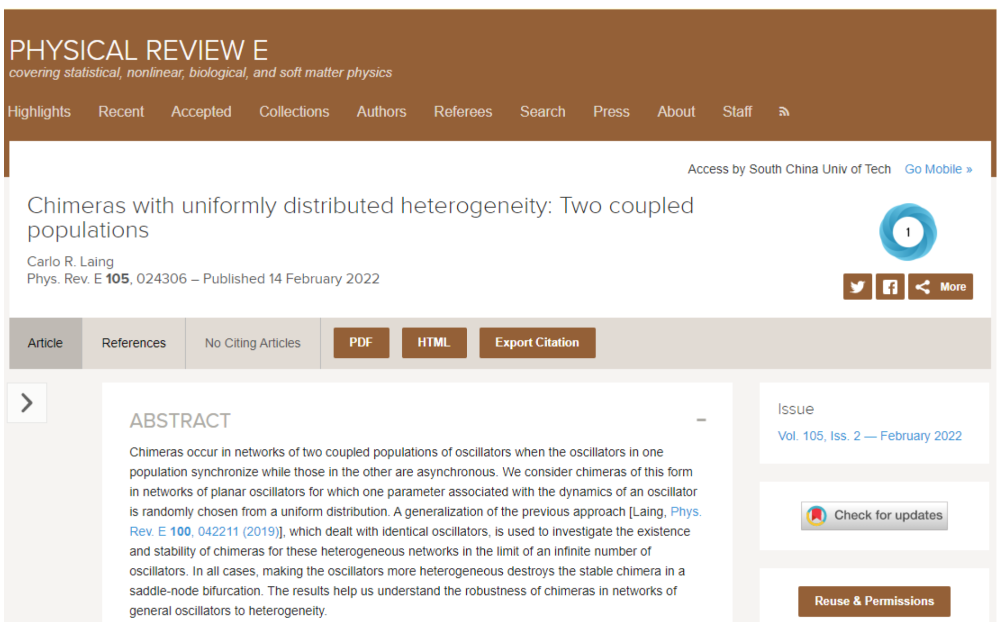
Principle of neural computation

具有均匀分布异构性的嵌合体: 两个耦合集群

Chimeras with uniformly distributed heterogeneity: two coupled populations


PHYSICAL REVIEW E
covering statistical, nonlinear, biological, and soft matter physics

Highlights Recent Accepted Collections Authors Referees Search Press About Staff

Access by South China Univ of Tech Go Mobile »

Chimeras with uniformly distributed heterogeneity: Two coupled populations

Carlo R. Laing
Phys. Rev. E **105**, 024306 – Published 14 February 2022

Article References No Citing Articles PDF HTML Export Citation

ABSTRACT

Chimeras occur in networks of two coupled populations of oscillators when the oscillators in one population synchronize while those in the other are asynchronous. We consider chimeras of this form in networks of planar oscillators for which one parameter associated with the dynamics of an oscillator is randomly chosen from a uniform distribution. A generalization of the previous approach [Laing, Phys. Rev. E **100**, 042211 (2019)], which dealt with identical oscillators, is used to investigate the existence and stability of chimeras for these heterogeneous networks in the limit of an infinite number of oscillators. In all cases, making the oscillators more heterogeneous destroys the stable chimera in a saddle-node bifurcation. The results help us understand the robustness of chimeras in networks of general oscillators to heterogeneity.

Issue
Vol. 105, Iss. 2 — February 2022

原著 Carlo R. Laing
翻译 Song Jian (School of Mathematics in SCUT)

Phys Rev E
journal homepage: https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.105.024306

Author information

Chimeras with uniformly distributed heterogeneity: two coupled populations

Article history:
Received 10 October 2021; Accepted 28 January 2022

CarloR.Laing[a]

AFFILIATIONS

[a]School of Natural and Computational Sciences, Massey University, Private Bag 102-904 North Shore Mail Centre, Auckland, New Zealand

摘要【ABSTRACT】

当一个振子群中的振子同步而另一个振子群是异步时，嵌合体 (Chimeras) 就发生在两个耦合振子群的网络中。我们考虑平面振子网络中这种形式的嵌合体，其与振子动力学有关的参数是从均匀分布 (uniform distribution) 中随机选取的。该方法在 [C.R.Laing, Physical Review E, 100,042211, 2019]，研究了相同振子，用于研究这些异质网络在无限个振子的极限下嵌合体的存在性和稳定性。在所有情况下，使振子更加异构会破坏鞍节点分岔中的稳定嵌合体。这些结果有助于我们理解一般振荡网络中的嵌合体对异质性的鲁棒性。

Keywords: Chimera states, Coupled oscillators, Bifurcations, Collective behavior in networks, Synchrony

文章导航

1 引言【INTRODUCTION】

嵌合体状态出现在耦合振荡器网络中，其特征是同时存在一组同步振荡器和异步振荡器 [1,2]。它们已经在具有非局部耦合的一维 [3,4] 和二维 [5,6] 域中被观察到，也被观察到由两个集群组成的网络，它们在一个集群中具有强耦合，而它们之间的耦合较弱 [7-9]。振荡器的类型有很多种，最常见的是相位振荡器 [10]，其他的包括 Stuart-Landau 振荡器 [11]，van der Pol 振荡器 [4,12]，带有惯性的振荡器 [13,14] 和**神经模型 [15-17]**。

许多关于嵌合体的研究只报告了数值求解一系列描述网络行为的常微分方程 (ODE) 的结果。这样的模拟只持续了一段时间，所以所看到的结果实际上可能是长时间瞬态的一部分 [18]。对于有限网络，存在有限大小效应的问题，例如正 Lyapunov 指数，随着网络大小的增加趋于零 [2] 或嵌合体的有限寿命 [19]。也许最重要的是，这种模拟无法检测到不稳定状态，因此通常不清楚当参数发生变化时，稳定嵌合体会发生什么，而不是它不再存在。

关于嵌合体存在的早期结果使用了自一致性方法 [10,11,20,21]，但这并没有提供关于解稳定性的信息。使用 Ott/Antonsen ansatz[22,23] 已经取得了很大的进展，因为它给出了感兴趣的量的演化方程，但它的使用仅限于通过相位差的正弦函数耦合的相位振荡器网络 [2,7,24]。Laing[11] 利用自一致性研究了两个由复变量描述的 Stuart-Landau 振子群网络中嵌合体的存在性。这后来被推广到 [25]，使用来自 [26] 的技术来确定这些嵌合体的稳定性，并研究了另外三种类型振荡器 (带惯量的 Kuramoto、FitzHugh-Nagumo 振荡器、延迟 Stuart-Landau 振荡器) 中的嵌合体网络。

[25] 中的方法是认识到，一个群体中的非相干振子位于相平面的曲线 $\mathcal{C}$ 上，而同步总体中的非相干振子可以用一对实变量来描述，因为所有这些振子都是相同的，并且经历相同的动力学过程。在每个集群中振子数量有限的情况下，曲线 C 由其形状 (在极坐标中与原点的距离) 和振子密度来描述，可以导出控制这些函数演化的偏微分方程 (PDE)[26]。然后，整个网络由一对偏微分方程和一对常微分方程描述，并通过积分进行耦合。

[25] 中的分析假设了相同的振子，但我们预计在任何实验情况下都不会出现这种情况 [27-29]，并且已知相同振子的网络可能与非相同振子的网络具有不同的动力学性质 [30]。在本文中，我们将 [25] 中的结果推广到非恒等振子的情况。具体地说，我们假设对于每个振荡器，一个与其动力学相关的参数是从均匀分布中随机选择的。在一定范围外，均匀分布为零，这意味着对于窄分布，在 [25] 中观察到的嵌合体类型仍然存在，并且可以通过对该论文中开发的技术的概括来描述。

考虑了全对全耦合振荡器网络中固有频率的各种分布，例如洛伦兹 [22]、双峰 [31]、高斯 [32,33]，贝塔 [34] 和统一 [35-39]。在向同步过渡的过程中，随着紧支撑分布和支撑无限的分布之间的耦合强度增加，存在显著差异。在前一种情况下，人们通常观察到一阶跃迁，而在后一种情况下，它是二阶跃迁。此外，对于有限网络，只有在频率分布具有紧凑支撑的情况下，才能实现完全同步 (其中所有振荡器都是锁相的)[40]。我们观察并利用这一现象来分析本文研究的网络。

以前的相关工作包括 [41]，它考虑了一个由 logistic 映射的耦合环子网络组成的网络，其中的一些参数是从均匀分布中随机选择的。作者研究了改变这些分布的宽度对完全同步的子网络数量的影响。

我们考虑由两个振子总体构成的网络。在第二节中，我们考虑了 Kuramoto 型相位振荡器，在第三节中，我们重新回顾了 [11] 中研究的 Stuart-Landau 振荡器。第四节考虑了带惯性的 Kuramoto 振荡器，也在 [11] 中进行了研究。我们在第五节中研究了范德堡尔振荡器，在第六节中得出结论。

2 KURAMOTO 相位振荡器

我们首先考虑两个相位振荡器通过相位差的正弦函数耦合。这种形式的网络之前已经被研究过 [7-9,42,43]。我们首先考虑固有频率的异质性，然后考虑集群间的耦合强度。

2.1 A. 分布频率

考虑两个 N 相振荡器的群体，每个由下式控制

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\theta_k - \theta_j - \alpha\right) + \frac{\nu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\theta_{N+k} - \theta_j - \alpha\right) \tag{1}$$

$j = 1, 2, ..., N$ 并且

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\theta_{N+k} - \theta_j - \alpha\right) + \frac{\nu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\theta_k - \theta_j - \alpha\right) \tag{2}$$

$j = N+1, N+2, ..., 2N$。μ 是群内部的耦合强度，υ 是集群之间的耦合强度。对于相同的 ω_j，这个系统可以归结为 [7-9] 中研究的系统，而如果从洛伦兹分布中选择，则与 [42] 中相同。相反，这里对于每个群体，ω_j 是从均匀分布 $p(\omega)$ 中随机选择的，$p(\omega)$ 仅在区间 B 上非零。

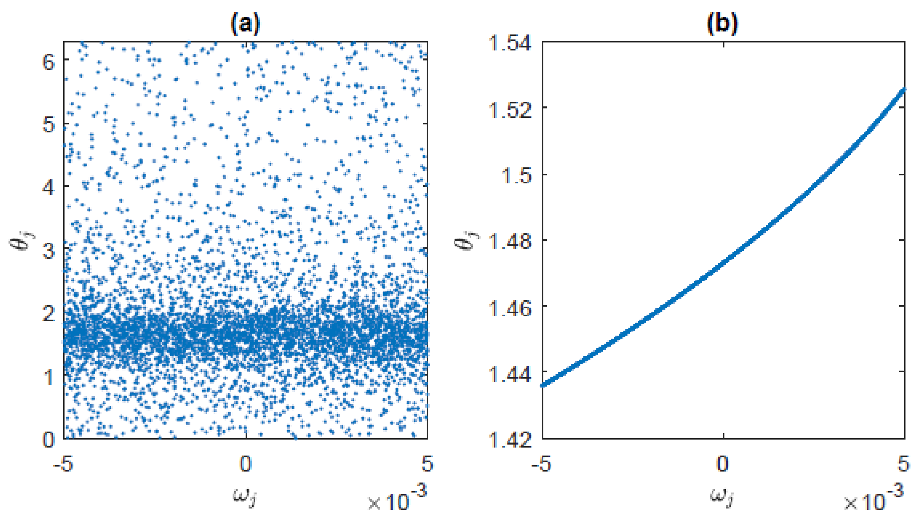


FIG. 1. A snapshot of a chimera state solution of (1)-(2). (a): population 1; (b): population 2. Note the different vertical axes. Parameters: $N = 5000, \mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, \Delta\omega = 0.005$.

