



← Previous Article

Next Article →

- Figures
- Related
- References
- Cited By
- Details

# Chaotic Spikes Arising from a Model of Bursting in Excitable Membranes

David Terman

<https://doi.org/10.1137/0151071>

PDF BibTex SECTIONS

Tools

## Abstract

A class of differential equations that model electrical activity in pancreatic beta cells is considered. It is demonstrated that these equations must give rise to both bursting solutions and, for different values of the parameters, continuous spiking. We also consider how the number of spikes per burst changes as parameters in the equations are varied. This transition may be continuous, in which case the period of the bursting solution increases significantly and then decreases. Hence, small perturbations may cause macroscopic changes in the bursting solution. This transition may also give rise to chaotic dynamics due to the existence of a Smale horseshoe.

## Keywords

bursting, excitable membranes, chaotic dynamics

Chaotic Dynamics of Quasi-Periodically Forced Oscillators Detected by Melnikov's Method

Kazuyuki Yagasaki

Abstract +

Heteroclinic Orbits and Chaotic Dynamics in Planar Fluid Flows

Andrea Louise Bertozzi

Abstract +

Invariant Manifolds and Singularly Perturbed Boundary Value Problems

S.-K. Tin, N. Kopell, C. K. R. T. Jones

Abstract +

Singular Perturbation Theory for Homoclinic Orbits in a Class of Near-Integrable Dissipative Systems

# 由刺激性膜爆发模型引起的混沌尖峰

## CHAOTIC SPIKES ARISING FROM A MODEL OF BURSTING IN EXCITABLE MEMBRANES

作者: David Terman\*

组织:

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, Ohio 43210.

时间: Received by the editors April 16, 1990; accepted for publication (in revised form) September 28, 1990.

Keywords: Bursting, Excitable membranes, Chaotic dynamics

Translated by Ke He, School of Mathematics, SCUT.

Link to the Journal: <https://doi.org/10.1137/0151071>

SIAM Journal on Applied Mathematic 51(5),1991

# 文章结构大纲

|       |                               |    |
|-------|-------------------------------|----|
| 第 1 章 | 引言                            | 1  |
| 第 2 章 | 假设                            | 2  |
| 第 3 章 | 碉堡、管子等                        | 4  |
| 1     | 右膝和下分支                        | 6  |
| 2     | 左膝                            | 7  |
| 3     | 中间分支                          | 8  |
| 4     | 周期解                           | 10 |
| 第 4 章 | 爆发解的存在性                       | 11 |
| 第 5 章 | 连续尖峰                          | 11 |
| 第 6 章 | 从第 $n$ 个到 $n+1$ 个尖峰的转变        | 14 |
| 1     | 引入                            | 14 |
| 2     | 左膝的“稳定流形”                     | 14 |
| 3     | 弯曲数量                          | 14 |
| 4     | 斯梅尔马蹄铁 (The Smale horseshoe.) | 15 |
| 5     | 产生斯梅尔马蹄铁的非线性特征                | 19 |
| 6     | 从 $n$ 到 $n+1$ 尖峰的平滑过渡         | 20 |
| 7     | 数值结果                          | 22 |

# 摘要

本文考虑了胰腺  $\beta$  细胞的放电活动的一类微分方程。结果表明，对于不同的参数值，这些方程必须同时得到爆发解 (Bursting solution) 和连续的峰值解 (Spiking)。我们还考虑了随参数变化时，每次爆发的峰尖数量如何变化。这种转变可能是连续的，在这种情况下，爆发解的周期先显著增大后减小。因此，微小的扰动可能引起爆发解的宏观变化。由于 Smale horseshoe 的存在，这种转变也可能造成混沌动力学的出现。

## 第 1 章 引言

本文中，我们研究了胰腺  $\beta$  细胞放电活动数学模型解的定性行为。胰腺  $\beta$  细胞负责胰岛素的分泌。Atwater 等 [2] 发现，在一定水平的葡萄糖浓度下， $\beta$  细胞的膜电位经历持续的爆发型振荡。此外，在较高的葡萄糖浓度下，爆发变成了持续的尖峰或跳动。Chay 和 Keizer 给出了这一现象的第一个理论模型 [4]。该模型由五个 Hodgkin-Huxley 型一阶非线性微分方程组成。后来，Chay [3] 将该模型简化为三个方程的一阶系统。原始和简化的 Chay 和 Keizer 模型都显示了许多在实验中观察到的定性特征。特别地，这些模型包含一个参数  $K_{Ca}$ ，它随着葡萄糖浓度的增加而增加。对 Chay 和 Keizer [4]、Chay [3] 和 Chay 和 Rinzel [5] 的数值研究表明，这两种模型都表现出爆发解，并且，在较高的  $k_{Ca}$  值下，这些爆发解引起连续的峰值。数值计算和实验结果表明，从爆发到连续尖峰是一个混沌的过渡过程。

在 [12] 中，Rinzel 描述了爆发产生的几种数学机制。我们考虑一种这样的机制；这包括简化的 Chay 和 Keizer 模型。参考 Rinzel [13]。我们通过理论分析和数值方法证明，当方程中的参数变化时，这种类型的模型可能会产生混沌解。混沌解在数学上是由于 Smale horseshoe 的存在而产生的。

我们考虑的方程是常微分方程的自治系统。根据 Rinzel [12]，如果方程的解是一个周期解，其行为在近稳态行为 (被动阶段) 和峰状振荡序列 (主动阶段) 之间交替，则该方程的解是爆发的。图 12 显示了一个爆裂解决方案的例子。方程组由快子系统和慢子系统组成。如果我们把慢子系统的变量看作参数，那么快动力学将有一个稳定休息点的分支和一个稳定周期解的分支。然后，爆发解将是相空间中的一个闭合轨道，在被动相空间中，它通过稳定休息点的分支。快速尖峰序列对应于经过周期解分支附近的闭合轨道。

我们发现如果存在一个稳定的且总是位于周期解的分支附近闭合轨道，则系统会产生连续的峰尖。

我们证明了这些模型一定会引起爆裂解，并且对于其他参数  $K_{Ca}$  的值一定会引起连续的爆裂解。

我们还研究了每次脉冲峰值的数量如何随着慢子系统参数的变化而变化。我们看到，根据慢动力学的结构，这可以以两种不同的方式发生。一种可能是平稳过渡；对于所有的参数值，都存在一个稳定的周期解，其在相空间中的轨迹随着参数的变化而连续变化。这种转变的有趣之处在于，随着峰值数量的变化，每次爆发的周期也会增大。因此，缓慢动力学的微小扰动会引起爆破解的宏观变化，见图 13。

从  $n$  到  $n + 1$  个峰尖的转换不必是连续的；在这个转变过程中，可能会形成斯梅尔马蹄形。我们在第 6 章 (参见命题 6.4.2 后面的注释 2) 中表明，马蹄的存在意味着，如果  $a_k$  是任意双无限的整数序列，其中  $a_k \in \{n, n + 1\}$ ,  $-\infty < k < +\infty$ ，那么必然存在一个方程的突发解，使得第  $k$  个突发模式中的峰值数为  $a_k$ 。

我们解决这个问题的方法相当几何化。通过证明某 Poincaré 返回映射具有不动点，证明了爆发解的存在性。混沌解的存在证明了 Poincaré 映射产生了 Smale 马蹄形。为了定义 Poincaré 映射并证明它具有正确的性质，需要在相空间中定义各种几何对象。重要的是要了解相空间中的轨迹是如何从一个几何对象映射到另一个几何对象的，以及轨迹可以通过几何对象的哪一边离开或进入。

这类几何论证已被其他人用于研究由刺激膜模型引起的奇异摄动问题 (Singular Perturbation Problems), 见 Cronin[6]。研究了慢子系统独立对快子系统起强迫作用的模型的非周期解和混沌解。对于这样的模型, Ermentrout 和 Kopell[8] 和 Alexander, Doedel 和 Othmer[1] 讨论了从  $n$  到  $n+1$  个峰值的转变。

本文的大纲如下。在第 2 章中, 我们精确地陈述了我们需要爆裂解决方案的假设。在第 3 章中, 我们定义了相空间中的基本几何对象。第 4 章证明了爆破解的存在性。在第 5 章中, 我们证明了对于一定的参数值, 系统必然会出现连续的峰值。在第 6 章中, 我们研究了从  $n$  到  $n+1$  个峰值的转换。为此, 我们必须引入圈数 (Winding number) 的概念。这对应于每次爆发解的尖峰数量。在第 7 章中我们用数值计算来支持我们的分析结果。

## 第 2 章 假设

考虑具有以下形式的常微分方程:

$$\begin{aligned} v' &= f_1(u, v, y), \\ u' &= f_2(u, v, y), \\ y' &= \epsilon g(v, w, y, k). \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中  $\epsilon$  是一个小正参数,  $f_1$ ,  $f_2$  以及  $g$  均为光滑函数。将  $y$  视作慢变量, 令  $f(v, w, y) = (f_1, f_2)^T$ , 通过快子系统, 可表示:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' = f(v, w, y) \tag{FS}$$

在 (FS) 中,  $y$  被视作了一个参数。

为了保持符号的可管理性, 我们引入了以下约定。我们的第一个假设是 (FS) 的休息点集是三维  $(v, w, Y)$  相空间中的 S 形曲线  $\mathcal{L}$ 。我们用 UB 表示上面的分支, 用 MB 表示中间的分支, 用 LB 表示下面的分支。字母  $l$ ,  $L$  和  $\mathcal{L}$  将被保留给任何以某种方式与 LB 相关的对象。对于 MB 和 UB 也有类似的声明。 $\mathcal{L}$  的左膝和右膝在我们的分析中也起着核心作用。字母  $\lambda$  和  $\rho$  将分别保留为与左右膝盖相关的任何对象。

我们选择了这样的假设, 对于一个特定的系统, 它们可以很容易地用一个标准的常微分方程求解器进行数值验证。前五个假设与二维系统 (FS) 有关, 后两个假设与  $g(v, w, y, k)$  的零集有关。下面列出的假设是证明爆破解存在的必要假设。当我们考虑到连续的尖刺和马蹄形的存在时, 将给出进一步的假设。

在下文中, 请读者参阅图 1。

- (A1) 休息点 (FS) 由像空间中光滑, S 型曲线  $\mathcal{L}$  构成。即, 存在  $\lambda < \rho$ , 使得:
- 若  $y < \lambda$ , (FS) 有一个精确休息点, 用  $l_y$  表示。
  - 若  $y > \rho$ , (FS) 有一个精确休息点, 用  $u_y$  表示。
  - 若  $\lambda < y < \rho$ , (FS) 有三个精确休息点, 分别表示为  $l_y$ ,  $m_y$  和  $u_y$ 。
  - 当  $y = \lambda$  “左膝” 休息点表示为  $K_\lambda$ , 而当  $y = \rho$  时 “右膝” 休息点表示为  $K_\rho$ 。
  - 上述所有点的交集形成了一条光滑曲线, 记为  $\mathcal{L}$ 。
- (A2) 每个休息点  $l_y$  作为 (FS) 的解均是一个吸引子。每个休息点  $m_y$  是一个非退化鞍点。记  $m_y$  不稳定流形上的两条轨迹为  $M_y^+(t)$  和  $M_y^-(t)$ 。
- (A3) 存在  $h \in (\lambda, \rho)$ , 使得  $M_y^+(t)$  同宿于  $m_h$ ; 也即是说,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} M_y^+(t) = m_h$ 。如果  $y \in (\lambda, \rho)$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_y^-(t) = l_y$ , 若  $y \in (\lambda, h)$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} M_y^+(t) = l_y$ 。
- (A4) 存在  $\delta_0 > 0$ , 使得如果  $h < y < \rho + \delta_0$ , 那么快子系统 (FS) 存在一个渐近稳定的周期解  $P_y(t)$ 。该解围绕  $u_y$ , 但不会围绕  $l_y$  或  $m_y$ 。这些轨迹的交集定义了解的一个连续分支, 当  $y \rightarrow h$  时, 该分支在  $M_h^+(t)$  处终止。设  $\mathcal{P}$  为这些周期解的交集。

