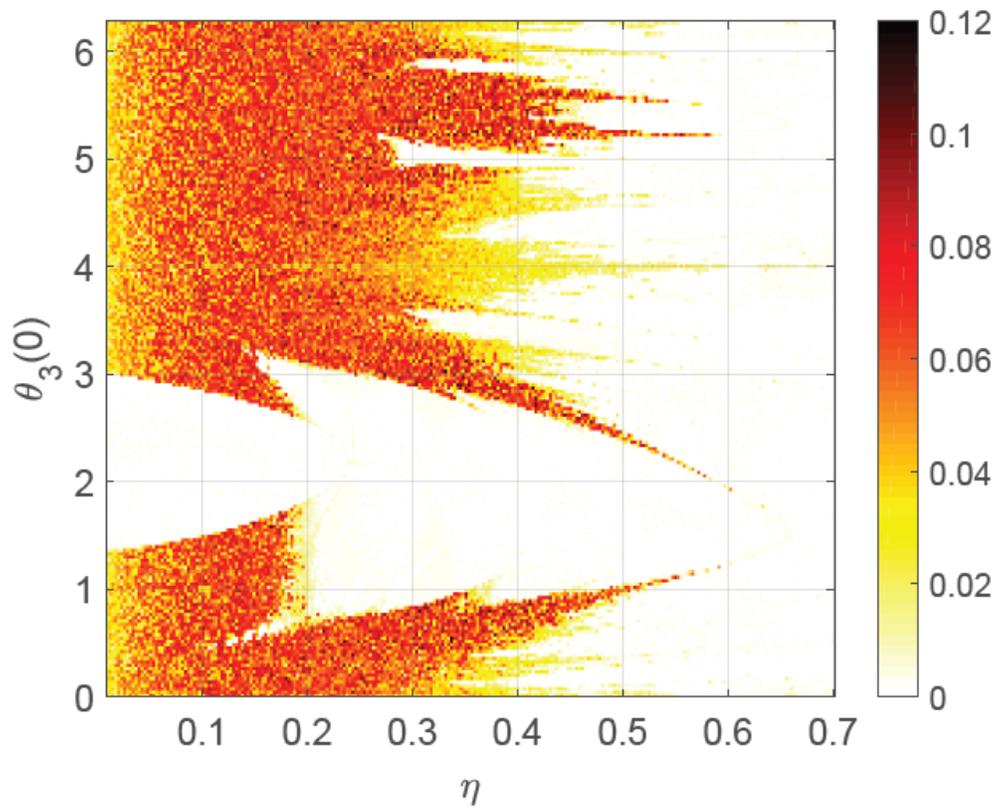


Figure 7: Maximal Lyapunov exponent for solutions starting with $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 4$ and $\theta_3(0)$ given by the value shown. Chaotic solutions have positive Lyapunov exponent. Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75$.

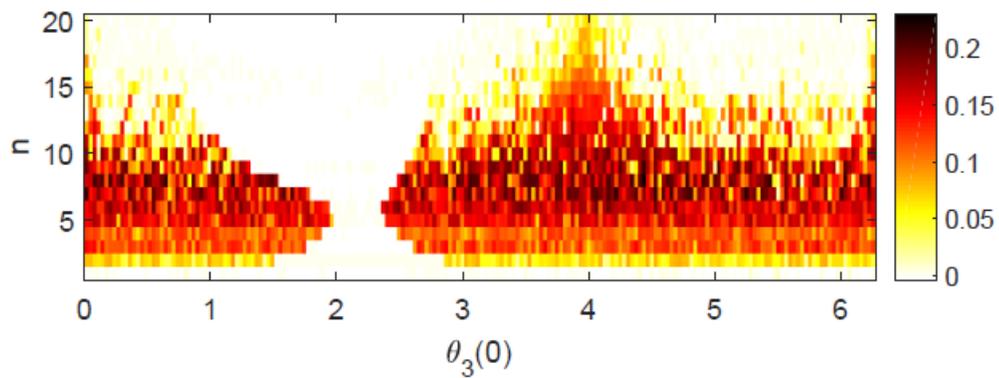


Figure 8: Maximal Lyapunov exponent for solutions starting with $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 4$ and $\theta_3(0)$ given by the value shown. Chaotic solutions have positive Lyapunov exponent. Parameters: $N = 3, \eta = 0.1, \kappa = -0.75$.