图 1 显示了 (1)-(2) 的嵌合体状态示例，其中 $p(\omega)$ 在 $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$ 上是一致的。我们看到集群 1 是不连贯的，θ_j 对 ω_j 没有明显的依赖性，而集群 2 是同步的 (尽管不是相位同步)，θ_j 对 ω_j 有明显的依赖性。根据嵌合体状态的要求，两个群中振子的平均频率是不同的。[这种状态接近于相同振子的状态，所以我们也称它 (以及下面研究的许多状态) 为” 嵌合体”。我们现在从存在和稳定的角度来分析这种状态。

我们假设集群 2 是锁定的，并 $\theta_{N+j} = \phi_j$，$j = 1, 2, ..., N$。因此，使用三角恒等式，对于集群 2

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi_j}{dt} &= \omega_{N+j} + \frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin(\phi_k - \phi_j - \alpha) + \frac{\nu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin(\theta_k - \phi_j - \alpha) \\
&= \omega_{N+j} + (\mu\hat{S} + \nu S)\cos(\phi_j + \alpha) - (\mu\hat{C} + \nu C)\sin(\phi_j + \alpha)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

对于 $j = 1, 2, ..., N$，

$$
\hat{S} \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\phi_k; \quad \hat{C} \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos\phi_k; \quad S \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin\theta_k; \quad C \equiv \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos\theta_k \tag{4}
$$

对于集群 1

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta_j}{dt} &= \omega_j + \mathrm{Im}\left[e^{-i(\theta_j+\alpha)}\left(\frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{i\theta_k} + \frac{\nu}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{i\phi_k}\right)\right] \\
&= \omega_j + \frac{1}{2i}\left[e^{-i(\theta_j+\alpha)}Z - e^{i(\theta_j+\alpha)}\bar{Z}\right]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中

$$
Z \equiv \mu(C + iS) + \nu(\hat{C} + i\hat{S}) \tag{6}
$$

上划线表示复共轭。我们现在取连续极限 $N \to \infty$。对于集群 2，而不是具有相位 ϕ_j 和频率 ω_j 的单个振荡器，ω 现在是一个连续参数，我们有了函数 $\phi(\omega, t)$，且 $\omega \in \mathbf{B}$。它满足 (3) 的连续版本：

$$
\frac{\partial\phi(\omega,t)}{\partial t} = \omega + (\mu\hat{S} + \nu S)\cos(\phi + \alpha) - (\mu\hat{C} + \nu C)\sin(\phi + \alpha) \tag{7}
$$

图 1(b) 可以被视为显示了模拟中使用的 ω 的离散值 $\phi(\omega, t)$，以及 t 的特定值。

在这个限度内

$$
\hat{S} = \int_B \sin[\phi(\omega,t)]p(\omega)d\omega; \quad \hat{C} = \int_B \cos[\phi(\omega,t)]p(\omega)d\omega \tag{8}
$$

集群 1 由概率密度函数 $f(\theta, \omega, t)$ 描述，该函数满足连续性方程:

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}(fv) = 0 \tag{9}
$$

其中

$$
v(\theta,\omega,t) = \omega + \frac{1}{2i}\left[e^{-i(\theta+\alpha)}Z - e^{i(\theta+\alpha)}\bar{Z}\right] \tag{10}
$$

我们可以应用 Ott/Antonsen ansatz[22,23]，然后得到

$$
f(\theta,\omega,t) = \frac{p(\omega)}{2\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}a(\omega,t)^n e^{-in\theta} + \text{ c.c. }\right] \tag{11}
$$

其中 $c.c$ 是前一项的共轭复数。将此 ansatz 代入上述连续性方程，得到 $a(\omega, t)$:

$$
\frac{\partial a(\omega,t)}{\partial t} = i\omega a + \frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha}Z - e^{i\alpha}\bar{Z}a^2\right) \tag{12}
$$

最后

$$
C + iS = \int_B\int_0^{2\pi} f(\theta,\omega,t)e^{i\theta}d\theta d\omega = \int_B a(\omega,t)p(\omega)d\omega \tag{13}
$$

我们移动到一个以角速度 Ω 旋转的坐标系，其中 a 和 ϕ 都是常数。请注意，在这个框架中，集群 1 中的振荡器的相位不是恒定的，即使它们的密度是恒定的。因此我们对下述方程的不动点感兴趣：

$$\frac{\partial a(\omega,t)}{\partial t}=i(\omega-\Omega)a+\frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha}Z-e^{i\alpha}\bar{Z}a^2\right) \tag{14}$$

$$\frac{\partial \phi(\omega,t)}{\partial t}=\omega-\Omega+(\mu\hat{S}+\nu S)\cos(\phi+\alpha)-(\mu\hat{C}+\nu C)\sin(\phi+\alpha) \tag{15}$$

这是一对偏微分方程，一个用于复数 a，另一个用于角度 ϕ，通过积分 (8) 和 (13) 耦合。ϕ 的物理解释是明确的，对于固定的 ω，$f(\theta,\omega,t)$ 的角依赖性是一个泊松核，中心由 $a(\omega,t)$ 的参数给出，其"sharpness(锐度)"由 $a(\omega,t)$ 的大小决定 [24]。方程 (14)-(15) 可以被认为是等式 (11) 在 [7] 中对于非同振子的情况的推广。

由于在全局相移下的不变性，存在 (14)-(15) 的不动点的连续统 (continuum)，每个不动点都是彼此的位移。因此，我们附加了一个“钉扎 (pinning)”条件；在这种情况下， $=0$。这个附加方程允许我们找到所有的未知数，a，ϕ 和 ω。我们选择 $\phi(\omega)$ 在 $[-\Delta\omega,\Delta\omega]$ 上是一致的，并使用 50 点的高斯-勒让德求积来近似积分。因此，使用 $i=1,2,...,50$ 的点 $\omega_i=\Delta\omega x_i$ 来描述域 $[-\Delta\omega,\Delta\omega]$，$x_i$ 是 50 阶的勒让德多项式 $P_{50}(x)$ 的根。在 (8) 和 (13) 中关于 ω 的积分用加权和近似。

2.2 1. 结果

最明显的问题是：ω 的分布值对嵌合体的存在和稳定性有什么影响？使用伪弧长延拓 [44,45] 和可变 $\Delta\omega$ 我们得到图 2。当 $\Delta\omega$ 增加时，同一振子存在的稳定嵌合体在鞍节点分岔中被破坏，即振子变得更加异构。这与从洛伦兹分布中选择 ω_j 的情况相反，其中，增加异质性水平会使嵌合体中的相位分布变得更加尖锐，而同步组中的分布则变得不那么尖锐，直到两种状态在叉形分叉中相遇并合并，形成一种无法区分两个集群的状态 [42]。

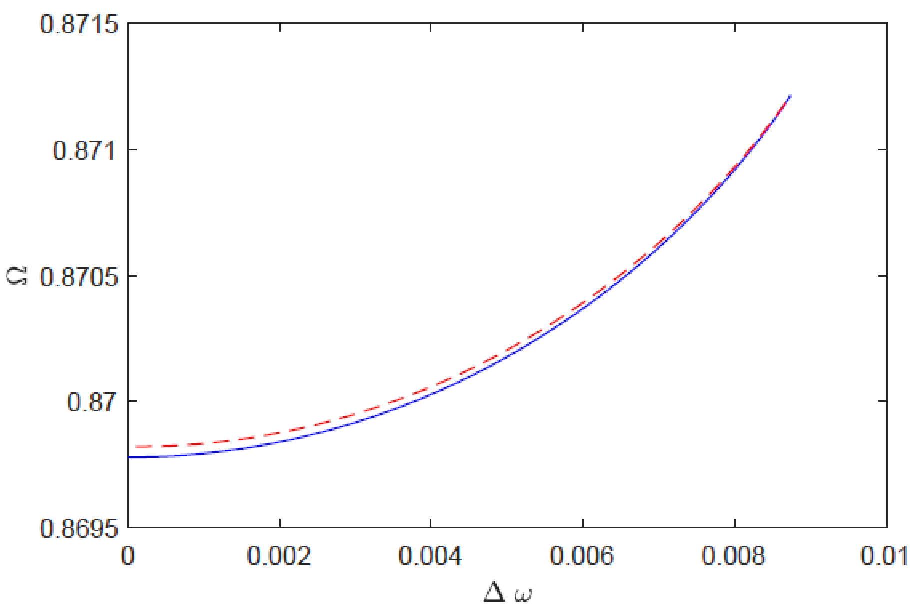


FIG. 2. Ω for fixed points of (14)-(15) describing chimera states. Solid: “stable”. Dashed: unstable. Parameters: $\mu=0.6,\nu=0.4,\alpha=\pi/2-0.08$.

与鞍节点分叉处的零特征值相对应的特征向量的 ϕ 分量显示在图 3 中。图 3，很明显，这是在最高的 ω_i 处，也就是说，随着 $\Delta\omega$ 的增加，具有最大固有频率的振荡器首先" 解锁"，导致" 相位穿越" [46]。

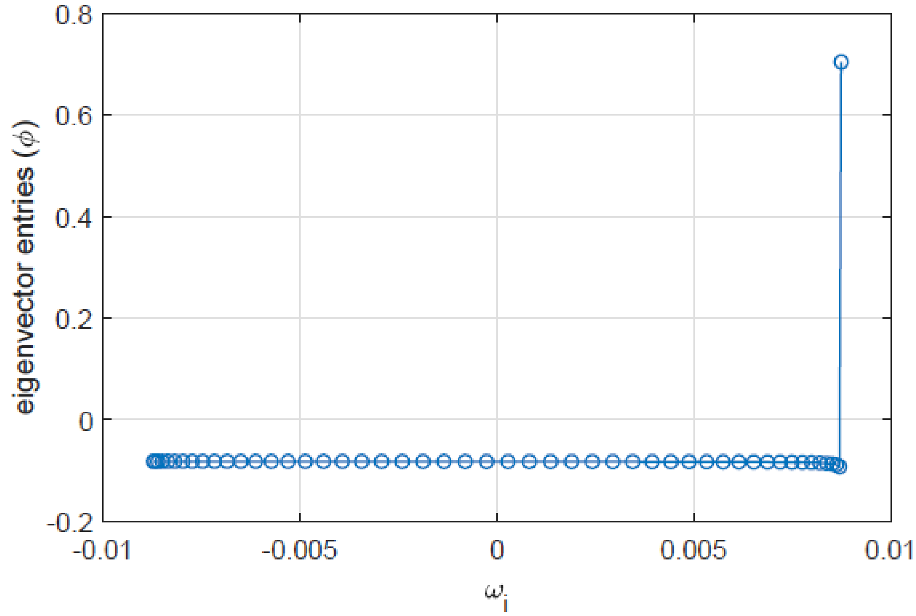


FIG. 3. Eigenvector localisation. ϕ component of the eigenvector corresponding to the zero eigenvalue at the saddle-node bifurcation shown in Fig. 2. Parameters: $\mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, \Delta\omega = 0.0087392$.