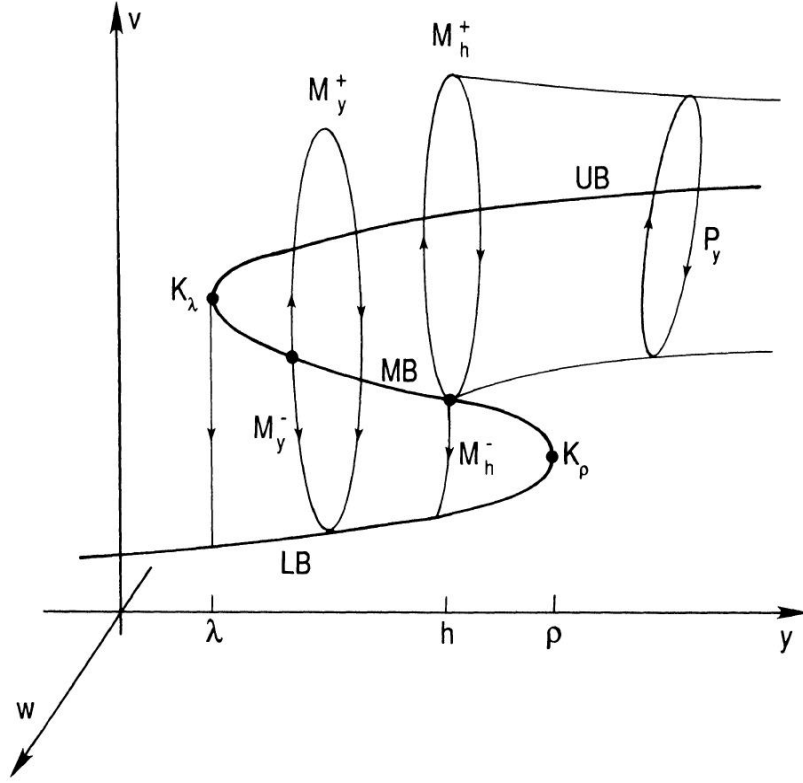


FIG. 1. LB, MB, and UB are the branches of rest points of (FS). For  $y > h$  there is a periodic solution  $p_y$  which surrounds UB. These periodic solutions terminate at the homoclinic orbit  $M_h^+$ . For  $\lambda < y < \rho$ , the trajectories in the unstable manifold of the middle branch are denoted by  $M_y^-$  and  $M_y^+$ .

注：在图 2 中，我们说明了参数  $y$  的三个不同值对应于 (FS) 的相平面，以演示当  $y$  经过临界值  $y = h$  时  $M_y^+(t)$  的轨迹如何变化。在每幅图中， $\lim_{t \rightarrow \infty} M_y^-(t) = l_y$ 。在图 2(a) 中，假设  $\lambda < y < h$ ，此时  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_y^+(t) = l_y$ 。在图 2(b) 中， $y = h$ ， $M_y^+(t)$  是一条同宿轨。最后在图 2(c) 中， $h < y < \rho$ ， $M_y^+(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  时接近周期轨道  $P_y(t)$ 。

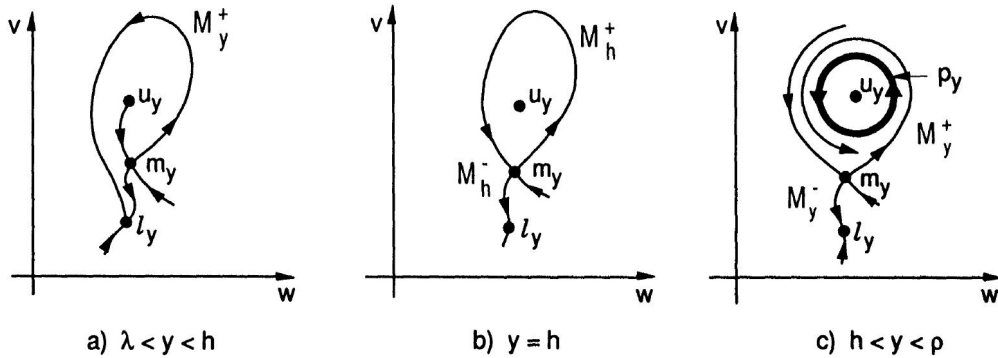


FIG. 2. The phase plane of (FS) for three different values of  $y$ . If  $\lambda < y < h$ , then each trajectory in the unstable manifold of  $m_y$  approaches  $l_y$  as  $t \rightarrow \infty$ . If  $y = h$ , then one of these trajectories is a homoclinic orbit. If  $h < y < \rho$ , then this trajectory approaches the periodic solution  $p_y$  as  $t \rightarrow \infty$ .

我们现在需要一个假设，它可以让我们得出这样的结论：对于  $0 < \epsilon \ll 1$ ，方程 (2.1) 的解经过靠近右膝的地方必然经过靠近周期解的分支，而 (2.1) 的解经过靠近左膝的地方必然经过靠近下支的地方。在下面的内容中， $\omega(\gamma_0)$  将是  $\epsilon = 0$  时 (2.1) 通过  $\gamma_0$  的解的极限集。



(A5) 存在  $K_\rho$  的邻域  $\mathcal{U}_\rho$ , 使得若  $\gamma_0 = (v_0, y_0, w_0) \in \mathcal{U}_\rho$ , 则有  $\omega(\gamma_0) = m_{y_0}$ ,  $\omega(\gamma_0) = l_{y_0}$  或  $\omega(\gamma_0) = p_{y_0}$ 。存在  $K_\lambda$  的邻域  $\mathcal{U}_\lambda$  使得如果  $\gamma_0 \in K_\lambda$ , 则有  $\omega(\gamma_0) = m_{y_0}$ ,  $\omega(\gamma_0) = l_{y_0}$  或  $\omega(\gamma_0) = u_{y_0}$ 。

最后的假设与慢动力学相关。

(A6) 存在  $k_\rho < k_\lambda$  使得若  $k_\rho < k < k_\lambda$  则存在一个光滑函数  $v = h(w, y, k)$ , 当且仅当  $v = h(w, y, k)$  时, 使得  $g(v, w, y, k) = 0$  成立。另外, 当且仅当  $v > h(w, y, k)$  时, 有  $g(v, w, y, k) < 0$ 。若  $M_k = \{(u, w, y) : v = h(w, y, k)\}$ , 对于  $y_k \in (\lambda, \rho)$ , 则  $M_k \cap \mathcal{L} = m_{y_k}$ 。

注: 这个假设意味着对于  $k \in (k_\rho, k_\lambda) \epsilon > 0$ , 方程 (2.1) 有一个精确的不动点, 为中间分支上的点  $m_{y_k}$ 。

(A7) 若  $k_\rho < k < k_\lambda$ , 则  $LB \subset \mathcal{M}_k^-$ 。另外, 存在唯一  $k_h \in (k_\rho, k_\lambda)$ , 使得  $y_{k_h} = h$ 。若  $k_\rho \leq k \leq k_h$ , 则  $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_k^+$ 。

注: 最后一个假设说明当  $k \in (k_\rho, k_\lambda)$ ,  $\epsilon > 0$  及  $(u, y, w)$  位于下方分支时,  $y' = \epsilon g(v, y, w, k) > 0$ 。此外, 当  $k_\rho < k < k_h$ ,  $\epsilon > 0$  及  $(u, y, w)$  在  $\mathcal{P}$  附近, 则  $y' < 0$ 。注意当  $k = k_h$ ,  $\epsilon > 0$  时, 则系统 (2.1) 的不动点为  $m_h$ 。它是系统 (2.1) 在  $\epsilon = 0$  时的同宿点。

注: (1) 对于引言中提到的  $\beta$ -细胞模型, 如果我们对变量做出适当的解释, 这些假设至少可以在数值上得到验证。这里,  $v$  对应细胞内外的电位差,  $w$  对应钾离子通道状态变量,  $y$  与钙离子浓度有关。在原始的  $\beta$ -细胞模型的变量中, 系统 (2.1) 产生了“Z型”曲线, 而不是我们的“S型”曲线。参数  $k$  对应引言中提到的  $k_{Ca}$ 。

(2) 注意, 我们没有对休息点  $u_y$  做任何假设。这是因为我们在后面几节中考虑的周期解和混沌解从不接近上分支 (Upper Branch)。例如, 有可能存在  $\bar{y} > h$ , 使得  $y > \bar{y}$  时休息点  $u_y$  是稳定的, 并且当参数  $y$  减少到  $\bar{y}$  以后, 会发生 Hopf 分岔。这就是系统 (7.1.1) 所出现的现象。

(3) 类爆发解存在的根本原因如下 (见图 3(a))。假设  $\gamma(t)$  是当  $0 < \epsilon \ll 1$ ,  $k \in (k_\rho, k_h)$  时系统 (2.1) 的解, 假设  $\gamma(t)$  靠近下分支。因为  $y' > 0$  靠近下支,  $\gamma(t)$  将缓慢地向右移动, 向上移动到下支。这与爆炸的被动阶段相对应。 $\gamma(t)$  将向上移动较低的分支, 直到推过右膝。在这一点上, 快速动力学接管了  $\gamma(t)$  快速地接近周期解的分支  $\mathcal{P}$ 。因为  $y' > 0$  在周期解附近,  $\gamma(t)$  会绕一圈, 慢慢向左移动。这对应于脉冲序列或爆发的活跃阶段。峰值将持续, 直到  $\gamma(t)$  被推到同斜轨迹的左侧。在这一点上,  $\gamma(t)$  经过同斜轨迹后的行为是不清楚的。然而, 合理的预期是, 最终快速动力学迫使  $\gamma(t)$  返回到较低的分支, 整个过程重新开始。寻找混沌解的一个关键步骤是理解  $\gamma(t)$  通过同斜轨迹时的行为。我们看到  $\gamma(t)$  一定在某一点, 靠近 (A2) 中定义的不稳定轨迹  $\mathcal{M}_k^+$  或  $\mathcal{M}_k^-$  中的一种一支。如图 3(b) 所示。

### 第 3 章 碉堡、管子等

我们现在在相空间中定义各种邻域。这些邻域可以让我们跟踪它们在相空间中循环时的轨迹。基本的想法是在左右膝上放“药丸盒”, 在较低和中间的分支上放“管子”, 在周期解上放环形区域。当然, 必须谨慎地定义这些邻域, 以便它们能够正确地结合在一起。此外, 我们必须确保轨迹以适当的方式进入和退出它们。在本节中, 我们假设  $k_\rho < k < k_h$ 。

药盒和药管将是单位立方体的同胚像:

$$C = \{(x, s, z) : |x| \leq 1, |s| \leq 1, |z| \leq 1\}.$$

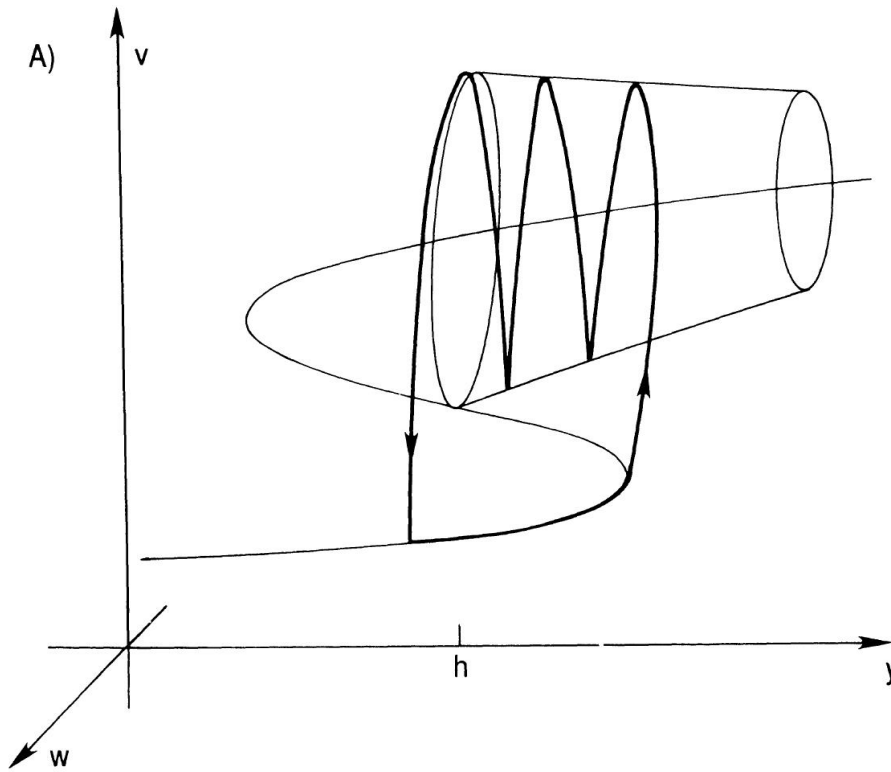


FIG. 3(a). The trajectory of a bursting solution in phase space. In the passive phase, the solution lies close to the lower branch. The trains of rapid spikes correspond to the solution passing close to the branch of periodic solutions.