δ 是狄拉克函数。如果 t_j^k 是神经元 j 的 k 次放电时间，则有 [25]

$$I = \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \sum_k \delta(t - t_j^k) \quad (8)$$

超过 k 的总和只在过去的发射次数上。我们可以计算该网络的最大 Lyapunov 指数，如附录所示，我们发现该指数在所有初始条件下都为零。对于以平滑方式相互作用的神经网络和具有瞬时相互作用的非混沌网络，这种混沌解的二分法已经在 [25] 上讨论过。

现在考虑神经元不相同但系统仍然可逆的情况。为此，我们将 (1) 替换为

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 - \cos \theta_i + (1 + \cos \theta_i) (\eta_i + \kappa I) \quad (9)$$

解决 $\eta_1 = 0.1$ 和不同 η_2 和 η_3 。这样我们就得到了图 9。我们看到，随着这些参数的变化，混沌行为持续存在，但不是以一种简单的方式。

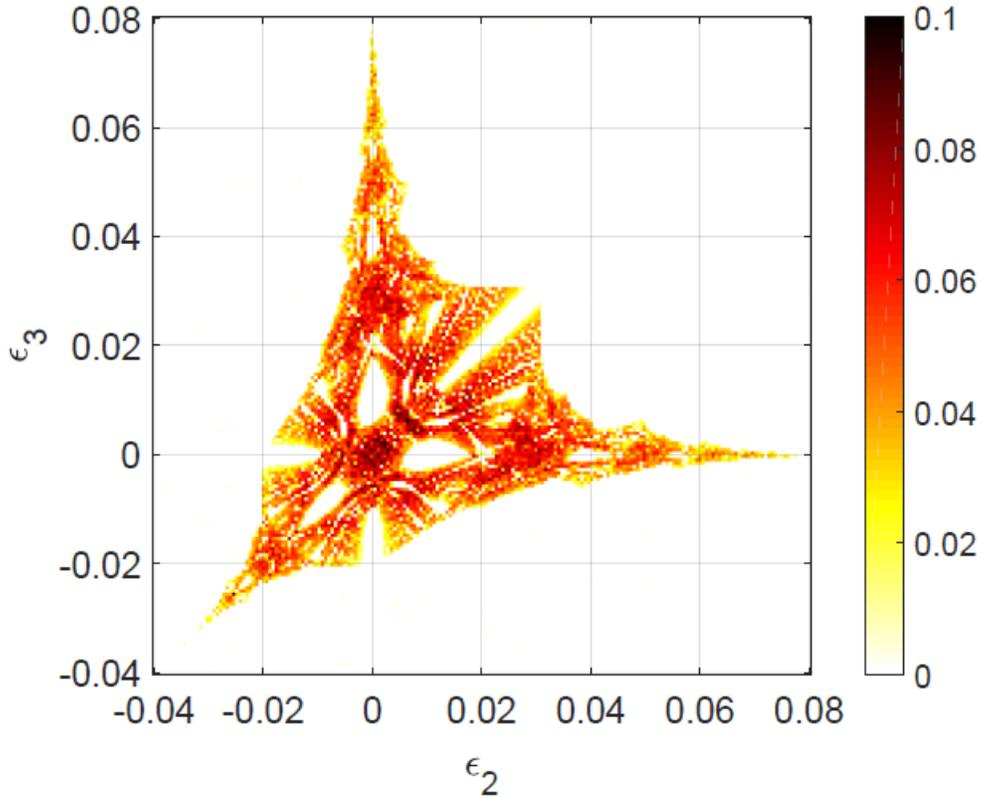


Figure 9: Maximal Lyapunov exponent for solutions starting with $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 4$ and $\theta_3(0) = 5$. Chaotic solutions have positive Lyapunov exponent. We have $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0.1, 0.1 + \epsilon_2, 0.1 + \epsilon_3)$ Parameters: $N = 3, n = 2, \kappa = -0.75$.