图 4 显示了关于 (14)-(15) 不动点的线性化的一组典型特征值。回顾一下，我们已经用 50 个点离散了 ω。我们在负实轴上看到 49 个点，每个点都对应于一个或两个相邻的 ϕ 值的局部扰动。还有 49 个实部为零的复共轭对，每个都对应于一个或两个相邻的 a 值上的扰动。这 147 个特征值与连续参数 ω 的离散化有关，大概是与 (14)-(15) 的不动点相关的连续谱的离散化。还有一个具有负实部的复数共轭对，当改变和的相对大小时，它可能穿过虚轴，导致 Hopf 分岔 [7]，以及对应于系统在全局相移下的不变性的单一零特征值。当 $\Delta\omega \to 0$，49 个负实特征值折叠成一个负实值，重数为 49，虚轴上的 49 个复共轭对折叠成虚轴上的一个复共轭对，重数还是 49。

因此，当提及图 2 中的解时，术语“稳定”实际上意味着“中性稳定”或“不稳定”。实际上，当对 (14)-(15) 进行数值积分时，即使在旋转坐标系中，系统也可能不会接近不动点，但仍然可以使用牛顿方法找到不动点。在 [8] 中观察到了类似的现象，这反映了这样一个事实，即当 (14) 在 ω 中离散时，每个关于 ω 的方程描述了由相同振荡器组成的网络的动力学，其动力学由 Watanabe/Strogatz-ansatz[30,47] 导出的方程更全面地描述。(Ott/Antonsen-ansatz 是 Watanabe/Strogatz-ansatz 的特例，对应于无限多个相同的振荡器，某些常数均匀分布 [8])

请注意，在频率均匀分布的类似网络 [48] 中已经看到了嵌合体，但在那里研究的模型中，群内和群之间的耦合强度是群内同步水平的函数，而不是这里所说的常数。

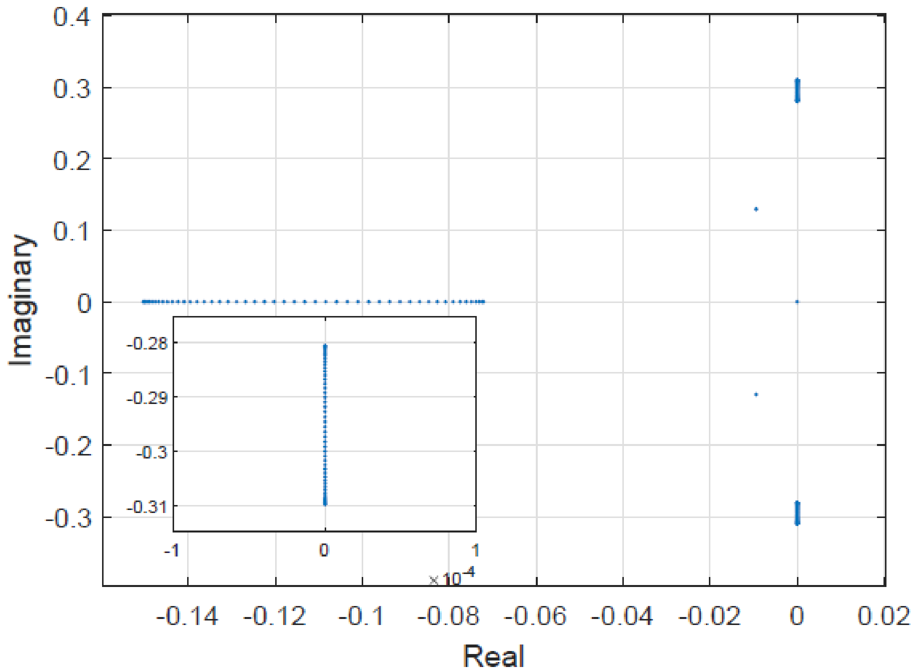


FIG. 4. Eigenvalues of the linearisation about a fixed point of (14)-(15). The inset shows a zoom of the main figure. Parameters: $\mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, \Delta\omega = 0.005$.

2.3 B. 群间耦合强度异质性

现在，作为另一个例子，考虑使用不同的 ν 值，即将 (1) 替换为

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega + \frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin(\theta_k - \theta_j - \alpha) + \frac{\nu_j}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin(\theta_{N+k} - \theta_j - \alpha) \tag{16}$$

并以同等方式替换 (2)。以 $p(\nu)$ 中的 ν 为例，是 $[\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0 + \Delta\nu]$ 上的均匀分布。以与上面类似的方式，我们推导出了演化方程

$$\frac{\partial a(\nu,t)}{\partial t} = -i\Omega a + \frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha}Z - e^{i\alpha}\bar{Z}a^2\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial \phi(\nu,t)}{\partial t} = -\Omega + (\mu\hat{S} + \nu S)\cos(\phi + \alpha) - (\mu\hat{C} + \nu C)\sin(\phi + \alpha) \tag{18}$$

其中

$$\hat{S} = \int_B \sin[\phi(\nu,t)]p(\nu)d\nu; \quad \hat{C} = \int_B \cos[\phi(\nu,t)]p(\nu)d\nu \tag{19}$$

和

$$C + iS = \int_B a(\nu,t)p(\nu)d\nu \tag{20}$$

B 是区间 $[\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0 + \Delta\nu]$，在不失去一般性的情况下，我们已经设置了 $\omega = 0$。注意通过 (6) 定义的 Z 不再是一个标量，而是连续参数 ν 的函数。根据 (17)-(18) 的不动点，随着 $\Delta\nu$ 的增加，我们得到了图 5，这与图 2 非常相似。图 5 中关于“稳定”状态的线性化的特征值与图 4 中所示的特征值相似，原因与上面讨论的类似。

我们可以对另外两个参数 α 和 μ 进行类似的分析，但现在我们继续讨论由两个变量描述的振荡器。

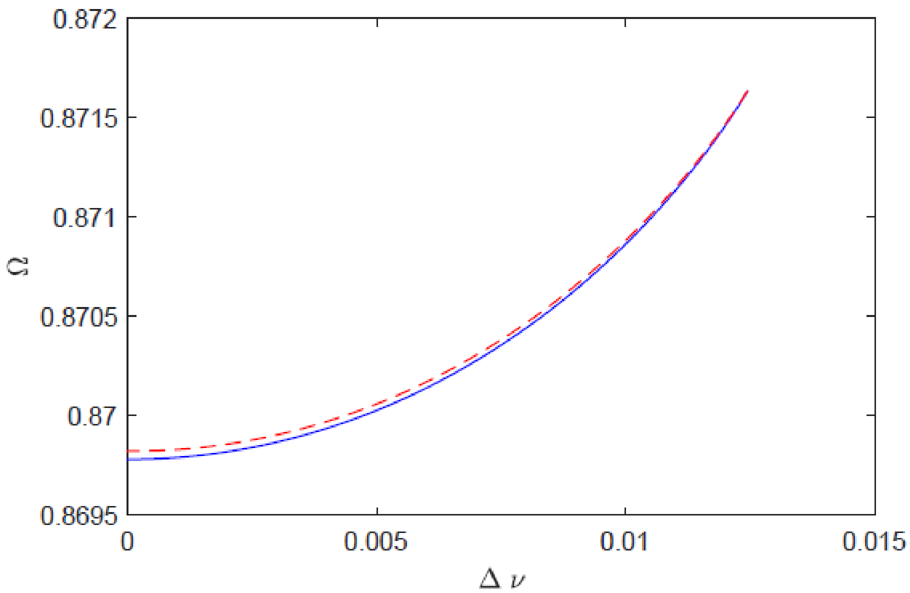


FIG. 5. Ω for fixed points of (17)-(18) describing chimera states. Solid: "stable". Dashed: unstable. Parameters: $\mu = 0.6, \nu_0 = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08$.

3 3.STUART-LANDAU 振荡器

我们现在考虑 [11] 在两个 Stuart-Landau 振子群网络中发现的嵌合状态，每个振子由一个复变量描述。

3.1 A. 非均匀频率

动力学方程为

$$\frac{dX_j}{dt} = i\omega_j X_j + \epsilon^{-1}\left\{1-(1+\delta\epsilon i)\left|X_j\right|^2\right\}X_j + e^{-i\alpha}\left(\frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k + \frac{\nu}{N}\sum_{k=1}^{N}X_{N+k}\right) \tag{21}$$

其中，$j = 1, \ldots, N$ 且

$$\frac{dX_j}{dt} = i\omega_j X_j + \epsilon^{-1}\left\{1-(1+\delta\epsilon i)\left|X_j\right|^2\right\}X_j + e^{-i\alpha}\left(\frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}X_{N+k} + \frac{\nu}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k\right) \tag{22}$$

对于 $j = N+1, ..., 2N$，其中每个 $X_j \in \mathbb{C}$ 以及 $\epsilon, \delta, \alpha, \mu, \nu$ 都是实参数。和以前一样，μ 是群内的耦合强度，ν 是集群之间的耦合强度。ω_j 是从 $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$ 上的均匀分布中随机选择的。

图 6 显示了 (21)-(22) 的稳定嵌合体示例，振荡器由其 ω_j 值着色。(类似的图出现在 [25] 中。) 我们看到集群 2 是同步的，振子位于一条开放曲线上，它们在曲线上的位置由它们的非均匀参数 ω_j 决定。集群 1 是不相干的，而且振荡器的位置和它的值 ω_j 之间似乎没有相关性。集群 1 中的振子似乎都位于一条闭合曲线上，但是下面我们会看到，不同的 ω_j 值的振子实际上位于稍微不同的曲线上，并且以略微不同的平均频率沿着这些曲线移动。

要分析嵌合体状态，令 $X_{N+j} = Y_j$，$j \in 1, .., N$，其中 Y_j 以相同的速度绕原点旋转，即集群 2 是同步的。

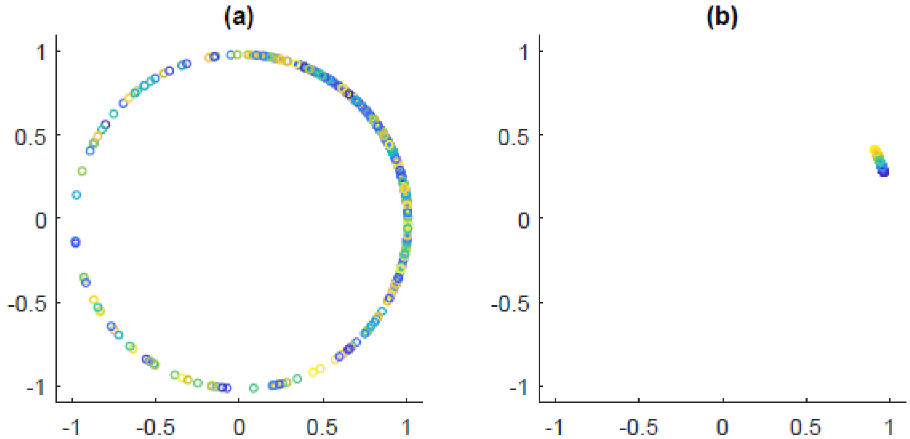


FIG. 6. A snapshot of a chimera state solution of (21)-(22), showing the X_j in the complex plane. The points are coloured by their ω_j value. (a): population 1; (b): population 2. Parameters: $N = 500, \epsilon = 0.05, \delta = -0.01, \mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, \Delta\omega = 0.01$.