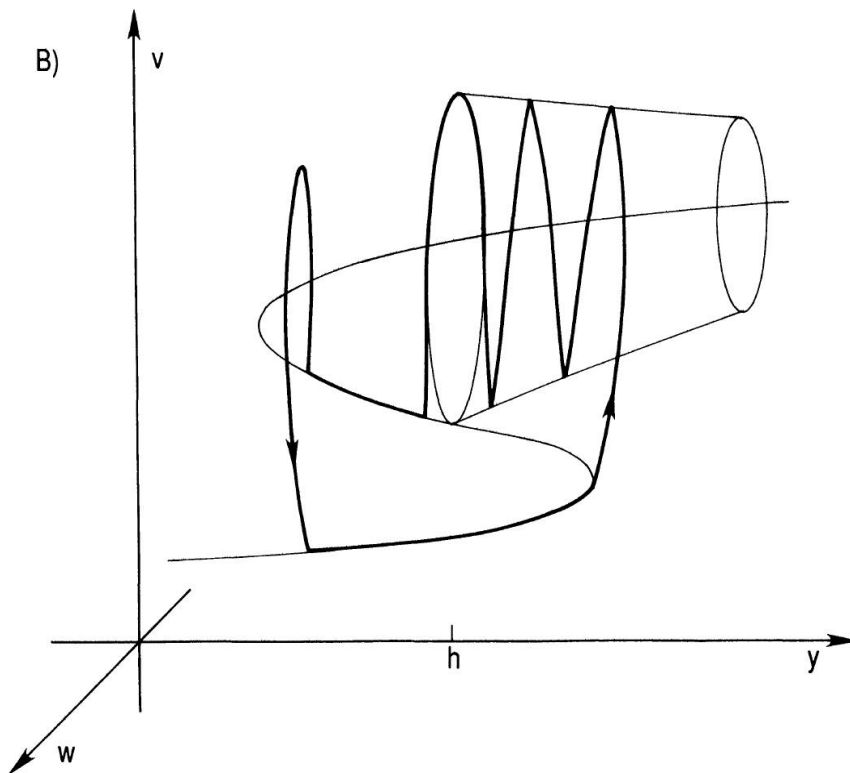


FIG 3(b). A bursting solution may lie close to the middle branch for a long time before leaving it. This gives rise to the plateau region in a bursting solution.

表示  $C$  的开边:

$$\begin{aligned} C_L &= \text{int}\{(x, s, z) \in C : s = -1\}, & C_R &= \text{int}\{(x, s, z) \in C : s = +1\}, \\ C_{BT} &= \text{int}\{(x, s, z) \in C : z = -1\}, & C_T &= \text{int}\{(x, s, z) \in C : z = +1\}, \\ C_{BK} &= \text{int}\{(x, s, z) \in C : x = -1\}, & C_F &= \text{int}\{(x, s, z) \in C : x = +1\}. \end{aligned}$$

令  $E^3$  为的  $(v, w, y)$  像空间。定义  $\pi_y : E^3 \rightarrow E^1$  为  $\pi_y(v, w, y) = y$  所定义的投影映射。

### 定义 3.1

假设  $\mathcal{U} \in R^3$  及  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow E^3$ 。当满足以下条件时, 我们说  $\Phi$  是从  $\mathcal{U}$  到  $E^3$  的  $y$ -同胚:

- (a)  $\Phi$  是从  $\mathcal{U}$  到其相的同胚。
- (b) 若  $(x_1, s_1, z_1) \in \mathcal{U}$ ,  $(x_2, s_2, z_2) \in \mathcal{U}$ ,  $s_1 \leq s_2$  则:

$$(\pi_y \circ \Phi)(x_1, s_1, z_1) \leq (\pi_y \circ \Phi)(x_2, s_2, z_2)$$



本节中考虑的所有映射都是  $y$ -同胚。条件 (b) 是自然的, 因为  $y$  是慢变量, 当  $\epsilon = 0$  时被视为参数。接下来,  $\delta$  将是一个小的正常数, 它的大小可能会变小。

## 1 右膝和下分支

下面两个命题很容易从上一节的假设中推导出来。在第一个命题中, 我们定义右膝的邻域  $N_\rho$ 。在第二个命题中, 我们定义下分支的邻域  $N_L$ 。它的吸引力在于, 对于  $\epsilon = 0$ , (2.1) 的解位于  $\partial N_L$  上的必须在正向时间内进入  $N_L$ 。这些集合是这样构造的,  $N_L$  的右边包含在  $N_\rho$  的左边的内部。当  $\epsilon$  很小时, 位于  $N_L$  中的轨迹最终必须通过  $N_\rho$  的顶部进入  $N_\rho$ 。见图 4。

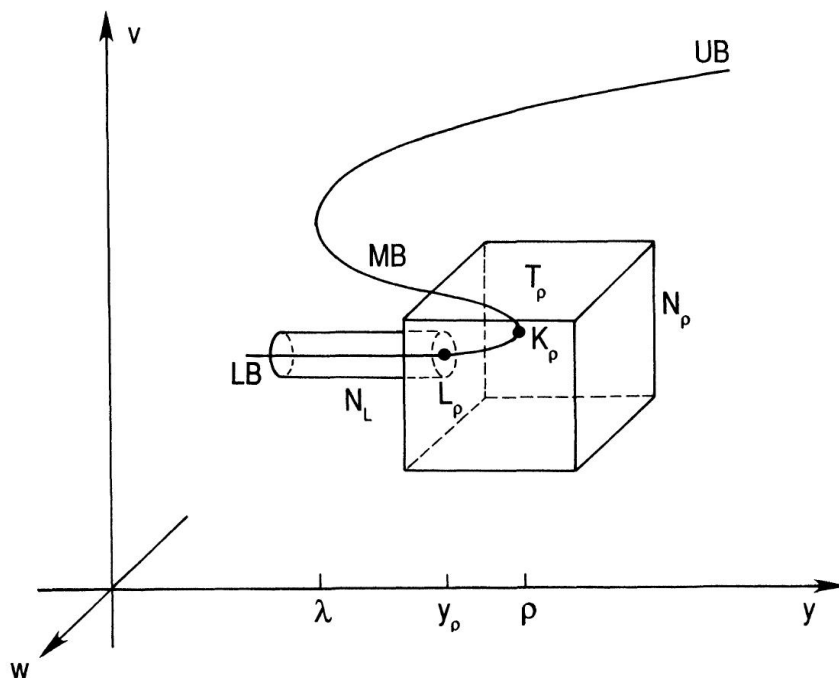


FIG. 4. If  $\epsilon > 0$ , then solutions of (2.1) which lie in  $N_L$  must enter  $N_\rho$  through  $L_\rho$  and can only leave  $N_\rho$  through  $T_\rho$ .



**命题 3.1**

存在一个  $y$ -同胚  $\Phi : C \rightarrow E^3$ , 使得:

- (a)  $K_\rho \in \text{int}(\Phi_\rho(C))$ .
- (b)  $\Phi_\rho(C) \subset \mathcal{M}^- \cap \{(v, w, y) : y < \rho + \delta_0\}$ , 其中  $\delta_0$  在 (A4) 被定义.
- (c) 若  $\varepsilon = 0$  及  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in \text{int}(\Phi_\rho(C))$  条件下的解, 则  $\gamma(t)$  尽可能从  $\Phi_\rho(C_T)$  穿过  $\Phi_\rho(C)$ . 若  $\gamma(t)$  不离开  $\Phi_\rho(C)$ , 则  $\omega(\gamma(t)) \subset \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}$  为 (A4) 中所定义的解的流形.
- (d) 若  $\varepsilon = 0$ ,  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在条件  $\gamma(t_0) \in \partial\Phi_\rho(C)$  下的解, 那么  $\gamma'(t_0)$  不切于  $\partial\Phi_\rho(C)$ .

令  $N_\rho = \Phi_\rho(C)$ ,  $T_\rho = \Phi_\rho(C_T)$ ,  $L_\rho = \Phi_\rho(C_L)$ , 及  $y_\rho = (\pi_y \circ \Phi_\rho)(C_L)$ . 注意  $y_\rho$  是很好定义的, 因为  $\Phi_\rho$  是一个  $y$ -同胚.

我们的下一个结果是根据前面的命题和常微分方程解对参数的连续依赖. 它指出, 如果  $\varepsilon$  足够小, 那么方程 (2.1) 的任何解经过  $N_\rho$  的左侧  $L_\rho$  必须进入  $N_\rho$ , 然后通过顶部  $T_\rho$  离开  $N_\rho$ .

**推论 3.1**

若  $\varepsilon > 0$  足够小, 且  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in L_\rho$  时的一个解, 则存在  $t_1 > t_0$  使得对于  $t_0 < t < t_1$ ,  $\gamma(t_1) \in T_\rho$  有  $\gamma(t) \in N_\rho$ .

我们现在考虑下方分支. 从这些假设很容易得出以下结果:

**命题 3.2**

存在  $y$ -同胚  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow E^3$  使得  $N_L = \Phi_L(C)$ :

- (a) 对于  $\lambda - \delta \leq y \leq y_\rho$  有  $l_y \in N_L$ ;
- (b)  $N_L \subset \mathcal{M}^-$ ;
- (c)  $(\pi_y \circ \Phi_L)(C_L) = \lambda - \delta$
- (d)  $(\pi_y \circ \Phi_L)(C_R) = y_\rho$  且  $\Phi_L(C_L) \subset L_\rho$ ;
- (e) 若  $\varepsilon = 0$ ,  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(0) \in \partial(N_L) \cap \{(u, w, y) : \lambda - \delta < y < y_\rho\}$  条件下的一个解, 则  $\gamma(t)$  随着时间推移横切的进入  $N_L$ .

**推论 3.2**

若  $\varepsilon > 0$  足够小, 且  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in N_L$  时的一个解, 则存在  $t_1 \geq t_0$  使得对于  $t_0 < t < t_1$ ,  $\gamma(t_1) \in \Phi_L(C_R) \subset L_\rho$  时有  $\gamma(t) \in N_L$ .

结合推论 3.1 和 3.2 有以下结果:

**推论 3.3**

若  $\varepsilon > 0$  足够小, 且  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in N_L$  时的一个解, 则存在  $t_2 > t_1 > t_0$  使得当  $t_1 < t < t_2$ ,  $\gamma(t_2) \in T_\rho$  时, 对于  $t \in (t_0, t_1)$ ,  $\gamma(t_1) \in L_\rho$ ,  $\gamma(t) \in N_\rho$  时有  $\gamma(t) \in N_L$ .