一种担忧是自耦合可能是不现实的，也是造成混沌行为的原因。去掉自耦，我们得到

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 - \cos \theta_i + (1 + \cos \theta_i) (\eta + \kappa I_i) \quad (10)$$

$i = 1, 2, 3$, 其中

$$I_i = \frac{a_n}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (1 - \cos \theta_j)^n \quad (11)$$

a_n 如 (3) 所示。研究网络 (10)-(11), 从图 10 可以看出, 即使没有自耦合, 网络在一定范围的初始条件下也可能是混沌的。

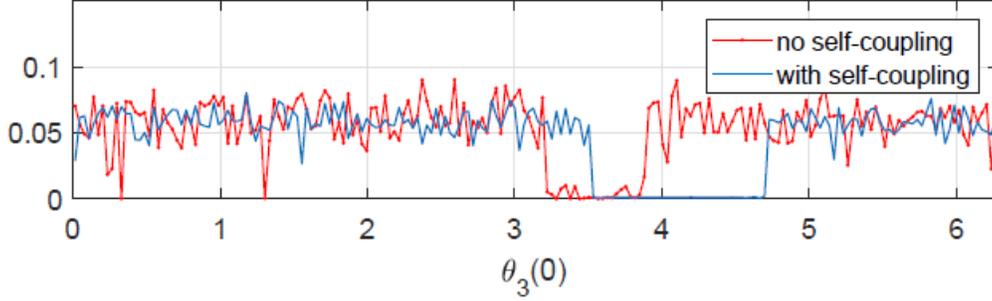


Figure 10: Maximal Lyapunov exponent for solutions starting with $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 2$ and $\theta_3(0)$ as shown. Blue solid line: the network (1)-(2), i.e. this is a vertical “slice” though Fig. 2 at $\theta_2(0) = 2$. Red dots and line: the network (10)-(11) (no self-coupling). We see that removing the self-coupling does not destroy the chaotic behaviour. Parameters: $N = 3$, $n = 2$, $\kappa = -0.75$, $\eta = 0.1$.

我们还考虑了抑制性和兴奋性神经元的混合, 将 (1) 修饰为

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 - \cos \theta_i + (1 + \cos \theta_i)(\eta + I); \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

其中

$$I = a_n [-0.75 (1 - \cos \theta_1)^n - 0.75 (1 - \cos \theta_2)^n + k (1 - \cos \theta_3)^n] / N \quad (13)$$

所以神经元 1 和 2 是抑制性的如果 $k < 0$, 神经元 3 是抑制性的如果 $k < 0$, 神经元 3 是兴奋性的。设 $\eta = 0.2$ 和 $n = 2$, 并随机选择初始条件, 我们发现 $k < 0$ 的混沌解, 而 $k < 0$ 的无混沌解 (未显示)。

3 4 个神经网络的结果

现在我们继续研究由 4 个神经元组成的网络, 用 (1)-(2) 表示, 其中 $N = 4$ 。我们不是系统地在相空间中搜索, 而是从 $[0, 2]$ 中随机独立地选择 θ_i 的初始值来确定该解的最大李雅普诺夫指数。在 κ 的许多离散值的每一个处这样做 2000 次, 我们得到图 11 中的结果, 它显示了一个随机初始条件将有一个特定的最大李雅普诺夫指数的概率。

如果我们去掉自耦, 得到的网络描述为

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 - \cos \theta_i + (1 + \cos \theta_i)(\eta + \kappa I_i) \quad (14)$$

$i = 1, 2, 3, 4$, 其中

$$I_i = \frac{a_n}{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (1 - \cos \theta_j)^n \quad (15)$$