让

$$\widehat{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k \quad \text{and} \quad \widehat{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \tag{23}$$

我们有

$$\frac{dY_j}{dt} = i\omega_{N+j}Y_j + \epsilon^{-1}\left\{1 - (1+\delta\epsilon i)\left|Y_j\right|^2\right\}Y_j + e^{-i\alpha}(\mu\widehat{Y} + \nu\widehat{X}) \tag{24}$$

对于 $j = 1, \ldots, N$ 且群中的每个振子都满足

$$\frac{dX_j}{dt} = i\omega_j X_j + \epsilon^{-1}\left\{1 - (1+\delta\epsilon i)\left|X_j\right|^2\right\}X_j + e^{-i\alpha}(\mu\widehat{X} + \nu\widehat{Y}) \tag{25}$$

对于 $j = 1, \ldots, N$。将集群 1 转换为极坐标 $X_j = r_j e^{i\phi_j}$，我们有

$$\frac{dr_j}{dt} = \epsilon^{-1}\left(1 - r_j^2\right)r_j + \operatorname{Re}\left[e^{-i(\alpha+\phi_j)}(\mu\widehat{X} + \nu\widehat{Y})\right] \equiv F\left(r_j, \phi_j, \widehat{X}, \widehat{Y}\right) \tag{26}$$

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j - \delta r_j^2 + \frac{1}{r_j}\operatorname{Im}\left[e^{-i(\alpha+\phi_j)}(\mu\widehat{X} + \nu\widehat{Y})\right] \equiv G\left(r_j, \phi_j, \widehat{X}, \widehat{Y}, \omega_j\right) \tag{27}$$

我们现在取 $N \to \infty$ 的连续极限。公式 (24) 被替换为

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\omega, t) = i\omega Y + \epsilon^{-1}\left\{1 - (1+\delta\epsilon i)|Y|^2\right\}Y + e^{-i\alpha}(\mu\widehat{Y} + \nu\widehat{X}) \tag{28}$$

推广 [25,26] 中的理论，我们假设具有特定值的振荡器 ω 位于复平面上的曲线 $\mathcal{C}(\omega)$ 上，该曲线由与正实轴的角度 ϕ 来描述。从原点到 $\mathcal{C}(\omega)$ 的角度 ϕ 的距离是 $R(\phi, t; \omega)$，在这一点上的振荡器的密度是 $P(\phi, t; \omega)$。函数 R 和 P 的演化由下式给出

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\phi, t; \omega) = F(R, \phi, \widehat{X}, \widehat{Y}) - G(R, \phi, \widehat{X}, \widehat{Y}, \omega)\frac{\partial R}{\partial \phi} \tag{29}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\phi, t; \omega) = -\frac{\partial}{\partial \phi}[P(\phi, t; \omega)G(R, \phi, \widehat{X}, \widehat{Y}, \omega)] + D\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}P(\phi, t; \omega) \tag{30}$$

出于数值稳定性的考虑，我们在 (30) 中加入了少量的扩散，强度为 D(和 [26] 一样)。在连续极限中，我们有

$$\widehat{X}=\int_B p(\omega)\int_0^{2\pi} P(\phi,t;\omega)R(\phi,t;\omega)e^{i\phi}d\phi d\omega \tag{31}$$

和

$$\widehat{Y}=\int_B Y(\omega,t)p(\omega)d\omega \tag{32}$$

其中 B 是非形式密度 $p(\omega)$ 的支持。方程 (28)-(32) 形成一组 PDEs，通过积分耦合。请注意，(21)-(22) 在任何常数 γ 的全局相移 $X_j \rightarrowtail X_j e^{i\gamma}$ 下是不变的，因此我们可以移动到一个旋转的坐标系，其中 $Y(\omega,t)$ 是常数。移动到一个以速度 Ω 旋转的坐标系中，其效果是将 (27) 中的 ω_j 替换为 $\omega_j-\Omega$，将 (28) 中的 ω 替换为 $\omega-\Omega$。

3.2 1. 结果

我们对 (28)-(32) 进行数值积分以求得稳定解。图 7 中显示了一个示例。我们看到，$R(\phi)$ 对 ω 的依赖非常弱 (面板 (a) 中曲线之间的距离为 10^{-5})，而 $P(\phi)$ 对 ω 的依赖更强。我们使用 128 个等距的点进行离散，并实现了与光谱 [49] 有关的导数。$P(\omega)$ 在 $[-\Delta\omega,\Delta\omega]$ 上是均匀的，我们使用 10 个点的 Gauss-Legendre 四分法实现 (31)-(32) 中对 ω 的积分，因此使用的 ω 的离散值是 $\omega_i=\Delta\omega x_i$，$i=1,2,...,10$，其中 x_i 是 10 阶 Legendre 多项式 $P_{10}(x)$ 的根。对于每个 ω_i，我们通过设置一个角度网格点的 P 等于 $1/(\Delta\phi)$ 减去所有其他网格点的值的总和来执行概率守恒，其中 $\Delta\phi=2\pi/128$，ϕ 是网格间距 [50]。

移动到一个旋转的坐标框架，并跟随该框架中 (28)-(32) 的稳定状态，当 $\Delta\omega$ 增加时，我们得到图 8。如同在第 IIA1 节中，我们看到稳定解在一个鞍节点分叉中被破坏。关于稳定状态的线性化的特征值与 [25] 中的图 3 和 [26] 中的图 5 相似，即它们形成两个集群 (未显示)。那些在集群中具有大的负实部的特征值与动力学的 R 分量的扰动有关，而那些在另一个集群中几乎稳定的特征值则与 P 分量的扰动有关。

我们从 [25] 中知道，如果 $\Delta\omega=0$，增加也会在一个鞍节点分叉中破坏嵌合体。沿着这个分岔和图 8 中的分岔，我们得到图 9，其中前一个分岔用蓝色表示，后一个用红色表示。有趣的是，它们并不是同一条曲线的一部分。两条鞍节点分岔的曲线上都有 Takens-Bogdanov 点，在这一点上，围绕固定点的动力学的线性化有一个双零特征值 [51, 52]。如图 9 所示，在这两个点上会产生一条霍普夫分岔的曲线。我们预计在这些点的附近还有其他的全局分叉，但在数值上找到它们是很困难的。

3.3 B. 群间耦合强度异质性

现在考虑 ν 中的异质性，我们将 (21) 替换为

$$\frac{dX_j}{dt}=i\omega X_j+\epsilon^{-1}\left\{1-(1+\delta\epsilon i)\left|X_j\right|^2\right\}X_j+e^{-i\alpha}\left(\frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k+\frac{\nu_j}{N}\sum_{k=1}^{N}X_{N+k}\right) \tag{33}$$

对于 $j=1,2,...,N$，同样适用于集群 2，并从 $[\nu_0-\Delta\nu,\nu_0+\Delta\nu]$ 上的均匀分布中选择 ν_j。选择 $\mu=0.625$ 和 $\mu=0.375$(和 $\delta=-0.01$，$\alpha=pi/2-0.08$)，我们从 [25] 中知道，如果 $\Delta\nu=0$，增加 ϵ 会导致稳定的嵌合体发生超临界 Hopf 分叉。当 $\epsilon=0.03$ 时，增加 $\Delta\nu$，我们在 $\Delta\nu\approx 0.156$ 处发现一个鞍结分叉，在这两个分叉之后，我们得到图 10。

曲线在鞍节点/Hopf 分岔中相遇，其中关于不动点的线性化既有一个零特征值，又有一对纯虚的特征值的复共轭 [51, 52]。我们所考虑的这种形式的静止嵌合体 (在一个均匀旋转的坐标框架中 Y 是常数) 只存在于鞍

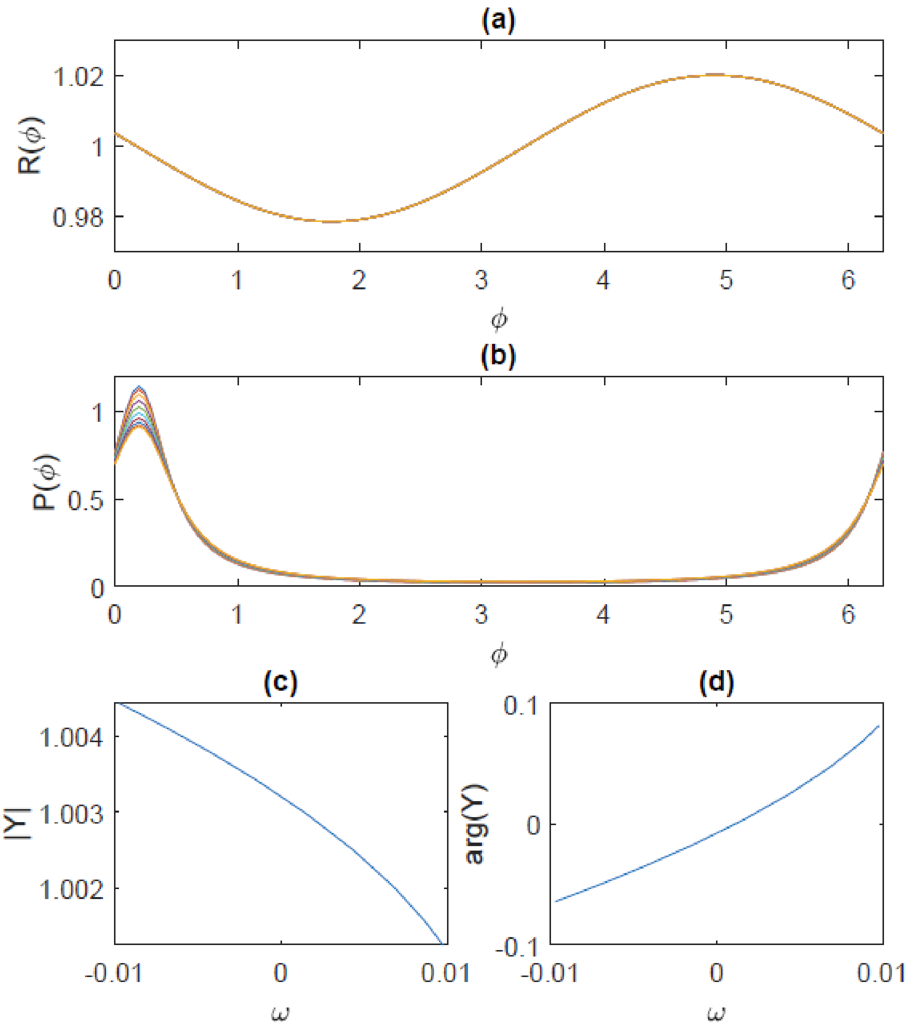


FIG. 7. Snapshot of a solution of (29)-(32) for which $\hat{Y}$ is real. This solution is stationary in a coordinate frame rotating at $\Omega = 0.86678$. (a): $R(\phi)$ for the 10 different values of ω_i, (b): $P(\phi)$ for the 10 different values of ω_i. (c) and (d): modulus and argument of Y, respectively, as functions of ω. Parameters: $\epsilon = 0.05, \delta = -0.01, \mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, D = 10^{-8}, \Delta\omega = 0.01$.

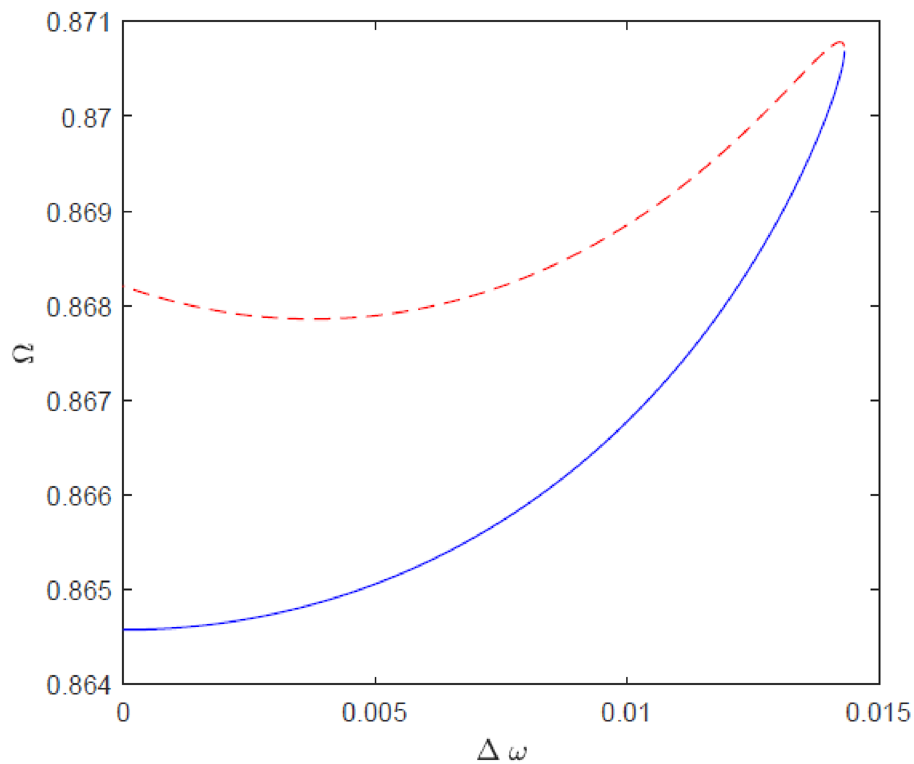


FIG. 8. Ω as a function of $\Delta\omega$ for fixed points (in a rotating coordinate frame) of (28)-(32) describing a chimera. Solid: stable; dashed: unstable. Parameters: $\epsilon = 0.05, \delta = -0.01, \mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, D = 10^{-8}$.