## 2 左膝

我们现在定义左膝的邻域, 方法与我们对右膝所做的类似. 下面的结果很容易由我们的假设得出.

**命题 3.3**

存在  $y$ -同胚  $\Phi_\lambda : C \rightarrow E^3$  使得  $N_\lambda = \Phi_\lambda(C)$ :

- (a)  $K_\lambda \in N_\lambda$ ;
- (b)  $N_\lambda \subset \mathcal{M}^+$ ;
- (c) 若  $\epsilon = 0$ ,  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in \partial N_\lambda$  时的一个解, 则  $\lambda'(t_0)$  不切于  $\partial N_\lambda$ ;
- (d) 若  $\epsilon = 0$ ,  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in N_\lambda$  时的一个解, 对于  $t > t_0$ ,  $\gamma(t)$  仅可从  $\Phi_\lambda(C_{BT})$  通过  $N_\lambda$ . 在这种情况下, 存在  $t_1 > t_0$ , 使得  $\gamma(t_1) \in N_L$ .

设  $B_\lambda = \Phi_\lambda(C_{BT})$ ,  $R_\lambda = \Phi_\lambda(C_R)$ ,  $y_\lambda = (\pi \circ \Phi_\lambda)(C_R)$ .

下一个结果由前一个命题和解对参数的连续依赖得到。

**推论 3.4**

若  $\epsilon > 0$  足够小, 且  $\gamma(t)$  是系统 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in R_\lambda$  时的一个解, 则存在  $t_2 > t_1 > t_0$  使得当  $t \in (t_0, t_1)$ ,  $\gamma(t_1) \in B_\lambda, \gamma(t_2) \in N_L$  时有  $\gamma(t) \in N_\lambda$ .

### 3 中间分支

现在我们构造一个“管道”  $N_M$ , 对于某些  $\delta_1 > 0$ , 该管道包含了  $y_\lambda \leq y \leq h + \delta_1$  的中间分支。重要的是要跟踪  $N_M$  轨迹的哪一边可能离开或消失, 以及轨迹离开  $N_M$  后会去哪里。

**命题 3.4**

存在一个  $\delta_1 > 0$ , 以及一个  $y$ -同胚  $\Phi_P : C \rightarrow E^3$  使得如果有  $N_M = \Phi_M(C)$ , 且  $\gamma(t)$  是  $\epsilon = 0$  条件下系统 (2.1) 的一个解, 则有:

- (a)  $m_y \in N_M$  for  $y_\lambda \leq y \leq h + \delta_1$ ;
- (b)  $N_M \subset M^+$ ;
- (c)  $\Phi_M(C_L) \subset R_\lambda$  及  $(\pi_y \circ \Phi_M)(C_R) = h + \delta_1$ ;
- (d) 若  $\gamma(t_0) \in \Phi_M(C_T) \cup \Phi_M(C_{BT})$ , 则  $\gamma(t)$  随时间推进横切进入  $N_M$ 。
- (e) 若  $\gamma(t_0) \in \Phi_M(C_F) \cup \Phi_M(C_{BK})$ , 则  $\gamma(t)$  随时间推移横切的进入  $N_M$ 。另外, 存在  $t_1 > t_0$  使得当  $t \in (t_0, t_1)$ , 或  $\gamma(t_1) \in N_M$ , 或  $\gamma(t_1) \in N_L$ , 有  $\gamma(t) \notin N_M$  成立。
- (f) 若  $h < y \leq h + \delta_1$ , 则每个周期解  $p_y(t)$  进入  $N_M$  并且穿过  $\Phi_M(C_{BK})$ 。

**证明** 在整个证明过程中, 我们考虑  $\epsilon = 0$  时系统 (2.1) 的解。我们改变坐标, 使靠近中间分支时, 系统 (2.1) 变为以下形式:

$$\begin{aligned} p' &= \lambda_1(y)p + g_1(p, q, y), \\ q' &= -\lambda_2(y)q + g_2(p, q, y), \\ y' &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

这些方程对  $|p| \leq \delta, |q| \leq \delta, |y_\lambda| \leq h + \delta$  成立。这里  $\lambda_1(y)$  和  $-\lambda_2(y)$  分别是 (FS) 的正特征值和负特征值在其余点  $m_y$  处线性化。函数  $g_1(p, q, y)$  和  $g_2(p, q, y)$  都是  $o(|p| + |q|)$  且满足:

- (a) 对于  $|q| \leq \delta$ , 及  $y_\lambda \leq y \leq h + \delta$  时有  $g_1(0, q, y) = 0$ ;
- (b) 对于  $|p| \leq \delta$ , 及  $y_\lambda \leq y \leq h + \delta$  时有  $g_2(p, 0, y) = 0$ 。

因此,  $m_{y_1}$  处的局域稳定流形,  $y_\lambda \leq y_1 \leq h + \delta$  由  $\{(p, q, y) : p = 0, y = y_1\}$  给出, 局域不稳定流形由  $\{(p, q, y) : q = 0, y = y_1\}$

给出。 $m_y$  的不稳定流形由两个轨迹组成，如在第 2 章中，我们用  $M_y^+(t)$  和  $M_y^-(t)$  表示。我们假设局部坐标的选择使得当  $y_\lambda \leq y \leq h + \delta$  时，

$$M_y^-(0) = (-\delta, 0, y) \quad \text{and} \quad M_y^+(0) = (\delta, 0, y).$$

假设  $q_1, q_2, \delta_1$  是满足条件  $\max\{q_1, q_2, \delta_1\} \leq \delta$  的正常数。考虑矩形邻域：

$$R \equiv R(q_1, q_2, \delta_1) = \{(p, q, y) : |p| \leq \delta, -q_2 \leq q \leq q_1, y_\lambda < y < h + \delta_1\}$$

我们表示  $R$  的边为：

$$R_F = \{(p, q, y) \in R : p = -\delta, -q_2 < q < q_1\}$$

$$R_B = \{(p, q, y) \in R : p = \delta, -q_2 < q < q_1\}$$

$$R_T = \{(p, q, y) \in R : |p| < \delta, q = q_1\}$$

$$R_{B \circ T} = \{(p, q, y) \in R : |p| < \delta, q = -q_2\}$$

如果必要的话，选择更小的  $\delta$ ，我们可假设  $R \in \mathcal{M}^+$ ，轨迹经过  $R_T \cup R_{B \circ T}$  进入  $R$ ，且通过  $R_F \cup R_B$  离开。注意  $M_y^-(t)$  经过  $R_F$  离开  $R$ ， $M_y^+(t)$  经过  $R_B$  离开  $R$ 。

令  $\Phi_M : C \rightarrow R^3$  是一个  $y$ -同胚使得  $\Phi_M(C) = R(q_1, q_2, \delta_1)$ ， $\Phi_M(C_T) = R_T$ ， $\Phi_M(C_{B \circ T}) = R_{B \circ T}$ ， $\Phi_M(C_F) = R_F$ ， $\Phi_M(C_{BK}) = R_B$ 。这个映射满足命题中 (a)-(d) 的条件。我们现在证明，可以选择常数  $q_1, q_2$  和  $\delta_1$ ，使  $\Phi_M$  满足 (e) 和 (f)。

为了验证 (e)，我们必须证明每个离开  $R$  的轨迹最终要么返回  $R$ ，要么进入  $N_L$ 。请注意，轨迹只能通过  $R_F$  或  $R_B$  离开  $R$ 。假设  $y \in [y_\lambda, h + \delta_1]$  且  $\gamma_q(t)$  是  $\epsilon = 0$  和  $\gamma_q(0) = (-\delta, q, y) \in R_F$  时系统 (2.1) 的解。因为当  $t \rightarrow \infty$  时，有  $\gamma_0(t) = M_y^-(t) \rightarrow l_y$ ，因此，如果  $|q|$  足够小，那么  $\gamma_q(t) \in N_L$  对于某些  $t > 0$  成立。因此，如果  $q_1$  和  $q_2$  足够小，那么每个离开  $R_F$  的轨迹最终都必须进入  $N_L$ 。

我们现在考虑由  $R_B$  离开  $R$  的轨迹。对于  $y \in [y_\lambda, h + \delta_1]$ ，令  $\gamma_q(t)$  现在是当满足条件  $\epsilon = 0$  和  $\gamma_q(0) = (\delta, q, y) \in R_B$  时系统 (2.1) 的解。如果  $y \in [y_\lambda, h)$ ，则  $\gamma_0(t) = M_y^+(t) \rightarrow l_y$ 。由此得出，对于给定  $\delta_1, q_0$  可以进行选择使得如果  $y_\lambda < y < h - \delta_1$  并且  $|q| < q_0$ ，然后对于某些  $t \geq 0$  有  $\gamma_q(t) \in N_L$ 。

现在假设  $|y - h| < \delta_1$ 。若  $q, \delta_1$  均足够小，然后  $\gamma_q(0)$  靠近  $M_h^+(0)$ 。对于  $t > 0$ ，无论常数  $q_1, q_2, \delta_1$  如何选择，轨道  $M_h^+(0)$  均会回到  $R$ 。不难发现常数  $q_1, q_2, \delta_1$  可以选择为满足条件  $|y - h| < \delta_1$  及  $-q_1 < q < q_2$  的值，则  $\gamma_q(t)$  一定会回到  $R$ 。参考图 5，这验证了推论中的 (e)。

最后，考虑周期解  $p_y(t)$ 。这些轨道在当  $y \rightarrow h$  时接近  $M_h^+(t)$ 。回忆一下  $M_h^+(t)$  经过  $R_B = \Phi_M(C_{BK})$  离开  $R$ 。因此选择  $\delta_1$  值小一些，如果必要的话，我们可以保证如果  $h < y < h + \delta_1$ ，则周期解  $p_y(t)$  经过  $R_B$ 。 ■

我们通过考虑当  $\epsilon > 0$  时接近  $MB$  的 (2.1) 解来结束本节。

### 推论 3.5

若  $\epsilon$  足够小， $\gamma(t)$  是对于某些  $t_0, \gamma(t_0) \in N_M$  时系统 (2.1) 的一个解，那么存在  $t_1 > t_0$  使得  $\gamma(t_1) \in N_L$ 。另外， $\gamma(t)$  可通过  $\Phi_M(C_F), \Phi_M(C_{BK}), \Phi_M(C_L)$  等离开  $N_M$ 。

**证明** 因为  $y' < 0$  在  $N_M$ ， $\gamma(t)$  必须离开  $N_M$ 。由前面的命题，解对参数的连续依赖，以及  $y' < 0$  在  $N_M$  中，由此得出，如果  $\epsilon$  足够小，那么  $\gamma(t)$  只能通过  $\Phi_M(C_F), \Phi_M(C_{BK}), \Phi_M(C_L)$  离开  $N_M$ 。若  $\gamma(t)$  通过  $\Phi_M(C_L)$  离开  $N_M$ ，那么从推论 3.4 可知，对于某些  $t_1 > t_0, \gamma(t_1) \in N_L$  离开  $N_M$ 。若  $\gamma(t)$  通过  $\Phi_M(C_F) \cup \Phi_M(C_{BK})$  离开  $N_M$ ，那么根据前面的命题，要么  $\gamma(t)$  返回到  $N_M$ ，要么对于  $t_1 > t_0$ ，回到  $\gamma(t_1) \in N_L$ 。然而，对于  $\epsilon > 0, \gamma(t)$  当然只能在不穿过  $N_L$  的情况下有限次数的返回  $N_M$ 。 ■

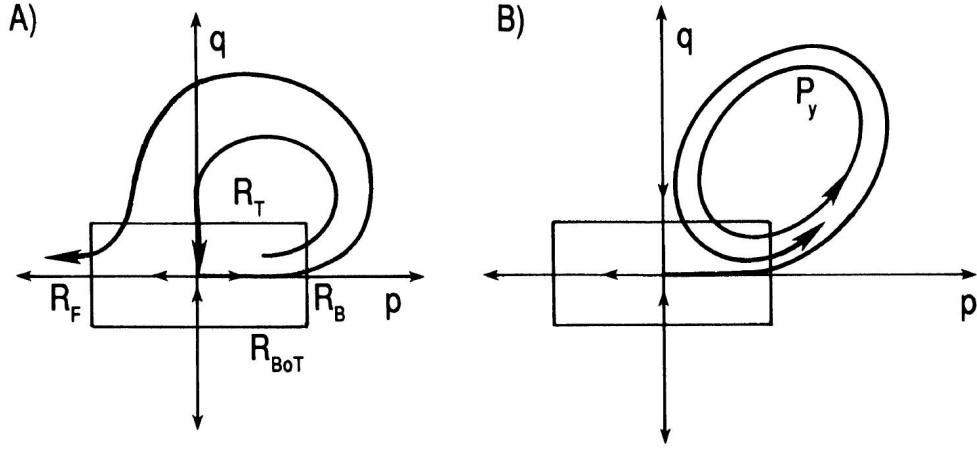


FIG. 5. Various objects used in the proof of Proposition 3.3.1. In (a),  $h - \delta_1 < y < h$ , while in (b),  $h < y < h + \delta_1$ . In both cases, solutions which leave  $R$  through  $R_B$  must, at some later time, enter  $R$  through  $R_T$ .