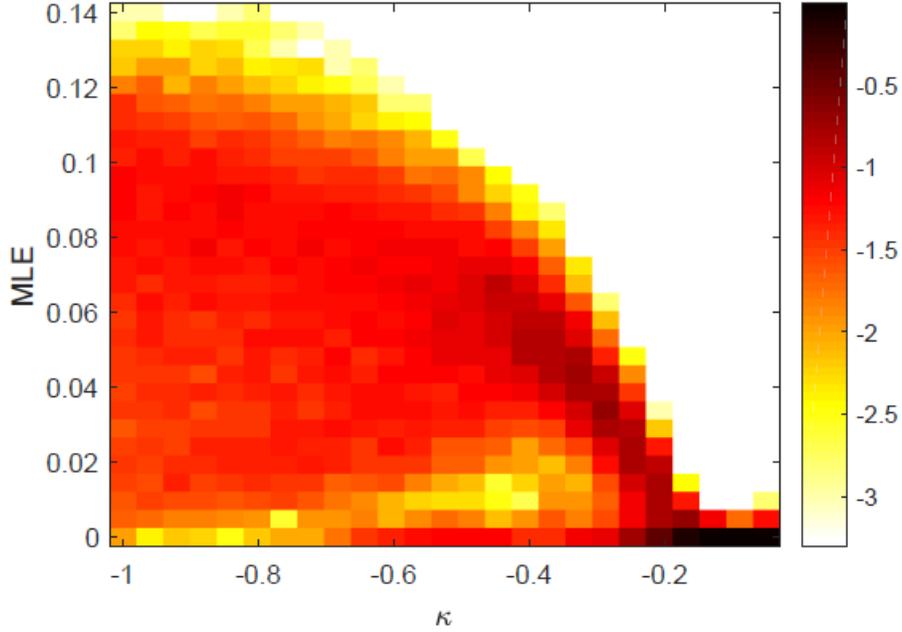


Figure 11: Probability of a randomly chosen initial condition having the maximal Lyapunov exponent (MLE) equal to the given value, as a function of κ . Log to the base 10 of the probability is shown, with white corresponding to low probability and black to high probability. (Bins with no entries are ignored.) This is an all-to-all coupled network. For a range of values of κ , many initial conditions result in chaotic solutions. Parameters: $N = 4, n = 2, \eta = 0.1$.

和 a_n 如 (3) 所示。扫过图 11 中的相同参数范围，我们得到非常相似的结果（未显示）。

现在考虑 4 个神经元在一个具有自耦合的环中，按指数排序。我们有 (14) 和

$$I_1 = a_n [(1 - \cos \theta_1)^n + (1 - \cos \theta_2)^n + (1 - \cos \theta_4)^n] / 3 \quad (16)$$

$$I_2 = a_n [(1 - \cos \theta_2)^n + (1 - \cos \theta_3)^n + (1 - \cos \theta_1)^n] / 3 \quad (17)$$

$$I_3 = a_n [(1 - \cos \theta_3)^n + (1 - \cos \theta_4)^n + (1 - \cos \theta_2)^n] / 3 \quad (18)$$

$$I_4 = a_n [(1 - \cos \theta_4)^n + (1 - \cos \theta_1)^n + (1 - \cos \theta_3)^n] / 3 \quad (19)$$

结果如图 12 所示。保持环结构，但去掉自耦合，结果类似于图 12(未显示)。

4 讨论

我们研究了小型 θ 神经网络中混沌行为的稳健性，该网络通过电流脉冲进行瞬时耦合。在一定的参数值范围内，混沌的解决方案与准周期的解决方案并存。这与其他可逆系统中的行为是一致的 [33, 34]。请注意，神经元不一定要完全相同才能观察到混沌行为。

如果我们通过在 (1) 的 RHS 中加入非物理项 $0.02 \sin \theta$ 来破坏系统的可逆性，并重复图 2 中所示的计算，我们发现没有任何初始条件会导致混沌行为（未显示）。这与之前的研究结果 [9] 一致，该研究发现，动态突触、缝隙连接耦合或使用电导动力学等破坏可逆性的修饰也破坏了混沌动力学。尽管 θ 神经元是不变圆分岔