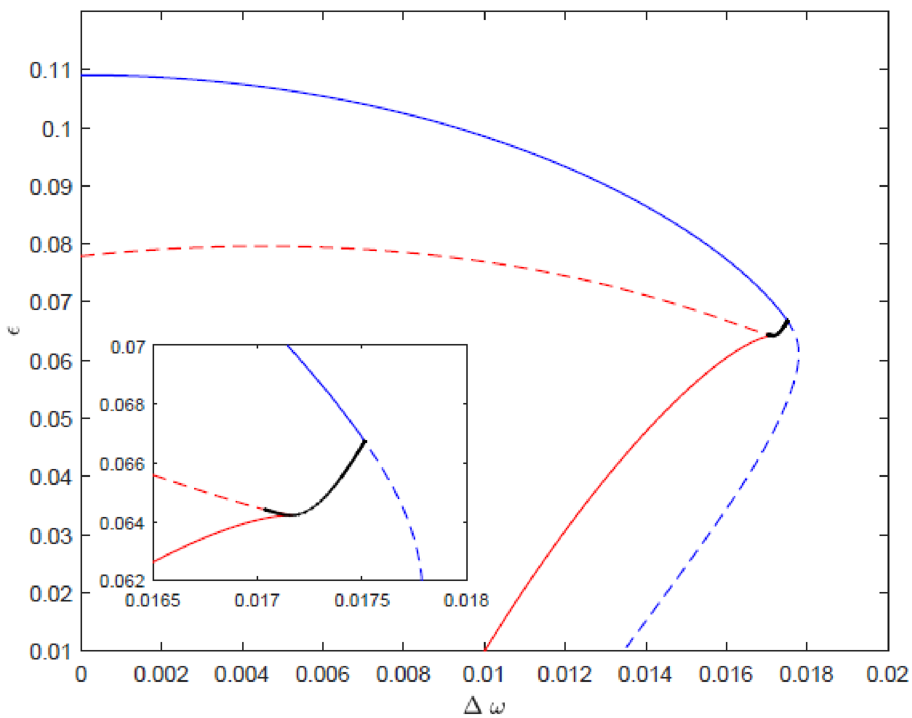


FIG. 9. Saddle-node bifurcation curves (red and blue) and Hopf bifurcation curve (black) for fixed points of chimera solutions of (28)-(32). The inset shows a zoom of the Hopf bifurcation curve. The chimera is stable to the left of and below the solid curves, and above the Hopf bifurcation curve. Parameters: $\delta = -0.01, \mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.08, D = 10^{-8}$.

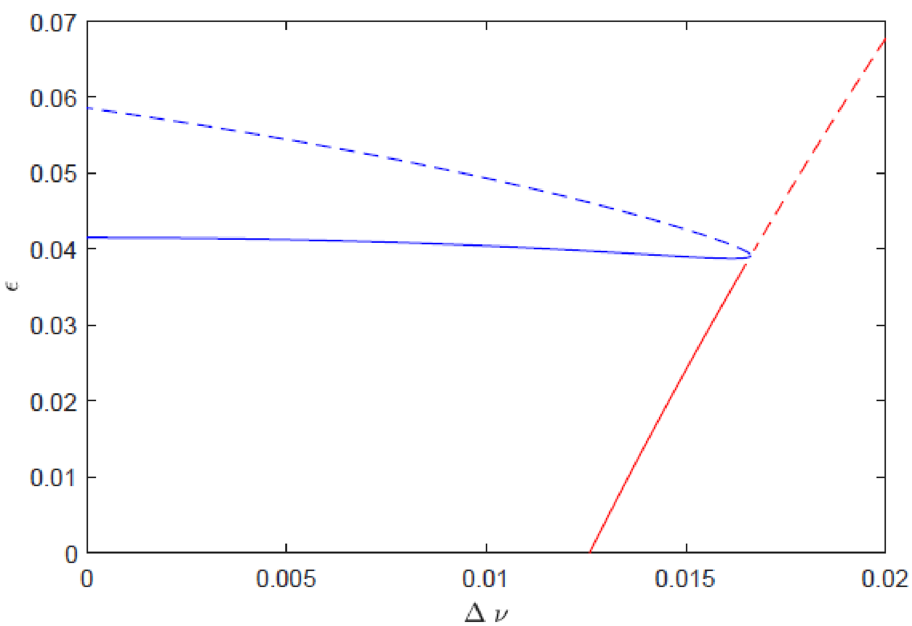


FIG. 10. Saddle-node bifurcation (red) and Hopf bifurcation (blue) for fixed points of (28)-(32). There is a stable stationary chimera in the region bounded by the axes and the solid curves. There is a stable periodic chimera above the lower (solid blue) Hopf bifurcation curve. Parameters: $\delta = -0.01, \mu = 0.625, \nu_0 = 0.375, \alpha = \pi - 0.08, D = 10^{-8}, \omega = 0$.

节点分叉曲线的左边。这种形式的稳定静止状态只存在于图 10 中的轴线和实心曲线所限定的区域。它们通过超临界 Hopf 分叉变得不稳定，因为增加了 ϵ，导致了稳定的周期性嵌合体。

为了更好地理解图 10，对于 $\epsilon = 0.05$，随着 $\Delta\nu$ 的减小和虚线鞍节点曲线的交叉，创建了一对不动点，一个具有三个不稳定特征值，一个具有两个。当 $\Delta\nu$ 进一步减小时，具有三个不稳定特征值的不动点经历 Hopf 分叉，获得两个稳定方向。所以在实线和虚线 Hopf 分叉曲线之间，一个不动点有一个不稳定的特征值，另一个有两个。当 ϵ 减小时，具有两个不稳定特征值的不动点经历 Hopf 分叉，变得稳定。如果 $\Delta\nu$ 增加，这个稳定的不动点在鞍结分岔中被破坏，不动点有一个不稳定的特征值。我们预计在鞍结/Hopf 分叉的邻域中会有其他全局分叉曲线，但在数值上很难找到它们。

4 有惯性的 Kuramoto

我们现在考虑一个由 N 个具有惯性的 Kuramoto 振子的两个群组成的网络，其中频率具有异质性。该系统由

$$m\frac{d^2\theta_i^{(1)}}{dt^2} + \frac{d\theta_i^{(1)}}{dt} = \omega_i^{(1)} + \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(1)} - \theta_i^{(1)} - \alpha\right) + \frac{\nu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(2)} - \theta_i^{(1)} - \alpha\right) \tag{34}$$

$$m\frac{d^2\theta_i^{(2)}}{dt^2} + \frac{d\theta_i^{(2)}}{dt} = \omega_i^{(2)} + \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(2)} - \theta_i^{(2)} - \alpha\right) + \frac{\nu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(1)} - \theta_i^{(2)} - \alpha\right) \tag{35}$$

其中 m 是“质量”，α, μ, ν 是参数，上标标记了群。当 $m = 0$ 且 ω_i 均相等时，这又回到了之前研究的情况 [7,8]。当 $m = 0$ 且 ω_i 从均匀分布中选择时，它恢复到第 2 节中研究的值，而当 $m \neq 0$ 且 ω_j 从洛伦兹分布中选择时，它是 [13] 中研究的值。这些作者发现了明显稳定的振荡器网络嵌合体。当 $m \neq 0$ 且 ω_j 相同时，与 [14] 中的研究结果相同。

在 [25] 中发现，当 $m \neq 0$ 且 ω_i 相同时，通过模拟 (34)-(35) 找到的表面上稳定的嵌合解在研究连续方程时实际上是 (弱) 不稳定的。(35) 在研究连续方程时，实际上是 (弱) 不稳定的，最右边的特征值的实部决定了它的稳定性随着 m 的增加而增加。因此，研究 ω_j 中的异质性对这种状态的影响是有意义的：它是否使这种状态稳定？

我们把方程重写为

$$\frac{d\theta_i^{(1)}}{dt} = u_i^{(1)} \tag{36}$$

$$\frac{du_i^{(1)}}{dt} = \left[\omega_i^{(1)} - u_i^{(1)} + \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(1)} - \theta_i^{(1)} - \alpha\right) + \frac{\nu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(2)} - \theta_i^{(1)} - \alpha\right)\right]/m \tag{37}$$

$$\frac{d\theta_i^{(2)}}{dt} = u_i^{(2)} \tag{38}$$

$$\frac{du_i^{(2)}}{dt} = \left[\omega_i^{(2)} - u_i^{(2)} + \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(2)} - \theta_i^{(2)} - \alpha\right) + \frac{\nu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j^{(1)} - \theta_i^{(2)} - \alpha\right)\right]/m \tag{39}$$

图 11 显示了 (36)-(39) 的稳定嵌合状态的快照，其中两个集群的 ω_i 来自 $[-\Delta\nu, \Delta\nu]$ 上的均匀分布。我们看到，种集群 1 是不连贯的，而种集群 2 是同步的，θ_i 和 u_i 都是 ω_i 的平滑函数。

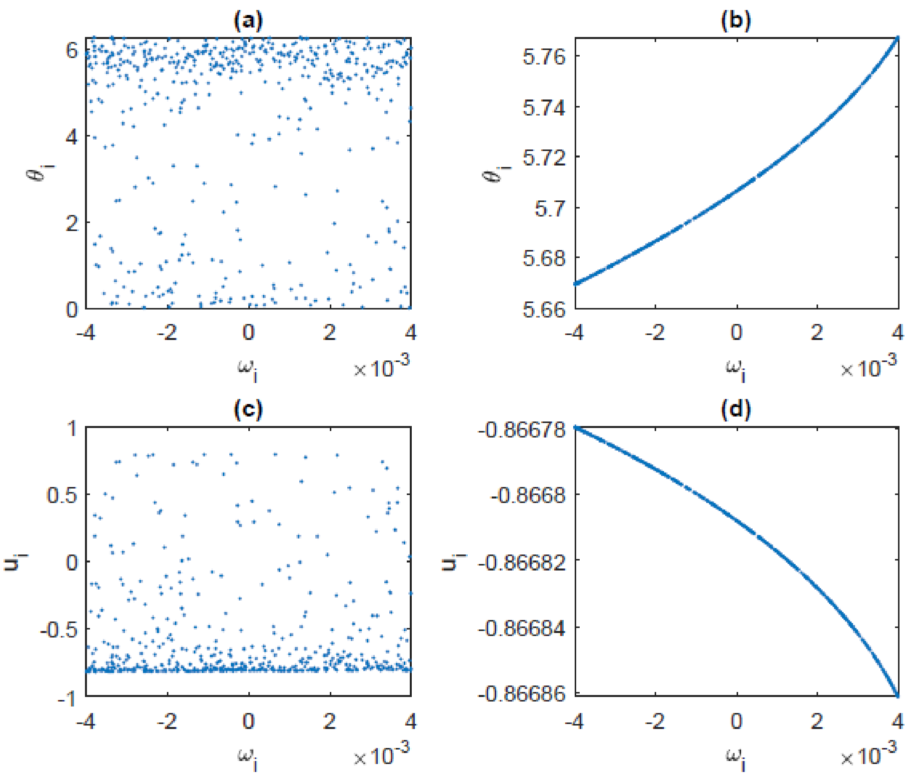


FIG. 11. A snapshot of a chimera state for (36)-(39). Population 1 is on the left and population 2 is on the right. Note the different vertical scales. Parameters: $N = 500, m = 0.1, \mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.05, \Delta\omega = 0.004$.