## 4 周期解

回顾 (A4), 每个周期解  $P_y(t)$  作为 (FS) 的解是渐近稳定的。因此, 对于每个  $y \in (h, \rho + \delta_0)$ , 在  $(v, w)$  相空间中存在一个紧密邻域  $P_y(t)$  是吸引的。由于这个原因, 下面的命题很容易得出。对于结果的表述, 我们设:

$$A = \left\{ (x, s, z) : \frac{1}{2} \leq x^2 + z^2 \leq 2, -1 \leq s \leq 1 \right\}$$

$$\Sigma_P = \{(x, s, z) \in A : x = 0, z < 0\}$$

$$A_L = \{(x, s, z) \in A : s = -1\}$$

$$A_R = \{(x, s, z) \in A : s = +1\}$$

$$A_B = \{(x, s, z) \in \partial A : |s| < 1\}$$

$$\Sigma_L = A_L \cap \Sigma_P$$

### 命题 3.5

存在一个  $y$ -同胚  $\Phi_P : A \rightarrow E^3$  使得如果有  $N_P = \Phi_P(A)$ ,  $\gamma(t)$  是  $\epsilon = 0$  条件下系统 (2.1) 的一个解, 则有:

- (a)  $N_P \subset M^+$ ;
- (b) 若  $\gamma(t_0) \in \Phi_P(A_B)$ , 则  $\gamma(t)$  随时间推进横切进入  $N_P$ 。
- (c)  $(\pi_y \circ \Phi_P)(A_L) = h + \delta_1$ , 且  $(\pi_y \circ \Phi_P)(A_R) = \rho + \delta_0$ ;
- (d)  $\Phi_P(\Sigma_L) \subset \Phi_M(C_{BK})$ .

我们之所以选择  $\Phi_P$  使得命题 3.5(d) 成立, 是因为命题 3.4(f)。由连续相关可知, 如果  $\epsilon$  足够小, 则位于  $\Phi_P(A_L)$  的 (2.1) 的每一个解一定会进入  $N_M$ 。此外, 如果  $\epsilon > 0$ , 则  $y' < 0$  在  $N_P$ 。因此, 如果  $\epsilon$  足够小, 则位于  $N_P$  的 (2.1) 的每一个解一定会通过  $\Phi_P(A_L)$  进入  $N_M$ 。通过选择小的  $\epsilon$ , 我们可以保证当轨迹进入  $N_M$  时, 它是在  $y$  坐标满足  $y > h$  的点上进入的。这是因为命题 3.5(c)。我们在下一个推论中总结最后一段。

### 推论 3.6

若  $\epsilon$  足够小,  $\gamma(t)$  是  $\gamma(t_0) \in N_P$  时系统 (2.1) 的一个解, 那么存在  $t_2 > t_1 > t_0$  使得在满足以下条件时:  $t_0 \leq t \leq t_1, \gamma(t_1) \in \Phi_P(A_L), \gamma(t) \in M^+$  for  $t \in (t_0, t_2)$ , 以及  $\gamma(t_2) \in N_M, \gamma(t) \in N_P$  成立。另外,  $\pi_y(\gamma(t_2)) > h$ 。

## 第 4 章 爆发解的存在性

我们现在用一个不动点论证来证明, 如果  $k_\lambda < k < k_h$  且  $\epsilon$  足够小, 必然存在 (2.1) 的周期解。这与爆发解 (Bursting solution) 相对应。我们证明, 当  $\epsilon$  足够小时, 命题 3.1 定义的集合  $T_\rho$  被流连续映射到它自己当中。周期解的存在性由布鲁尔不动点定理 (Brouwer fixed point theorem) 得到。参见图 6。

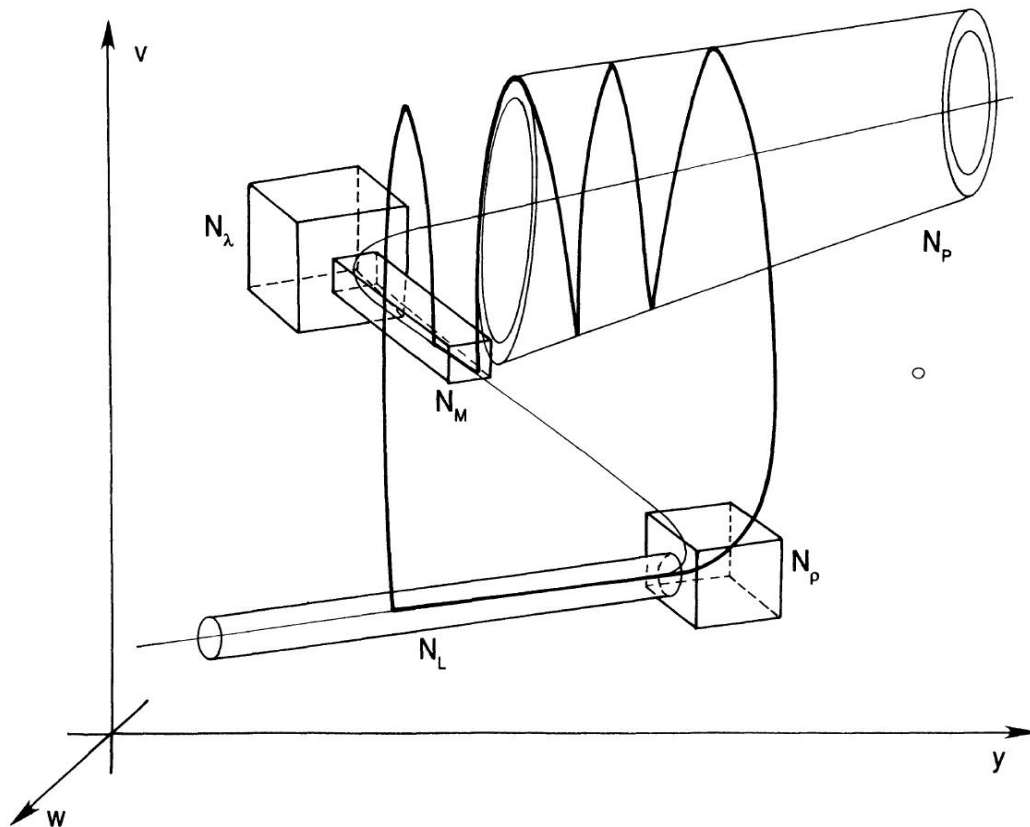


FIG. 6. Various sets used to prove the existence of a bursting solution. Every solution of (2.1) which lies in  $N_L$  must, at some later time, lie in  $N_P$ ,  $N_P$ ,  $N_M$ , and then return to  $N_L$ .

固定  $\gamma_0 \in T_\rho$ , 令  $\gamma_\epsilon(t)$  在  $\gamma(0) = \gamma_0$  条件下 (2.1) 的解。若  $\epsilon = 0$ , 则当  $t \rightarrow \infty$ ,  $\gamma(t)$  靠近其中一个周期解  $p_y(t)$ 。因此, 若  $\epsilon$  足够小, 那么  $\gamma(t_1) \in N_P$  对于一些  $t_1 > 0$  成立。现在我们利用推论 3.3, 3.5, 3.6 说明, 存在  $\epsilon_0$  使得若  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , 那么也会存在  $t_4 > t_3 > t_2 > t_1$  使得  $\gamma(t_2) \in N_M, \gamma(t_3) \in N_L$ , 及  $\gamma(t_4) \in T_\rho$ 。令  $\Gamma(\gamma_0) = \gamma(t_4)$ 。那么可以确定的是,  $\epsilon_0$  可以不依赖于  $\gamma_0$  得到, 并且  $\Gamma$  是连续的。因此,  $\Gamma$  必有一个不动点。当然, 这个不动点对应于 (2.1) 的周期解。

## 第 5 章 连续尖峰

在这一节中, 我们考虑连续峰值的存在性。回想一下, 这对应于 (2.1) 的稳定周期解, 它总是位于流形  $\mathcal{S}$  附近。对于我们的结果, 有必要对 (2.1) 中的非线性函数做两个额外的假设。第一个假设与 (FS) 的周期解  $p_y(t)$  有关。由于 (FS) 是二维的, 每个解  $p_y(t)$  只能有一个 Floquet 乘子, 即  $\beta_y$ , 这不是单位。我们假设, 在 (A4) 中, 每个轨迹  $p_y(t)$  是渐近稳定的。因此,  $|\beta_y| \leq 1$ 。我们现在做以下额外的假设。

(A8) 存在  $\alpha, h < \alpha < \rho$ , 使得若  $h < \alpha < \rho$ , 则  $|\beta_y| < 1$  成立。

这一假设使我们可以得出这样的结论: 二维不变流形  $\mathcal{P}$  在  $\epsilon$  很小时出现摄动。

对于我们第二个额外的假设, 回顾在 (A6) 中所定义的概念:

(A9)  $k_h < h < k_\lambda, \frac{\partial g}{\partial k(v,w,y,k)} > 0$  处于同宿轨道  $M_y^+(y)$  的邻域中

注: 最后一个假设在引言中提到的  $\beta$  细胞模型中是满足的。对于那些模型,  $\frac{\partial g}{\partial k > 0}$  是处处成立的。

在 (A7) 中, 我们假设如果  $k = k_h$ , 则  $\mathcal{P} \in M_k^+$ 。特别是, 对于所有  $t, p_\alpha(t) \in M_{k_h}^+$ 。选择  $k_0 \in (k_h, k_\lambda)$ , 则如果  $k \in [k_h, k_0]$ , 那么对于所有  $t, p_\alpha(t) \in M_k^+$ 。接下来我们现在可以陈述这一章的主要结果。

### 定理 5.1

假设  $k_h < k < k_0$ 。若  $\epsilon$  足够小, 则 (2.1) 出现连续峰尖。



注: 保证定理 5.1 成立的  $\epsilon$  的范围依赖于  $k$  的选择。

**证明** 给定  $k \in (k_h, k_0)$ , 对于  $\delta < (\alpha - h)/10$ , 令  $S_\delta = \{(v, w, y) : h + \delta < y < \alpha - \delta\}$ 。我们利用假设 (A8) 和 Fenichel[9] 得出结论, 当  $\epsilon$  足够小时,  $\mathcal{P} \cap S_\delta$  摄动变为光滑的二维不变流形, 我们用  $\mathcal{P}_\epsilon$  表示。常数  $\delta$  将在后面指定。我们将证明  $\delta$  可以被选择使得如果  $\epsilon$  足够小那么一定存在一个周期解, 它位于  $\mathcal{P}_\epsilon$ 。证明将使用一个不动点论证。为了建立等式, 我们首先考虑  $\epsilon = 0$  的情况。