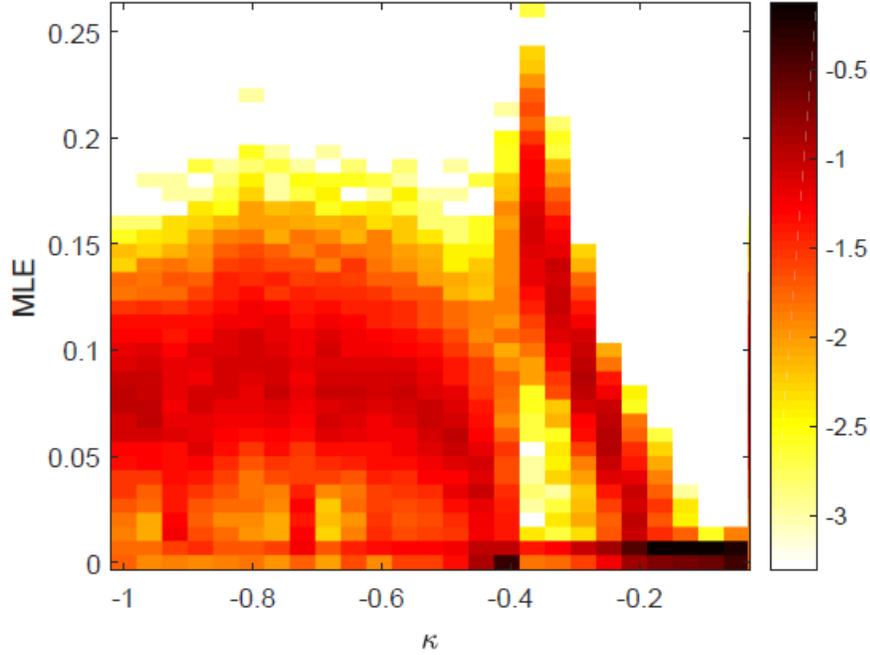


Figure 12: Probability of a randomly chosen initial condition having the maximal Lyapunov exponent (MLE) equal to the given value, as a function of κ . Log to the base 10 of the probability is shown, with white corresponding to low probability and black to high probability. (Bins with no entries are ignored.) This is a ring network with self-coupling described by (14) and (16)-(19). For a range of values of κ , many initial conditions result in chaotic solutions. Parameters: $N = 4, n = 2, \eta = 0.1$.

上鞍结的正常形式，但它的可逆性可能不会被同样经历这种分岔的其他神经元模型所共享，而是还原为正常形式的产物。

我们没有试图确定所看到的混沌行为的起源，也没有试图确定当参数变化时从准周期动力学到混沌动力学的转变。在耗散型动力系统中，混沌可能产生于 Shilnikov 分岔 [36]，但这里研究的系统是可逆的而不是耗散的。混乱在神经科学中的作用仍然存在争议，但这里的主要信息是，即使是非常小的简单神经网络也可以表现出令人惊讶的复杂行为，尽管这是由于它们的非一般性结构 (在这种情况下是可逆性)。因此，更简单的模型并不总是具有更简单的行为。

5 附录

我们有一个网络

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 - \cos \theta_i + (1 + \cos \theta_i)(\eta + \kappa I) \quad (20)$$

其中 I 由 (8) 给出。请注意，当神经元放电时，它对自身没有影响，因为 $1 + \cos \theta = 0$ 。使用转换 [25]

$$\tan(\phi/2) = \frac{\tan(\theta/2)}{\sqrt{\eta}} \quad (21)$$

我们有

$$\frac{d\phi_i}{dt} = 2\sqrt{\eta} + \frac{\kappa I}{\sqrt{\eta}}(1 + \cos \phi_i) \quad (22)$$

这个公式的优点是在 $I = 0$ 和 ϕ_I 之间以恒定的速度递增。假设 t_{s-1} 和 t_s 是任意神经元连续两次放电的次数。然后

$$\phi_i(t_s) = \phi_i(t_{s-1}) + 2\sqrt{\eta}(t_s - t_{s-1}) \quad (23)$$

当任何神经元激发时，我们可以利用状态依赖脉冲强迫微分方程 [38] 理论的结果来导出更新规则

$$\phi_l(t_s^+) = 2 \tan^{-1} \left[\tan \left(\frac{\phi_l(t_s^-)}{2} \right) + \frac{\pi\kappa}{N\sqrt{\eta}} \right] \equiv U[\phi_s(t_s^-)] \quad (24)$$

已知最后一次放电时间 t_{s-1} 以及此时神经元的状态，则下一次放电时间为

$$t_s = t_{s-1} + \min_i \left[\frac{\pi - \phi_s(t_{s-1})}{2\sqrt{\eta}} \right] \quad (25)$$

由于在没有耦合的情况下，神经元具有相同的驱动，下一个被激活的神经元将是最后一个激活事件后相位最大的神经元。从 t_{s-1} 触发事件到 t_s 触发事件的映射为

$$\phi_i(t_s) = f(\phi_i(t_{s-1})) = U[\phi_i(t_{s-1}) + 2\sqrt{\eta}(t_s - t_{s-1})] \quad (26)$$

$i = 1, 2, \dots, N$ 。如果神经元 j 能够触发事件，我们设置 $\phi_j(t_s) = -\pi$ 。映射 (26) $D(t_s)$ 的雅可比矩阵可以用 [25] 解析计算出来。 $D(t_s)$, $i = 1, 2, \dots, N$ ，第 i 个对角线项是 $d_i(t_s)$ ，其中

$$d_i(t_s) = \frac{\left[\tan \left(\frac{\phi_i(t_{s-1})}{2} \right) \right]^2 + 1}{\left[\tan \left(\frac{\phi_i(t_{s-1})}{2} \right) + \frac{\pi\kappa}{N\sqrt{\eta}} \right]^2 + 1} \quad (27)$$