为了分析这种状态，让我们假设种集群 2 是同步的，对于 $\theta_k^{(2)} = \Theta_k$，$u_k^{(2)} = U_k$，$k = 1, 2, ..., N$。我们去掉了集群 1 中变量的上标。集群 2 中的振子满足

$$\frac{d\Theta_k}{dt} = U_k \tag{40}$$

$$\frac{dU_k}{dt} = \left[\omega_k^{(2)} - U_k + \mu \operatorname{Im}\left\{e^{-i(\Theta_k+\alpha)}Y\right\} + \nu \operatorname{Im}\left\{e^{-i(\Theta_k+\alpha)}X\right\}\right]/m \tag{41}$$

其中，

$$X \equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{s\theta_j} \in \mathbb{C}, \quad Y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \in \mathbb{C} \tag{42}$$

集群 1 中的振子满足

$$\frac{d\theta_k}{dt} = u_k \tag{43}$$

$$\frac{du_k}{dt} = \left[\omega_k^{(1)} - u_k + \mu \operatorname{Im}\left\{e^{-1(\theta_k+\alpha)}X\right\} + \nu \operatorname{Im}\left\{e^{-1(\theta_k+\alpha)}Y\right\}\right]/m \tag{44}$$

对于 $k = 1, \ldots, N$. 我们通过定义把这些方程化成极坐标形式 $r_k = 2 + u_k$ (添加 2 个边界 r_k 远离 0) 并且我们有

$$\frac{dr_k}{dt} = \left[\omega_k^{(1)} - (r_k - 2) + \mu \operatorname{Im}\left\{e^{-i(\theta_k+\alpha)}X\right\} + \nu \operatorname{Im}\left\{e^{-1(\theta_k+\alpha)}Y\right\}\right]/m \tag{45}$$

$$\equiv F\left(r_k, \theta_k, X, Y, \omega_k^{(1)}\right) \frac{d\theta_k}{dt} = r_k - 2 \tag{46}$$

对嵌合体的兴趣，Θ_k 和 U_k 在以 Ω 速度旋转的坐标系中静止。将 (40) 移动到这个坐标系具有这样的性质

$$\frac{d\Theta_k}{dt} = U_k + \Omega \tag{47}$$

和 (46)

$$\frac{d\theta_k}{dt} = r_k - 2 + \Omega \equiv G\left(r_k, \theta_k, X, Y\right) \tag{48}$$

取极限 $N \to \infty$，我们考虑动态系统

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\theta, t; \omega) = F(R, \theta, X, Y, \omega) - G(R, \theta, X, Y)\frac{\partial R}{\partial \theta} \tag{49}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\theta, t; \omega) = -\frac{\partial}{\partial \theta}[P(\theta, t; \omega)G(R, \theta, X, Y)] + D\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}P(\theta, t; \omega) \tag{50}$$

连同

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(\omega, t) = U + \Omega \tag{51}$$

和

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega, t) = \left[\omega - U + \mu \operatorname{Im}\left\{e^{-i(\theta+\alpha)}Y\right\} + \nu \operatorname{Im}\left\{e^{-i(\theta+\alpha)}X\right\}\right]/m \tag{52}$$

其中

$$X(t) = \int_B p(\omega) \int_0^{2\pi} P(\theta, t; \omega) R(\theta, t; \omega) e^{i\theta} d\theta d\omega \tag{53}$$

和

$$Y(t) = \int_B e^{1\Theta(\omega, t)} p(\omega) d\omega \tag{54}$$

且，B 时区间 $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$.

4.1 A. 结果

对于较小的 $m, \Delta\omega, D$ 值，可以找到 (49)-(54) 的稳定嵌合体解，但如 [25] 所示，将 D 降低到 10^{-13}，我们发现它们实际上是弱不稳定的。随着 $\Delta\omega$ 的增加，我们发现它们在鞍结分叉中被破坏，如图 12 所示。在这条曲线的左边，这些解总是不稳定的，尽管 (如 [25] 所示)，随着 m 的减小，它们变得不那么不稳定。尽管以这种方式使振荡器异质化并不能完全稳定嵌合体，但它确实使嵌合体不那么不稳定，正如图 12 中在固定的 m 值下通过改变 $\Delta\omega$ 可以看出。总之，与文献 [25] 一样，对于所选择的参数，对于 (49)-(54) 所描述的无限网络，即使从均匀分布中选择 ω 值，也不存在稳定的嵌合体。

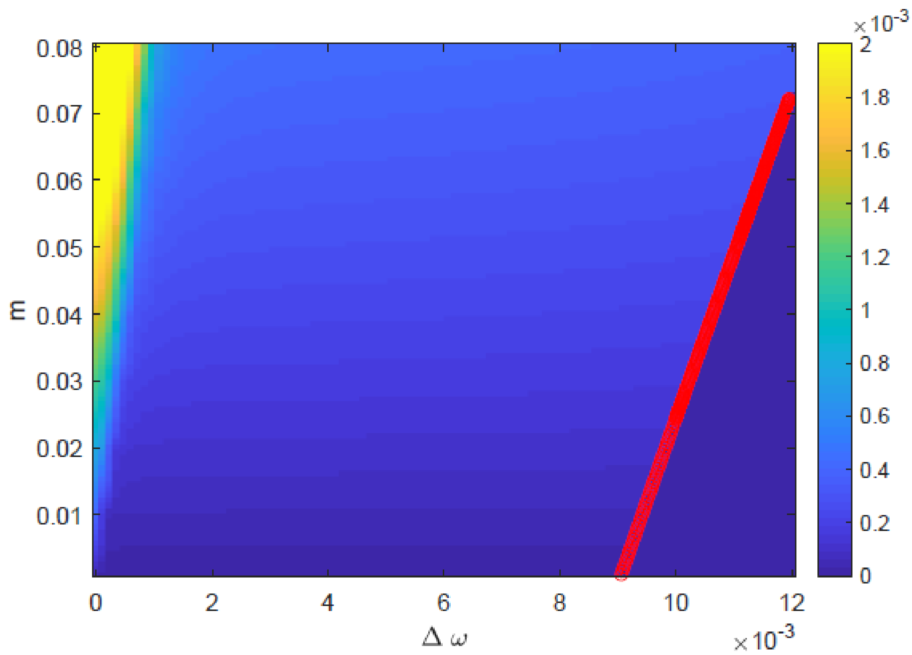


FIG. 12. The red circles show a saddle-node bifurcation, to the right of which solutions in which all oscillators in population 2 for (49)-(54) are locked do not exist. The colour is the real part of the rightmost eigenvalues determining the stability of the chimera (truncated above 2×10^{-3}), which is always positive. Parameters: $\mu = 0.6, \nu = 0.4, \alpha = \pi/2 - 0.05, D = 10^{-13}$. θ is discretised with 128 points and ω with 10.

5 范德堡尔振荡器

最后，我们考虑了两个范德堡尔振荡器的群，由

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i \tag{55}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \epsilon\left(1 - x_i^2\right) y_i - x_i + \mu\left[b_1\left(\bar{X}_1 - x_i\right) + c\left(Y_1 - y_i\right)\right] + \nu\left[b_i\left(\bar{X}_2 - x_i\right) + c\left(Y_2 - y_i\right)\right] \tag{56}$$

对于 $i = 1, 2 \ldots, N$ 和

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i \tag{57}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \epsilon\left(1 - x_i^2\right) y_i - x_i + \mu\left[b_1\left(\bar{X}_2 - x_i\right) + c\left(\bar{Y}_2 - y_i\right)\right] + \nu\left[b_i\left(\bar{X}_1 - x_i\right) + c\left(\bar{Y}_1 - y_i\right)\right] \tag{58}$$

对于 $i = N+1, \ldots, 2N$, 其中

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i; \quad \bar{Y}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i; \quad \bar{X}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{N+i}; \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{N+i} \tag{59}$$

通常，μ 是集群内耦合强度，ν 是群间耦合强度。存在涉及 x 和 y 变量的平均场耦合。[4,12] 中考虑了这种形式的方程，尽管在振荡器环上存在非局部耦合。我们设定 $\epsilon = 0.2$，$\mu = 0.09$，$\nu = 0.01$，$c = 0.1$，考虑 b_i 中的异质性，在 $[b_0 - \Delta b, b_0 + \Delta b]$ 上从均匀分布中选择它们。图 13 显示了一个 $b0 = 1$，$\Delta b = 0.7$ 的稳定嵌合体的例子。集群 1 是不连贯的，而集群 2 是同步的。对于种集群 1 来说，很明显，具有不同 b_i 的振荡器位于不同的曲线上。

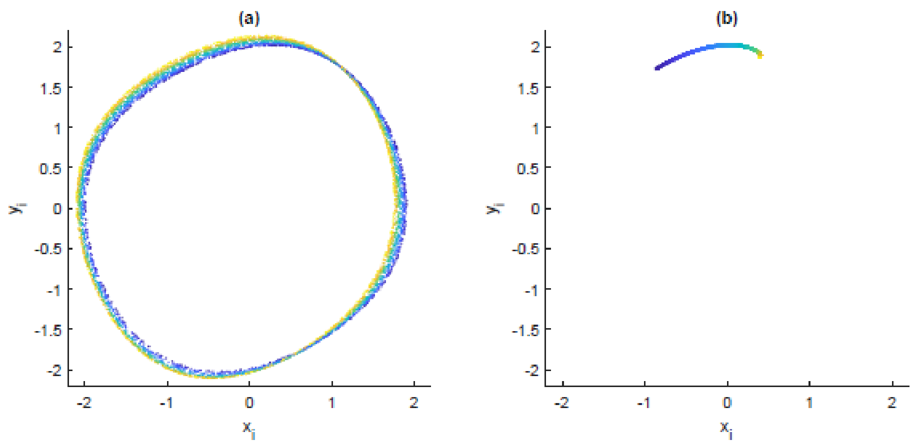


FIG. 13. Snapshot of a stable chimera solution of (55)-(59). The oscillators are coloured by their b_i value (blue low, yellow high). (a): population 1; (b): population 2. Parameters: $\mu = 0.09, \nu = 0.01, \epsilon = 0.2, c = 0.1, b_0 = 1, \Delta b = 0.7, N = 5000$.