令  $\Sigma$  是一个包含每个点  $p_y(0), h + \delta < y < \alpha - \delta$  的二维截面, 且它横截于  $\epsilon = 0$  时由 (2.1) 所求得的流。假设  $P_y(0)$  连续依赖于  $y$ 。因此是  $\Sigma \cap \mathcal{P}$  上的连续曲线。若  $\epsilon$  很小, 则  $\Sigma$  是一些函数  $\psi_\epsilon : [-1, 2] \rightarrow \Sigma$  的同胚相。令  $\pi_y$  是第三章所定义的投影映射。可以假设  $\pi_y(\psi_\epsilon(-1)) = h + \delta, \pi_y(\psi_\epsilon(0)) = h + 2\delta, \pi_y(\psi_\epsilon(1)) = \alpha - 2\delta, \pi_y(\psi_\epsilon(2)) = \alpha - \delta$ , 且若  $-2 < s_1 < s_2 < 1$ , 有  $\pi_y(\psi_\epsilon(s_1)) < \pi_y(\psi_\epsilon(s_2))$ 。

令  $\gamma_{\epsilon,s}(t)$  是  $\gamma_{\epsilon,s}(0) = \psi_\epsilon(s)$  条件下系统 (2.1) 的解。若  $\epsilon$  则对于每一个  $s \in [-1, 2], \gamma_{0,s}(t)$  是周期的。因此, 存在  $t_s$  使得  $\gamma_{0,s}(t) \notin \Sigma$  对于  $0 < t < t_s$  且  $\gamma_{0,s}(t_s) = \gamma_{0,s}(0) \in \Sigma$ 。若  $\epsilon$  很小, 且  $0 \leq s \leq 1$ , 存在  $t_{\epsilon,s}$  使得  $\gamma_{\epsilon,s}(t) \notin \Sigma$  对于  $0 < t < t_{\epsilon,s}$  且  $\gamma_{\epsilon,s}(t_{\epsilon,s}) \in \Sigma$ 。当然了, 当  $\epsilon \rightarrow 0, t_{\epsilon,s} \rightarrow t_s$ 。另外, 因为  $\mathcal{P}_\epsilon$  是一个不变量,  $\gamma_{\epsilon,s}(t_{\epsilon,s}) \in \mathcal{P}_\epsilon \cap \Sigma$ 。因此, 对于  $s \in [0, 1], \Phi_\epsilon(s) = \psi_\epsilon^{-1}(\gamma_{\epsilon,s}(t_{\epsilon,s}))$  是从  $[0, 1]$  到  $[-1, 2]$  很好的一个连续映射。我们将证明对于很小的  $\epsilon, \Phi_\epsilon$  是一个不动点。即存在  $s_0 \in [0, 1]$  使得  $\gamma_{\epsilon,s_0}(t_{\epsilon,s_0}) = \psi_\epsilon(s_0) = \gamma_{\epsilon,s_0}(0)$  成立。这也就说明了  $\gamma_{\epsilon,s_0}(t)$  一定是一个周期解。为了证明  $\Phi_\epsilon$  确实有一个不动点, 我们将证明若  $\epsilon$  很小, 则有  $\Phi_\epsilon(0) > 0$  及  $\Phi_\epsilon(1) > 1$  成立。这等价于证明  $\delta$  可以被选择使得  $\epsilon$  足够小:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \pi_y(\gamma_{\epsilon,0}(t_{\epsilon,0})) > h + 2\delta, \\ (b) \quad & \pi_y(\gamma_{\epsilon,1}(t_{\epsilon,1})) < \alpha - 2\delta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

为证明 (5.1)(b), 我们假设若  $k \in [k_h, k_0]$ , 对于所有的  $t$ , 有  $p_\alpha(t) \in M_k^+$  成立。这说明对于  $\delta$  足够小, 则对于所有的  $t$ , 均有  $p_{\alpha-2\delta}(t) \in \{(v, w, y) : g(v, w, y, k) < 0\}$  成立。因此, 若  $\gamma_{\epsilon,1}(t) = (v_{\epsilon,1}(t), w_{\epsilon,1}(t), y_{\epsilon,1}(t))$  且  $\epsilon$  足够小, 则  $y'_{\epsilon,1}(t) < 0$  for  $|t| < 2t_{\epsilon,1}$ 。因此  $\pi_y(\gamma_{\epsilon,1}(t_{\epsilon,1})) = y_{\epsilon,1}(t_{\epsilon,1}) < y_{\epsilon,1}(0) = \alpha - 2\delta$ 。

仍需证明 (5.1)(a)。我们必须小心我们的符号因为轨迹  $\gamma_{\epsilon,0}(t)$  和常数  $t_{\epsilon,0}$  依赖于参数  $\epsilon$  和  $\delta$ 。我们现在表示:

$$\gamma(\epsilon, \delta, t) = (v(\epsilon, \delta, t), w(\epsilon, \delta, t), y(\epsilon, \delta, t))$$

对于  $\gamma_{\epsilon,0}(t), t(\epsilon, \delta)$  及  $t_{\epsilon,0}$ 。注意  $\gamma(0, \delta, t) = p_{h+2\delta}(t)$ 。因此, 轨道  $\gamma(0, \delta, t)$  靠近同宿轨道  $M_h^+(t)$  当满足条件  $\delta \rightarrow 0, t(0, \delta) \rightarrow \infty$  当  $\delta \rightarrow 0$  时。则 (5.1)(a) 将从以下结果得出。



### 引理 5.1

选定  $k \in (k_h, k_0)$ 。可选择  $\delta_0$  使得  $0 < \delta < \delta_0$  成立, 则存在  $\epsilon(\delta)$  使得若  $0 < \epsilon < \epsilon(\delta)$  成立, 则  $y(\epsilon, \delta, t(\epsilon, \delta)) > y(\epsilon, \delta, 0)$ 。



从 (2.1) 的最后一个方程中我们发现, 如果我们可以选择  $\epsilon$  和  $\delta$ , 以下式子成立:

$$\int_0^{t(\epsilon, \delta)} g(\gamma(\epsilon, \delta, t), k) dt > 0. \quad (5.2)$$

在接下来的式子中, 我们令  $k_\delta$  等于  $y_{k_\delta} = h + 2\delta$ 。这里我们使用 (A6) 中定义的表达法。然后:

$$\int_0^{t(\epsilon, \delta)} g(\gamma(\epsilon, \delta, t), k) dt = A(\delta) + B(\delta) + C(\epsilon, \delta) \quad (5.3)$$

其中:

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \int_0^{t(0, \delta)} g(p_{h+2\delta}(t), k_\delta) dt \\ B(\delta) &= \int_0^{t(0, \delta)} [g(p_{h+2\delta}(t), k) - g(p_{h+2\delta}(t), k_\delta)] dt \\ C(\epsilon, \delta) &= \int_0^{t(\epsilon, \delta)} g(\gamma(\epsilon, \delta, t), k) dt - \int_0^{t(0, \delta)} g(p_{h+2\delta}(t), k) dt \end{aligned}$$

我们认为  $A(\delta)$  是一致有界的。也就是说, 存在一个常数  $K_0$  使得:

$$|A(\delta)| < K_0, \delta. \quad (5.4)$$

为证明 (5.4), 回想一下轨迹  $p_{h+2\delta}(t)$  在当  $\delta \rightarrow 0$  时接近同斜轨道  $M_h^+(t)$ 。因此, 若能证明  $\int_{-\infty}^{\infty} g(M_h^+(t), k_h) dt$  是有界的, 则 (5.4) 自然成立。最后一种说法成立是因为当  $|t| \rightarrow \infty, g(m_h, k_h) = 0, M_h^+(t) \rightarrow m_h$  且以指数增长形式收敛,  $g$  是一个光滑函数。

接下来, 我们考虑  $B(\delta)$ , 通过平均值定理:

$$B(\delta) = \int_0^{t(0, \delta)} \frac{\partial g}{\partial k}(p_{h+2\delta}(t), \eta(t)) (k - k_\delta) dt \quad (5.5)$$

对于一些函数  $\eta(t) \in (k_\delta, k), t \in (0, t(0, \delta))$ , 由假设 (A9), 我们可选择  $\eta_0$  使得:

$$\frac{\partial g}{\partial k}(p_{h+2\delta}(t), \eta(t)) > \eta_0 \quad \text{对于 } t \in (0, t(0, \delta)). \quad (5.6)$$

假设  $\delta_0$  使得  $0 < \delta < \delta_0$ , 有:

$$k_\delta < \frac{k + k_h}{2}. \quad (5.7)$$

因此, 如果  $0 < \delta < \delta_0$ , 则

$$B(\delta) > \eta_0 \left( \frac{k - k_h}{2} \right) t(0, \delta). \quad (5.8)$$

回想一下, 当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $t(0, \delta) \rightarrow \infty$ 。我们假设  $\delta_0$  使得:

$$\eta_0 \left( \frac{k - k_h}{2} \right) t(0, \delta) > 4K_0, \quad \delta \in (0, \delta_0). \quad (5.9)$$

现在选定  $\delta \in (0, \delta_0)$  并考虑  $C(\epsilon, \delta)$ 。注意对于均匀分布的  $t \in (0, t(\epsilon, \delta))$  当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $\gamma(\epsilon, \delta, t) \rightarrow p_{h+2\delta}(t)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ 。另外当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $t(\epsilon, \delta) \rightarrow t(0, \delta)$ 。因此, 存在  $\epsilon(\delta)$  使得若  $0 < \epsilon < \epsilon(\delta)$ , 有以下式子成立:

$$|C(\epsilon, \delta)| \leq \eta_0 \left( \frac{k - k_h}{4} \right) t(0, \delta) \quad (5.10)$$

结合式子 (5.3), (5.4), (5.8), (5.9), (5.10), 可得出结论式 (5.2) 成立。

这就完成了引理 5.3 的证明, 引理 5.3 又意味着  $\epsilon$  和  $\delta$  可以被选择, 因此 (5.1)(a) 成立。由前面的注释可知, 这证明了在  $\mathcal{P}_\epsilon$  上一定存在一个周期解。根据假设 (A8) 以及  $\mathcal{P}_\epsilon$  上的流是 2 维的, 不难发现, 事实上,  $\mathcal{P}_\epsilon$  上

定存在着一个稳定的周期解。 ■

## 第 6 章 从第 $n$ 个到 $n+1$ 个尖峰的转变

### 1 引入

在本节中我们假设  $k_\rho < k < k_h$ 。在第 4 章中我们证明了, 在这种情况下, 对于  $\epsilon$  足够小, 一定存在一个爆发解。所谓爆发解的一次爆发, 我们指的是解的一个周期。很容易看出, 当  $\epsilon$  趋于 0 时, 每次爆发的峰值数量就变得无界了。这是因为爆裂解在周期解  $\mathcal{P}$  的分支附近花费了越来越多的时间。我们考虑了当  $\epsilon$  减少时, 每次爆发的峰值数量是如何增加的。要做到这一点, 我们必须首先为每个爆发解定义圈数的概念。这与每次爆发的峰值数量相对应。它等于解在一个周期内绕上分支的次数。实际上, (2.1) 的解  $\gamma(t)$  有两种途径绕上分支; 要么  $\gamma(t)$  靠近其中一个周期解  $p_y(t)$  要么它靠近其中一个轨迹  $M_y^+(t)$ 。定位斯梅尔马蹄铁的关键是要了解圈数是如何随着  $\epsilon$  的变化而变化的。我们证明了只有当  $\gamma(t)$  经过左膝  $k_\lambda$  附近时, 圈数才会发生变化。这意味着在增加一个脉冲的过程中, 每个脉冲的宽度都会增加。为了使它精确, 我们首先需要理解所有经过左膝附近轨迹的集合。