假设神经元 j 是在时间 t_s 参与放电的神经元。那么从 (27) 开始的第 j 的对角线项等于 1。 $D(t_s)$ j 列中的 i 项是 $1 - d_i(t_s)$ ，其他未提到的项为零。通过映射 (26) 得到的解的最大 Lyapunov 指数可以由线性映射解范数的增长来确定

$$x(t_s) = D(t_s)x(t_{s-1}) \quad (28)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 x 的初始值是随机选取的。

6 参考文献

- [1] C. Geisler, N. Brunel, and X.-J. Wang, Journal of neurophysiology 94, 4344 (2005).
- [2] C. B. Orger and N. Kopell, Neural computation 17, 557 (2005).
- [3] C. Laing and C. Chow, Neural Comput. 13, 1473 (2001).
- [4] E. Marder and D. Bucher, Current biology 11, R986 (2001).
- [5] J. Wojcik, J. Schwabedal, R. Clewley, and A. L. Shilnikov, PloS one 9, e92918 (2014).
- [6] P. Ashwin, S. Coombes, and R. Nicks, The Journal of Mathematical Neuroscience 6, 2 (2016).
- [7] M. Golubitsky, I. Stewart, P.-L. Buono, and J. Collins, Nature 401, 693 (1999).
- [8] M. Golubitsky, I. Stewart, and D. G. Schaefer, Singularities and groups in bifurcation theory, vol. 51 (Springer-Verlag, 1985).
- [9] C. R. Laing, The Journal of Mathematical Neuroscience 8, 4 (2018).

-
- [10] S. Watanabe and S. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* 70, 2391 (1993).
- [11] S. Watanabe and S. Strogatz, *Physica D* 74, 197 (1994).
- [12] P. Ashwin, *Nonlinearity* 3, 603 (1990).
- [13] G. Ermentrout and D. Terman, *Mathematical Foundations of Neuroscience*, vol. 35 (Springer Verlag, 2010).
- [14] S. Strogatz, *Physica D* 143, 1 (2000).
- [15] J. Acebr on, L. Bonilla, C. P erez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* 77, 137 (2005).
- [16] C. Bick, M. Timme, D. Paulikat, D. Rathlev, and P. Ashwin, *Phys. Rev. Lett.* 107, 244101 (2011).
- [17] O. V. Popovych, Y. L. Maistrenko, and P. A. Tass, *Phys. Rev. E* 71, 065201 (2005).
- [18] C. Bick, P. Ashwin, and A. Rodrigues, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26, 094814 (2016).
- [19] C. Bick, M. Panaggio, and E. Martens, arXiv preprint arXiv:1802.05481 (2018).
- [20] C. R. Laing, *Chaos* 22, 043104 (2012).
- [21] M. Wolfrum, O. E. Omel'chenko, S. Yanchuk, and Y. L. Maistrenko, *Chaos* 21, 013112 (2011).
- [22] M. Wolfrum and E. Omel'chenko, *Physical Review E* 84, 015201 (2011).
- [23] B. Ermentrout, *Neural computation* 8, 979 (1996).
- [24] G. B. Ermentrout and N. Kopell, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 46, 233 (1986).
- [25] M. Monteforte and F. Wolf, *Physical review letters* 105, 268104 (2010).
- [26] P. So, T. B. Luke, and E. Barreto, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 267, 16 (2014).
- [27] D. Paz o and E. Montbri o, *Physical review letters* 116, 238101 (2016).
- [28] S. Luccioli and A. Politi, *Phys. Rev. Lett.* 105, 158104 (2010), URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105>
- [29] S. Jahnke, R.-M. Memmesheimer, and M. Timme, *Physical Review Letters* 100, 048102 (2008).
- [30] R. Zillmer, N. Brunel, and D. Hansel, *Physical Review E* 79, 031909 (2009).
- [31] B. Ermentrout, *Scholarpedia* 3, 1398 (2008), revision #122128.
- [32] T. B. Luke, E. Barreto, and P. So, *Neural computation* 25, 3207 (2013).
- [33] J. A. Roberts and G. R. W. Quispel, *Physics Reports* 216, 63 (1992).
- [34] A. Politi, G. Oppo, and R. Badii, *Physical Review A* 33, 4055 (1986).
- [35] H. Nakao, *Contemporary Physics* 57, 188 (2016).
- [36] L. P. Shilnikov and A. Shilnikov, *Scholarpedia* 2, 1891 (2007), revision #153014.
- [37] S. Coombes, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 7, 1101 (2008).
- [38] A. J. Catll a, D. G. Schaeer, T. P. Witelski, E. E. Monson, and A. L. Lin, *SIAM review* 50, 553 (2008).