为了分析这种状态，假设集群 2 是同步的，并且对于 i=1A，AA 和 BB 是同步的。这些值如图 13(b) 所示。然后我们有

$$\frac{dX_{\mathrm{i}}}{dt} = Y_i \tag{60}$$

$$\frac{dY_{\mathrm{i}}}{dt} = \epsilon\left(1 - X_{\mathrm{i}}^2\right) Y_i - X_i + \mu\left[b_i\left(\bar{X}_2 - X_i\right) + c\left(\bar{Y}_2 - Y_i\right)\right] + \nu\left[b_i\left(\bar{X}_1 - X_i\right) + c\left(\bar{Y}_1 - Y_{\mathrm{i}}\right)\right] \tag{61}$$

对于种集群 1，我们从图 13 (a) 中看到振子位于完全包含原点的曲线上，所以移动到极坐标，通过写 $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ 和 $\tan t_i = y_i/x_i$，使得 $x_i = r_i cost_i$ 和 $y_i = r_i sint_i$

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{x_i \frac{dx_i}{dt} + y_i \frac{dy_i}{dt}}{r_i} \equiv F\left(r_i, \theta_i, \bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2, b_i\right) \tag{62}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}}{r_i^2} \equiv G\left(r_i, \theta_i, \bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2, b_i\right) \tag{63}$$

其中 dx_i/dt 和 dy_i/dt 由 (55)-(56) 给出。取连续极限，考虑动力系统

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\theta, t; b) = F\left(R, \theta, \bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2, b\right) - G\left(R, \theta, \bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2, b\right)\frac{\partial R}{\partial \theta} \tag{64}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\theta, t; b) = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[P(\theta, t) G\left(R, \theta, \bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_2, b\right)\right] + D\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(\theta, t; b) \tag{65}$$

连同

$$\frac{\partial X(b,t)}{\partial t} = Y \tag{66}$$

$$\frac{\partial Y(b,t)}{\partial t} = \epsilon\left(1-X^2\right)Y - X + \mu\left[b\left(\bar{X}_2 - X\right) + c\left(\bar{Y}_2 - Y\right)\right] + \nu\left(b\left(\bar{X}_1 - X\right) + c\left(\bar{Y}_1 - Y\right)\right] \tag{67}$$

其中

$$\bar{X}_1 = \int_B \int_0^{2\pi} P(\theta,t;b)R(\theta,t;b)\cos\theta d\theta db; \quad \bar{Y}_1 = \int_B \int_0^{2\pi} P(\theta,t;b)R(\theta,t;b)\sin\theta d\theta db \tag{68}$$

和

$$\bar{X}_2 = \int_B X(b,t)db; \quad \bar{Y}_2 = \int_B Y(b,t)db \tag{69}$$

其中 B 是区间 $[b_0 - \Delta B, b_0 + \Delta B]$。

这个系统与前面几节中的系统之间的一个重要区别是，我们不能在一个均匀旋转的坐标系中，X 和 Y 是常数。因此，有趣的嵌合体是 (64)-(69) 的周期解。我们使用伪弧长延拓法对周期解进行数值延续，并根据该解的 Floquet 乘子的大小确定其稳定性。我们得到了图 14，在图中我们看到，随着 Δb 的增加，稳定的周期解在鞍结分岔中被破坏。与第二和第三节研究的系统不同，这个系统中的稳定嵌合体是真正稳定的，没有边际或接近边际的 Floquet 乘数。

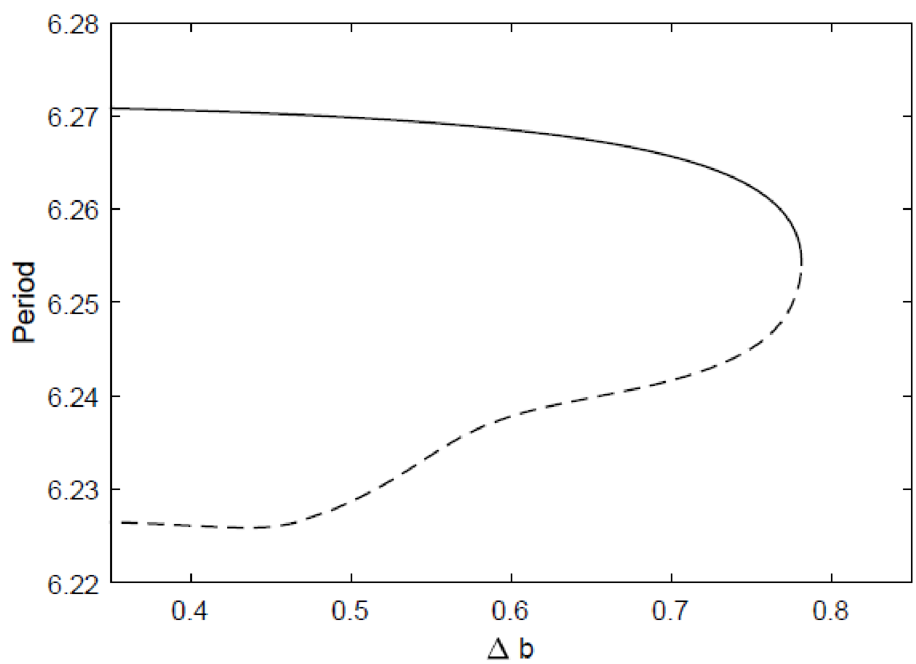


FIG. 14. Period of the periodic chimera solution of (64)-(69). Solid: stable; dashed: unstable. Parameters: $\mu = 0.09, \nu = 0.01, \epsilon = 0.2, c = 0.1, b_0 = 1, D = 10^{-4}$. θ is discretised in 128 points and b in 10.

6 讨论

我们考虑了由两个耦合振子群构成的网络中的嵌合体。在每个网络中，从均匀分布中随机选择一个参数。对于足够窄的分布，相同参数情况下存在的嵌合体持续存在，同步振荡器保持同步，尽管不再具有相同的状

态。我们以增加计算工作量为代价，将 [25] 中的理论推广到包括这些状态。在所有情况下，我们发现随着均匀分布宽度的增加，嵌合体在鞍结分叉中被破坏。我们现在讨论这里所采用的方法的几个概括。

虽然我们一次只考虑一个参数的异质性，但可以考虑多个参数。例如，以形式 (1)-(2) 的网络为例，其中不仅 ω_j 取自 $[\omega_0-\Delta\omega,\omega_0+\Delta\omega]$ 上的均匀分布，而且 ν 的值取自 $[\nu_0-\Delta\nu,\nu_0+\Delta\nu]$ 上的均匀分布，如第 2 节所述。图 15 中示出了这种网络的稳定嵌合体状态的快照。我们看到集群 1 是不相干的，而集群 2 是锁定的。在连续体极限下，集群 2 中的振子状态可以用定义在 $(\omega,\nu)\in[\omega_0-\Delta\omega,\omega_0+\Delta\omega]\times[\nu_0-\Delta\nu,\nu_0+\Delta\nu]$ 上的函数 $\phi(\omega,\nu,t)$ 描述，而集群 1 中的振子状态可以用 (ω,ν) 相同范围内的复值函数 $a(\omega,\nu,t)$ 描述。对此类系统的数值研究将比对具有单一异质参数的网络的研究更为复杂。

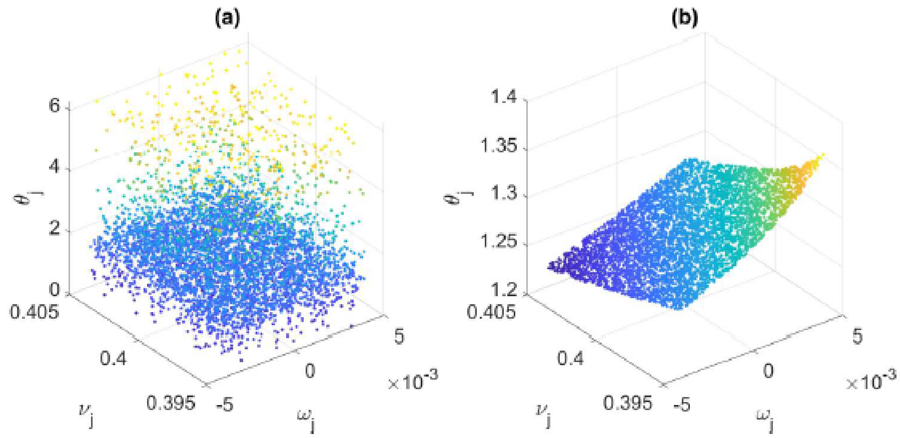


FIG. 15. Snapshot of a chimera state for a network of the form (1)-(2). (a): population 1; (b): population 2. The colour shows the values of the θ_j, with different ranges in the two panels. Parameters: $\mu=0.6,\nu_0=0.4,\Delta\nu=0.005,\omega_0=0,\Delta\omega=0.004,\beta=0.08,N=5000$.

另一种可能性是考虑群内或群之间的非平凡连通性。例如，我们可以用

$$\frac{d\theta_j}{dt}=\omega+\frac{\mu}{N}\sum_{k=1}^{N}\sin(\theta_k-\theta_j-\alpha)+\frac{\nu}{\langle d\rangle}\sum_{k=1}^{N}A_{jk}\sin(\theta_{N+k}-\theta_j-\alpha) \tag{70}$$

与 (2) 类似，其中 A 是群之间的连通矩阵：如果一个群中的振荡器 k 连接到另一个群中的振荡器 j，$A_{jk}=1$，否则 $A_{jk}=0$。(连接是无向的，所以 A 是对称的。)$\langle d\rangle$ 是平均度数，$\langle d\rangle=\sum_{j,k}A_{jk}/N$。如果网络之间的连接是随机进行的，并且每个振荡器与足够多的其他振荡器连接，我们可以进行近似 [53]。

$$\frac{1}{\langle d\rangle}\sum_{k=1}^{N}A_{jk}\sin(\theta_{N+k}-\theta_j-\alpha)\approx\frac{d_j}{N(d)}\sum_{k=1}^{N}\sin(\theta_{N+k}-\theta_j-\alpha) \tag{71}$$

式中，d_j 是振荡器 j 的阶数：$d_j\equiv\sum_{k-1}^{N}A_{jk}$。因此，如第 2 节所述，拥有一个度数范围与拥有一个 ν 值范围对动力学的影响大致相同。为了与第 2 节中的结果进行比较，我们使用配置模型 [54] 构建网络，其度分布在 $[d_0-\Delta d,d_0+\Delta d]$ 和集 $\nu=0.4$ 上是一致的。如图 5 所示，$\Delta\nu$ 的对应值为 $\Delta\nu=\nu(\Delta d/d_0)=0.4(\Delta d/d_0)$，但请注意，$\Delta d$ 和 d_0 都是整数。

我们构造 $N=5000$，d_0 为 1000 或 2000 的网络，数值求解方程 (70)，初始条件接近嵌合体状态。我们定义了同步 (或基本同步) 总体的真实顺序参数

$$R=\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{i\theta_j}\right| \tag{72}$$

(瞬变后) 测量 300 个时间单位内 R 的标准偏差。该标准偏差绘制在图 16 中的对数刻度上，作为 d_0 两个二重值 $0.4\,(\Delta d/d_0)$ 的函数。当 $0.4\,(\Delta d/d_0)$ 约为 0.011-0.012 时，我们看到标准偏差迅速增加，表明同步总体失去了完全同步性，这与图 5 非常一致。请注意，其他几位作者研究了一对子网络中的嵌合体，这些子网络的连通性小于全连接 [55-57]。

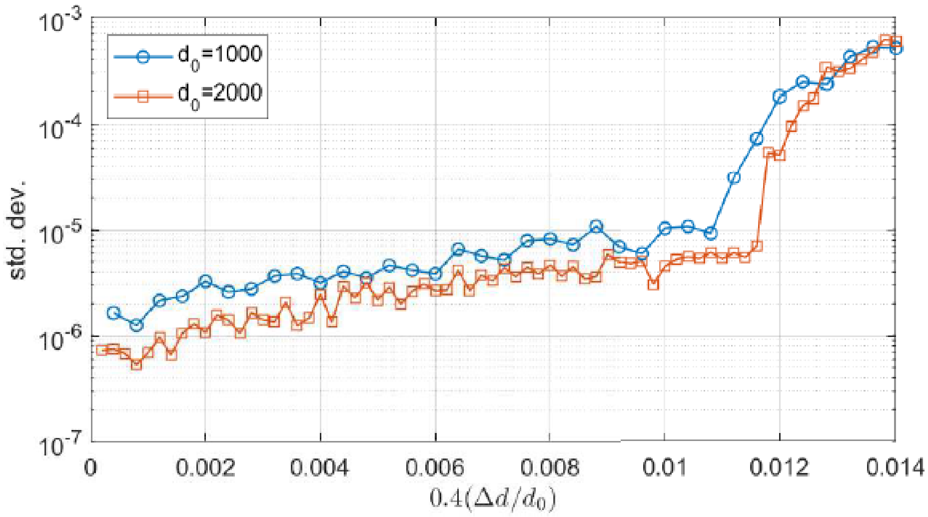


FIG. 16. Standard deviation of the order parameter (72) as a function of the width of the degree distribution, Δd. Parameters: $\mu = 0.6, \nu = 0.4, \omega = 0, \beta = 0.08, N = 5000.$