### 2 左膝的“稳定流形”

考虑  $\epsilon = 0$  时的系统 (2.1), 对于  $y \in (\lambda, \rho)$ ,  $m_y$  是在稳定流形中有两个轨迹的鞍点。设  $W_M$  是所有这些轨迹的并集。 $W_M$  是一个不变的二维流形; 它在中间分支的中心稳定流形中。因为剩下的每一个点  $m_y, \lambda < y < \rho$  都是双曲的, 对于小的  $\epsilon$ ,  $W_M$  会出现摄动到一个不变的二维流形, 我们用  $W_M(\epsilon)$  表示。见 Fenichel[9]。

注意,  $W_M$  将  $N_M$  划分为两个封闭区域。因此, 如果  $\epsilon$  足够小, 那么  $W_M(\epsilon)$  将  $N_M$  划分为两个封闭区域, 我们用  $N_M^+$  和  $N_M^-$  表示。我们假设, 不失一般性, 每个轨迹  $M_y^+(t)$  通过  $N_M^+(t)$  离开  $N_M$ , 每个轨迹  $M_y^-(t)$  通过  $N_M^-(t)$  离开  $N_M$ 。设  $\Sigma_\lambda = N_M^+ \cap \Phi_M(C_L)$ 。这是  $N_M^+$  的“左侧”, 它靠近左膝  $k_\lambda$ 。

假设  $\epsilon$  足够小,  $\gamma(t)$  是 (2.1) 在  $\gamma(t_0) \in W_M(\epsilon) \cap N_M$  条件下的解, 则由推论 3.5, 存在  $t_1 > t_0$ , 使得:

$$\gamma(t) \in N_M \text{ for } t \in (t_0, t_1) \quad \text{and} \quad \gamma(t_1) \in \Phi_M(C_F) \cup \Phi_M(C_{BK}) \cup \Phi_M(C_L).$$

因为  $W_M(\epsilon)$  靠近  $W_M$ , 及  $W_M \cap (\Phi_M(C_F) \cup \Phi_M(C_{BK})) = \emptyset$ , 我们可得出结论  $\gamma(t_1) \in \Phi_M(C_L)$ ,  $N_M$  的左侧。因此,  $W_M(\epsilon)$  中的每条轨迹一定与  $N_M$  相交并且从其左侧  $\Phi_M(C_L)$  离开  $N_M$ 。

### 3 弯曲数量

在本节中, 我们假设  $\epsilon > 0$  足够小。给定  $\gamma_0 \in N_L \cup N_\rho$ , 让  $\gamma_\epsilon(t)$  是 (2.1) 的解,  $\gamma_\epsilon(0) = \gamma_0$ 。我们现在定义这个轨迹的圈数  $\omega_\epsilon(\gamma_0)$  相对于  $\gamma_0$  的意义。

在第三章中, 我们知道存在  $t_2 > t_1 > 0$ , 使得  $\gamma_\epsilon(t) \in N_L \cup N_\rho$  对于  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $\gamma_\epsilon(t) \notin N_L \cup N_\rho$  for  $t_1 < t < t_2$ , 其中  $\gamma_\epsilon(t_2) \in N_L \cup N_\rho$  成立。令  $\Sigma = \Phi_P(\Sigma_P) \cup \Phi_M(C_{BK}) \cup \Sigma_\lambda$ , 其中  $\Phi_P(\Sigma_P)$  定义在 3.4 中,  $\Phi_M(C_{BK})$  在 3.3 有所讨论,  $\Sigma_\lambda$  定义在 §6.2。令  $\omega_\epsilon(\gamma_0)$  定义为与  $\Sigma$  在  $0 < t < t_2$  时所相交的次数  $\gamma_\epsilon(t)$ 。注意  $\gamma_\epsilon(t)$  只能横街的穿过  $\Sigma$ 。因此  $\omega_\epsilon(\gamma_0)$  连续依赖于  $\epsilon$  和  $\gamma_0$ 。

在我们的下一个结果中, 我们研究圈数如何随着  $\epsilon$  的变化而变化。

**命题 6.1**

假设  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$  足够小,  $\gamma_0 \in N_L \cup N_\rho$  和  $\omega_{\varepsilon_1}(\gamma_0) \neq \omega_{\varepsilon_2}(\gamma_0)$ 。然后存在  $varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , 使得  $\gamma_0 \in W_M(\varepsilon)$ 。

**证明** 因为轨迹  $\gamma_\varepsilon(t)$  横向穿过  $\Sigma$ , 因此一定存在  $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  及  $t_0 > 0$  使得  $\gamma_\varepsilon(t_0) \in \partial\Sigma$ 。由推论 3.5 及根据  $\gamma_\varepsilon(t_0) \notin \partial(\Phi_M(C_{BK}) \cup \Phi_P(\Sigma_P))$  吸引  $N_P$ 。因此,  $\gamma_\varepsilon(t_0) \in \partial(\Sigma_\lambda) \setminus \partial(\Phi_M(C_{BK}))$ 。从定义来看, 最后一组包含在  $W_M(\varepsilon)$  中, 因此证明完毕。 ■

注:

- (1) 从我们的结构可以很容易地得出, 当圈数变化时, 它恰好一一变化。
- (2) 当  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 对于每一个  $\gamma_0 \in N_L \cup N_\rho$   $\omega_\varepsilon(\gamma_0) \rightarrow \infty$ 。只是因为当  $\varepsilon$  很小时,  $\gamma_\varepsilon(t)$  会在某一时刻任意靠近其中一个周期解  $p_y(t)$ 。每一个周期解都无限次地穿过  $\Sigma$ 。因此通过  $\Sigma$  穿过  $\gamma_\varepsilon(t)$  的次数当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时收敛。
- (3) 给定  $\gamma_0 \in N_L \cup N_\rho$ 。前面两个注释暗示存在一个正整数  $N_0$ , 使得对于每个整数  $N > N_0$  存在  $\varepsilon_N$ , 使得  $\gamma_0 \in W_M(\varepsilon_N)$  和  $\omega_{\varepsilon_N}(\gamma_0) = N$ 。

## 4 斯梅尔马蹄铁 (The Smale horseshoe.)

在引言中, 我们指出 Smale 马蹄形可能存在于 (2.1) 定义的流中。斯梅尔马蹄形是否存在, 在很大程度上取决于慢动力学的结构。我们现在详细阐述这些说法。我们首先证明了一个命题, 它给出了流动产生斯梅尔马蹄形的充分条件。如我们在第 7 章中所示, 对于一组特定的方程, 这个充分条件可以很容易地进行数值检验。在 6.5 中, 我们通过分析证明了确实存在函数  $f_1(v, w, y)$ ,  $f_2(v, w, y)$  和  $g(v, w, y, k)$  满足 (A1)-(A9), 从而满足了这个条件。在 6.6 中, 我们讨论了 (2.1) 在什么情况下不会产生斯梅尔马蹄形。在这种情况下, 增加一个尖刺的过程将是连续的。

斯梅尔马蹄形将产生于由流定义的某个返回映射。我们现在定义相空间的某些子集, 这将允许我们定义和描述这个映射的重要性质。

考虑在 (A3) 中定义的轨道  $M_y^+(t)$  及  $M_y^-(t)$ 。回顾一下, 对于  $y \in (\lambda, h)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_y^-(t) = l_y$  及  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_y^+(t) = l_y$ 。因此,  $M_y^+(t)$  及当  $t$  足够大时  $M_y^-(t)$  一定位于  $N_L$ , 也即是说, 如果  $\lambda < y < h$ , 则一定存在  $t_y^+$  及  $t_y^-$  使得当且仅当  $t \geq t_y^-$  时,  $M_y^-(t) \in N_L$ , 并且, 当且仅当  $t \geq t_y^+$  时,  $M_y^+(t) \in N_L$ 。若  $y = h$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_h^-(t) = l_y$  也成立。选择  $t_h$ , 使得当且仅当  $t \geq t_h$  时  $M_h^-(t) \in N_L$ 。

我们现在假设轨迹当  $y \rightarrow \lambda$  时, 轨迹  $M_y^+(t)$  和  $M_y^-(t)$  合并形成一个轨迹  $M_\lambda(t)$ 。这个假设可能与之前的假设不一致, 但是我们感兴趣的所有解都与  $y = \lambda$  的集合无关。因此, 我们可以在不改变感兴趣的解的情况下, 当  $\delta$  足够小,  $y < \lambda + \delta$  集合中以一种平滑的方式重新定义流。选择  $t_\lambda$  使得当且仅当  $t \geq t_\lambda$  时  $M_\lambda(t) \in N_L$  成立。注意  $t_\lambda = \lim_{y \searrow \lambda} t_y^+ = \lim_{y \searrow \lambda} t_y^-$ 。

现在让  $S$  等于点的并集:

- (a)  $M_y^+(t_y^+)$  for  $\lambda < y < h$ ;
- (b)  $M_y^-(t_y^-)$  for  $\lambda < y < h$ ;
- (c)  $M_\lambda(t_\lambda)$ ;
- (d)  $M_h^-(t_h)$ 。

注意  $S \subset \partial N_L$ , 为方便起见, 我们假设  $S \subset \Phi_L(C_T) \equiv N^T$ , 这里我们使用 3.1 中定义的符号。由于  $S$  是一个

圆的同胚, 所以存在一个从单位圆  $S^1$  到  $N^T$  的  $y$  同胚  $\Phi_S$ , 使得  $\Phi_S(S^1) = S$ . 令:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(x, s) : \frac{1}{2} < x^2 + s^2 < 2\}, & \mathcal{D} &= \{(x, s) : x^2 + s^2 < 2\}, \\ \mathcal{D}_1 &= \{(x, s) : x^2 + s^2 < \frac{1}{2}\}, & \mathcal{H}_r &= \{(x, s) \in \mathcal{D} : s < r\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

很显然, 我们可将  $\Phi_S$  扩充到一个  $y$ -同胚  $\Phi_H : \mathcal{D} \rightarrow N^T$ . 令  $D = \Phi_H(\mathcal{D}), D_1 = \Phi_H(\mathcal{D}_1), H = \Phi_H(\mathcal{A})$ , 对于  $|r| < \frac{1}{2}, H_r = \Phi_H(\mathcal{H}_r)$ .

这些集合如图 7 所示. 注意  $H$  是  $S$  在  $N^T$  中的一个开邻域.

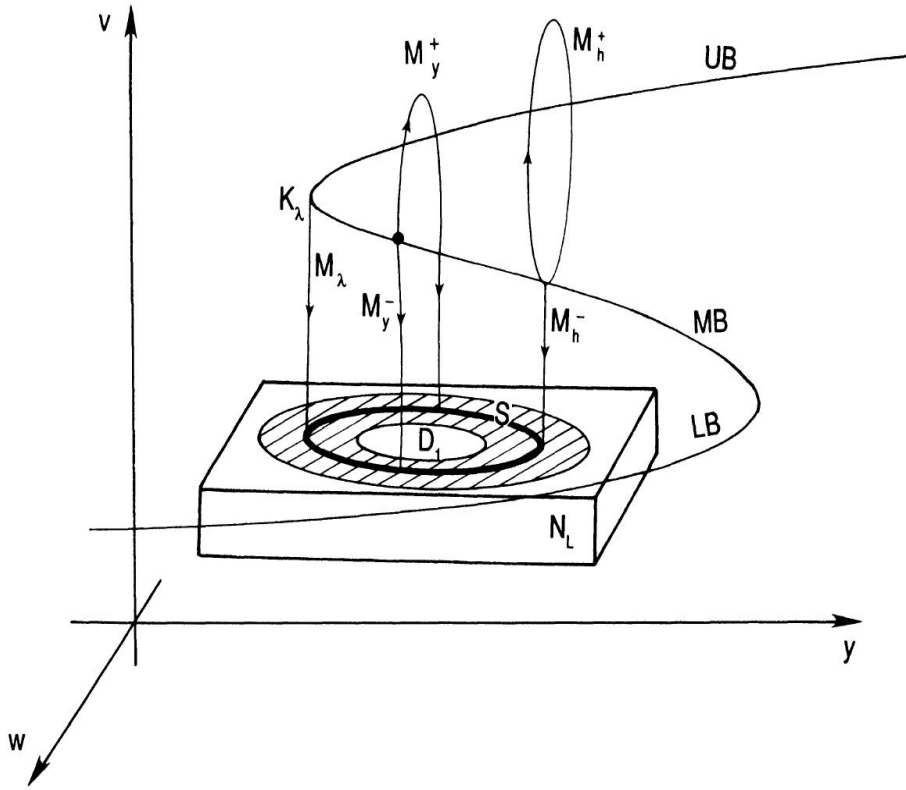


FIG. 7. Various subsets of  $N_L$ .  $S$  is where the unstable manifold of the middle branch,  $\lambda < y < h$ , enters  $N_L$ .  $H$  is a neighborhood of  $S$  on  $\partial N_L$ . Every bursting solution must enter  $N_L$  through  $H$ .