这里显示的所有结果都使用了非均匀参数的均匀分布，因此为了证实这些结果的有效性，我们还考虑了具有相同形状参数的 β 分布。对于 β 分布，密度非零的参数 x 在 $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ 上的分布与 $p(x)$ 成比例：

$$p(x) = \left(1 - \frac{x - x_0}{\Delta x}\right)^\alpha \left(1 + \frac{x - x_0}{\Delta x}\right)^\alpha \tag{73}$$

其中 α 是形状参数。然后使用高斯-盖根鲍尔求积 [58] 逼近 x 上的积分。我们设定 $\alpha = 2$，并使用 10 点的离散化。上述均匀分布的所有结果都是使用该 β 分布 (未显示) 进行定性复制的。

虽然我们考虑了群内部和群之间具有全连接连通性的网络，但控制方程是在连续统极限下推导出来的。因此，图与本文研究的网络具有相同的图 (或图极限)[59] 形式的大型但不连续网络的动力学

$$W(x, y) = \begin{cases} a, & (x, y) \in [0, 1/2] \times [0, 1/2] \text{ or } (x, y) \in [1/2, 1] \times [1/2, 1] \\ b, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{74}$$

其中 a 和 b 是常数,$b < a$ 也应使用此处介绍的技术进行描述,前提是参数是均匀分布的。例子包括 Erdös-Rényi 网络，其中群内或群之间连接两个振荡器的概率为常数 (但小于 1) 和 Paley 图 [60]。

似乎可以推广本文介绍的技术来研究非局部耦合一般振子环上的嵌合体 [4,16]。然而，虽然锁定振荡器将由 ODE 描述，异步振荡器将由偏微分方程描述，但人们需要知道 (或自动确定) 这类振荡器组之间的边界，以确定是否需要 ODE 或 PDE 来描述环上特定位置的动力学。此外，这些边界点会随着参数的变化而移动。

7 参考文献

[1] Mark J Panaggio and Daniel M Abrams. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. Nonlinearity, 28(3):R67, 2015.

[2] O E Omel'chenko. The mathematics behind chimera states. Nonlinearity, 31(5):R121-R164, apr 2018.

[3] Daniel M. Abrams and Steven H. Strogatz. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. Int. J. Bifn. Chaos, 16:21-37, 2006.

[4] Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Philipp H ovel, Julien Siebert, and Eckehard Sch oll. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 25(8):083104, 2015.

[5] Carlo R Laing. Chimeras in two-dimensional domains: heterogeneity and the continuum limit. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 16(2):974-1014, 2017.

[6] Mark J Panaggio and Daniel M Abrams. Chimera states on the surface of a sphere. Physical Review E, 91(2):022909, 2015.

[7] Daniel M. Abrams, Rennie Mirollo, Steven H. Strogatz, and Daniel A. Wiley. Solvable model for chimera states of coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 101:084103, 2008.

[8] Arkady Pikovsky and Michael Rosenblum. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 101:264103, 2008.

[9] Mark J Panaggio, Daniel M Abrams, Peter Ashwin, and Carlo R Laing. Chimera states in networks of phase oscillators: the case of two small populations. Physical Review E, 93(1):012218, 2016.

[10] Y. Kuramoto and D. Battogtokh. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. Nonlinear Phenom. Complex Syst., 5:380-385, 2002.

[11] Carlo R Laing. Chimeras in networks of planar oscillators. Physical Review E, 81(6):066221, 2010.

[12] Stefan Ulonska, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, and Eckehard Sch oll. Chimera states in networks of van der pol oscillators with hierarchical connectivities. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 26(9):094825, 2016.

[13] Tassos Bountis, Vasileios G Kanas, Johanne Hizanidis, and Anastasios Bezerianos. Chimera states in a two population network of coupled pendulum-like elements. The European Physical Journal Special Topics, 223(4):721-728, 2014.

[14] Simona Olmi. Chimera states in coupled kuramoto oscillators with inertia. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 25(12):123125, 2015.

[15] Simona Olmi, Antonio Politi, and Alessandro Torcini. Collective chaos in pulse-coupled neural networks. EPL (Europhysics Letters), 92(6):60007, 2011.

[16] Iryna Omelchenko, Oleh E. Omel'chenko, Philipp H ovel, and Eckehard Sch oll. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states. Phys. Rev. Lett., 110:224101, May 2013.

[17] Irmantas Ratas and Kestutis Pyragas. Symmetry breaking in two interacting populations of quadratic integrate-and-fire neurons. Phys. Rev. E, 96:042212, Oct 2017.

[18] Anna Zakharova, Marie Kapeller, and Eckehard Sch oll. Amplitude chimeras and chimera death in dy-

namical networks. Journal of Physics: Conference Series, 727:012018, jun 2016.

[19] Matthias Wolfrum and Oleh Omel'chenko. Chimera states are chaotic transients. Physical Review E, 84(1):015201, 2011.

[20] S. Shima and Y. Kuramoto. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. Physical Review E, 69(3):036213, 2004.

[21] Daniel M. Abrams and Steven H. Strogatz. Chimera states for coupled oscillators. Phys. Rev. Lett., 93:174102, 2004.

[22] Edward Ott and Thomas M. Antonsen. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. Chaos, 18:037113, 2008.

[23] Edward Ott and Thomas M Antonsen. Long time evolution of phase oscillator systems. Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science, 19(2):023117, 2009.

[24] Carlo R Laing. The dynamics of chimera states in heterogeneous kuramoto networks. Physica D: Nonlinear Phenomena, 238(16):1569-1588, 2009.

[25] Carlo R Laing. Dynamics and stability of chimera states in two coupled populations of oscillators. Physical Review E, 100(4):042211, 2019.

[26] Pau Clusella and Antonio Politi. Between phase and amplitude oscillators. Phys. Rev. E, 99:062201, Jun 2019.

[27] Mark R Tinsley, Simbarashe Nkomo, and Kenneth Showalter. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. Nature Physics, 8(9):662, 2012.

[28] Erik Andreas Martens, Shashi Thutupalli, Antoine Fourri ere, and Oskar Hallatschek. Chimera states in mechanical oscillator networks. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 110(26):10563-10567, 2013.

[29] Jan Frederik Totz, Julian Rode, Mark R Tinsley, Kenneth Showalter, and Harald Engel. Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators. Nature Physics, 14(3):282-285, 2018.

[30] S. Watanabe and SH Strogatz. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. Physica. D, 74:197-253, 1994.

[31] E. A. Martens, E. Barreto, S. H. Strogatz, E. Ott, P. So, and T. M. Antonsen. Exact results for the kuramoto model with a bimodal frequency distribution. Physical Review E, 79:026204, 2009.

[32] Steven H Strogatz and Renato E Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. Journal of Statistical Physics, 63(3):613-635, 1991.

[33] Kevin M Hannay, Daniel B Forger, and Victoria Booth. Macroscopic models for networks of coupled biological oscillators. Science advances, 4(8):e1701047, 2018.

[34] Julio D da Fonseca, Edson D Leonel, and Hugues Chat e. Instantaneous frequencies in the kuramoto model. Physical Review E, 102(5):052127, 2020.

[35] Bastian Pietras, Nicol as Deschle, and Andreas Daertshofer. First-order phase transitions in the kuramoto model with compact bimodal frequency distributions. Physical Review E, 98(6):062219, 2018.

[36] Diego Paz o. Thermodynamic limit of the rst-order phase transition in the kuramoto model. Physical Review E, 72(4):046211, 2005.

[37] Yernur Baibolatov, Michael Rosenblum, Zeinulla Zh Zhanabaev, and Arkady Pikovsky. Complex dynam-

ics of an oscillator ensemble with uniformly distributed natural frequencies and global nonlinear coupling. Physical Review E, 82(1):016212, 2010.

[38] Bertrand Ottino-L o er and Steven H. Strogatz. Kuramoto model with uniformly spaced frequencies: Finite-n asymptotics of the locking threshold. Phys. Rev. E, 93:062220, Jun 2016.

[39] Sebastian Eydam and Matthias Wolfrum. Mode locking in systems of globally coupled phase oscillators. Phys. Rev. E, 96:052205, Nov 2017.

[40] G Bard Ermentrout. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies. Journal of Mathematical Biology, 22(1):1-9, 1985.

[41] EV Rybalova, TE Vadivasova, GI Strelkova, Vadim S Anishchenko, and AS Zakharova. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 29(3):033134, 2019.

[42] Carlo R. Laing. Chimera states in heterogeneous networks. Chaos, 19:013113, 2009.

[43] Ernest Montbri o, J urgen Kurths, and Bernd Blasius. Synchronization of two interacting populations of oscillators. Phys. Rev. E, 70:056125, 2004. [44] Carlo R. Laing. Numerical bifurcation theory for high-dimensional neural models. The Journal of Mathematical Neuro- science, 4(1):1-27, 2014.

[45] Willy JF Govaerts. Numerical methods for bifurcations of dynamical equilibria. SIAM, 2000.

[46] G Bard Ermentrout and John Rinzel. Beyond a pacemaker's entrainment limit: phase walk-through. American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology, 246(1):R102-R106, 1984.

[47] S. Watanabe and S.H. Strogatz. Integrability of a globally coupled oscillator array. Physical Review Letters, 70:2391-2394, 1993.

[48] Xiyun Zhang, Hongjie Bi, Shuguang Guan, Jinming Liu, and Zonghua Liu. Model bridging chimera state and explosive synchronization. Physical Review E, 94(1):012204, 2016.

[49] Lloyd N Trefethen. Spectral methods in MATLAB, volume 10. Siam, 2000.

[50] Bard Ermentrout. Gap junctions destroy persistent states in excitatory networks. Physical Review E, 74(3):031918, 2006.

[51] J. Guckenheimer and P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer, 1983.

[52] Y.A. Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, 2004.

[53] T.W. Ko and G.B. Ermentrout. Partially locked states in coupled oscillators due to inhomogeneous coupling. Physical Review E, 78(1):016203, 2008.

[54] Mark EJ Newman. The structure and function of complex networks. SIAM review, 45(2):167-256, 2003.

[55] Simona Olmi and Alessandro Torcini. Chimera states in pulse coupled neural networks: the in uence of dilution and noise. In Nonlinear Dynamics in Computational Neuroscience, pages 65-79. Springer, 2019.

[56] Carlo R Laing, Karthikeyan Rajendran, and Ioannis G Kevrekidis. Chimeras in random non-complete networks of phase oscillators. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 22(1):013132, 2012.

[57] Bo Li and David Saad. Chimera-like states in structured heterogeneous networks. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 27(4):043109, 2017.

[58] https://people.sc.fsu.edu/ jburkardt/m src/gegenbauer rule/gegenbauer rule.html.

[59] L aszl o Lov asz and Bal azs Szegedy. Limits of dense graph sequences. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 96(6):933-957, 2006.

[60] Hayato Chiba, Georgi S Medvedev, and Matthew S Mizuhara. Bifurcations in the kuramoto model on graphs. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 28(7):073109, 2018.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.