**引理 6.1**

若  $\epsilon$  足够小, (2.1) 所确定的流定义了一个连续映射  $\Phi_\epsilon : D \rightarrow H$ .

**证明** 给定  $\gamma_0 \in D$ , 令  $\gamma(t)$  是  $\gamma(0) = \gamma_0$  条件下 (2.1) 的解, 我们需要证明存在  $t_0 > 0$  使得对于  $0 < t < t_0$  以及  $\gamma(0) \in H$  有  $\gamma(t) \notin D$  成立.

从第 3 章的讨论中, 我们知道存在  $t_0 > 0$  使得对于  $0 < t < t_0$  及  $\gamma(0) \in \partial N_L$ , 有  $\gamma(t) \notin \partial N_L$ . 只需要证明, 如果  $\epsilon$  足够小, 则  $\gamma(t_0) \in H$ . 然而, 当  $\gamma(t)$  离开中间分支的邻域  $N_M$  时, 它必须如此接近  $\lambda \leq y \leq h$  时其中一个轨道  $M_y^+$  或  $M_y^-$ . 通过选择命题 3.4 证明中的常数  $q_0$  和  $\delta_1$  为很小的值, 我们可以看出这是正确的. 对于每一个轨道  $M_y^+$ ,  $\lambda < y < h$  及  $M_y^-$ ,  $\lambda < y \leq h$ , 均通过  $H$  进入  $N_L$ . 因为  $H$  是开的, 它遵循如果  $\epsilon$  足够小,  $\gamma(t)$  一定通过  $H$  进入  $N_L$ . 映射  $\Phi_\epsilon$  如图 8 所示. ■

我们现在给出  $\Phi_\epsilon$  产生斯梅尔马蹄形的充分条件. 参见图 10. 下面我们总是假设  $\epsilon$  足够小.

## 命题 6.2

假设存在  $\gamma_1 \in D_1$  及  $\gamma_2 \in D_2$  使得  $|\omega_\varepsilon(\gamma_1) - \omega_\varepsilon(\gamma_2)| > 2$  成立。则出现 Smale horseshoe。

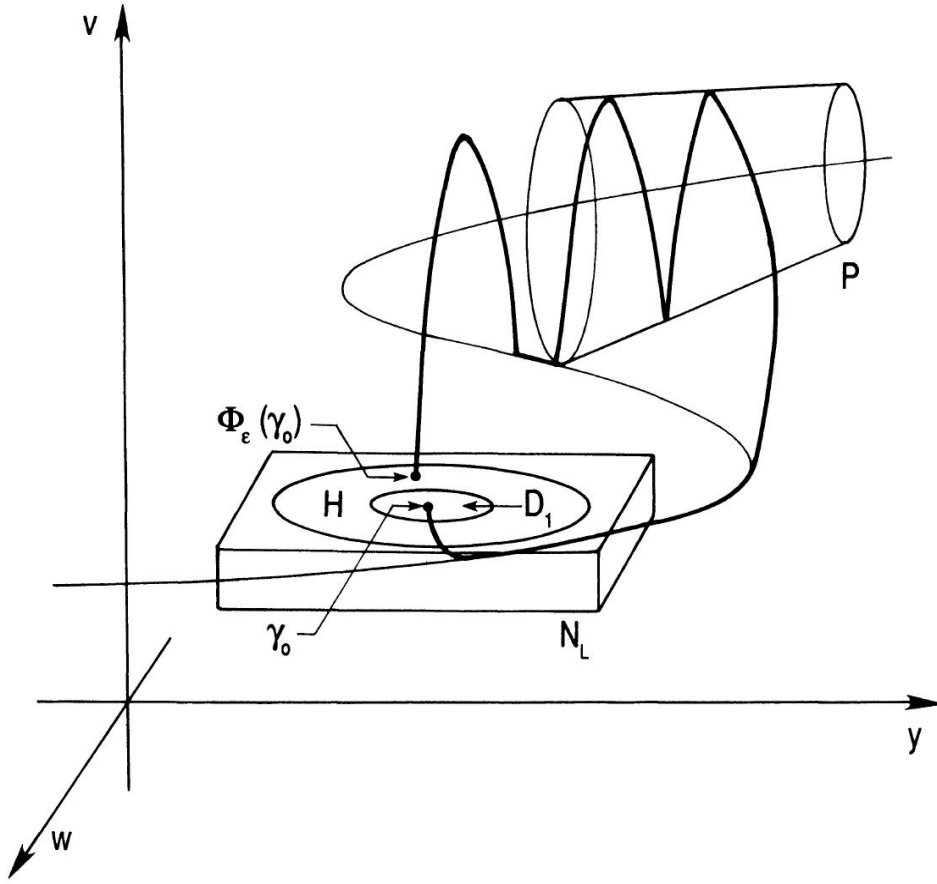


FIG. 8. The return map used in the construction of a Smale horseshoe. Every trajectory which starts in  $D$  must, at some later time, cross  $H$ . This defines a continuous map  $\Phi_\varepsilon : D \rightarrow H$ .

**证明** 这个结果的证明被分解为许多步骤。接下来,我们定义若存在连续函数  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow D$ , 使得  $C$  是  $\mathcal{C}$  的相, 则  $C$  是  $D$  上的一条曲线。若存在一个连续函数  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow \text{cl}D$ , 使得  $C$  是  $\mathcal{C}$  的相, 并且  $s \in (0, 1)$ ,  $\mathcal{C}(0) \in \partial D$ ,  $\mathcal{C}(1) \in \partial D$  时有  $\mathcal{C}(s) \in D$ 。

设  $C = \text{Im } \mathcal{C}(s), 0 \leq s \leq 1$  是  $D$  中的任意曲线, 使  $\mathcal{C}(0) = \gamma_1$  和  $\mathcal{C}(1) = \gamma_2$ 。因为  $\omega_\varepsilon(\gamma_1) \neq \omega_\varepsilon(\gamma_2)$ , 一定存在  $s_1 \in (0, 1)$  使得  $\mathcal{C}(s_1) \in W_M(\varepsilon)$ 。这是由一个类似命题 6.1 证明的论证得出的。此外,  $\omega_\varepsilon(\mathcal{C}(s))$  每次最多只能更改一个, 因为  $s$  是可变的。加上假设  $|\omega_\varepsilon(\gamma_1) - \omega_\varepsilon(\gamma_2)| > 2$ , 意味着存在  $s_1$  和  $s_2$ , 使  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{C}(s_i) \in W_M(\varepsilon)$  和  $\omega_\varepsilon(\mathcal{C}(s_1)) = \omega_\varepsilon(\mathcal{C}(s_2)) + 2$ 。

现在我们已经证明了  $W_M(\varepsilon)$  与  $D$  相交于至少两个不同的点。而  $W_M(\varepsilon)$  是一个与  $D$  横向相交的二维流形。因此,  $W_M(\varepsilon)$  必须与  $D$  相交在至少两条与  $D$  相交的曲线上。我们用  $C_1$  和  $C_2$  来表示这些曲线。它们具有这样的性质:  $\mathcal{C}(s_i) \in C_i, i = 1, 2$ , 并且圈数沿每条曲线是恒定的。

设  $M$  是  $D$  的子集, 它被  $C_1, C_2$  和  $\partial D$  包围。见图 9。我们称映射  $\Phi_\varepsilon : M \rightarrow H$  满足 Smale 马蹄形的必要条件。为了证明这一点, 我们设  $\hat{C} = \text{Image } \mathcal{C}(s), 0 \leq s \leq 1$  为  $D$  中的任意曲线, 且该曲线满足  $\mathcal{C}(0) \in C_1$ ,  $\mathcal{C}(1) \in C_2$ ,  $\mathcal{C}(s) \in M$  对于  $0 \leq s \leq 1$  成立。那么  $\Phi_\varepsilon(\hat{C})$  是一条位于  $H$  中的曲线。 $H$  在拓扑上是一个环。因为  $|\omega_\varepsilon(\mathcal{C}(0)) - \omega_\varepsilon(\mathcal{C}(1))| = 2$ , 因此  $\Phi_\varepsilon(\hat{C})$  是一条绕  $H$  (在明显意义上) 两次的曲线。参见图 9。由于  $\hat{C}$  是  $M$  中的一条任意曲线, 它连接  $C_1$  和  $C_2$ , 因此可以得出  $\Phi_\varepsilon(M)$  与  $M$  相交形成 Smale 马蹄形, 证毕。 ■

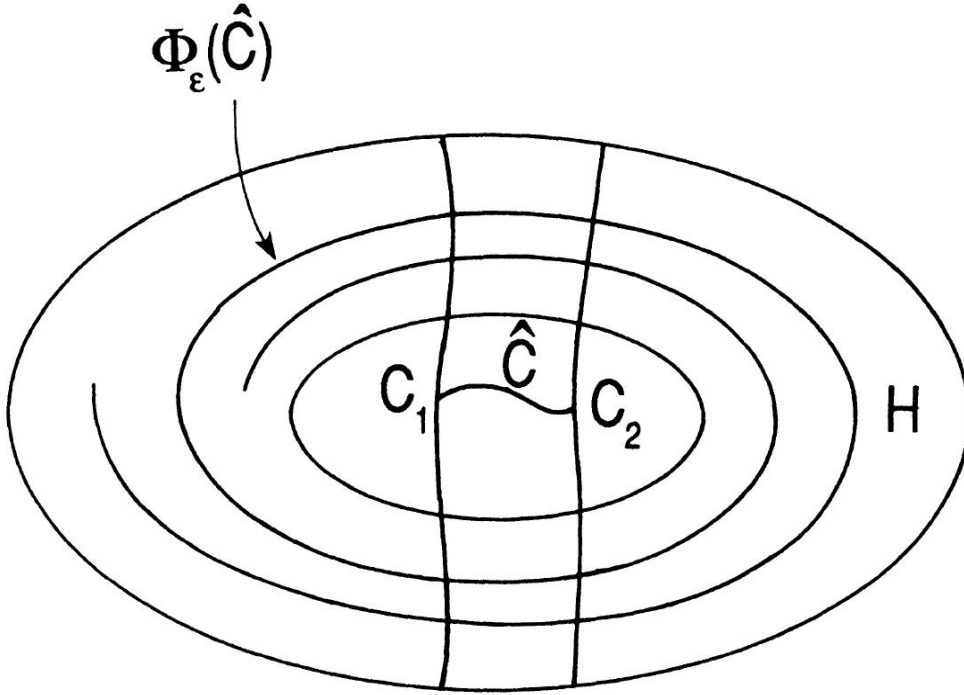


FIG. 9. Various sets used in the proof of Proposition 6.4.2. The winding number  $\omega_\epsilon$  is constant along each curve  $C_1$  and  $C_2$  with  $\omega_\epsilon(C_1) = \omega_\epsilon(C_2) + 2$ . If  $\hat{C}$  is any curve which connects  $C_1$  with  $C_2$ , then  $\Phi_\epsilon(\hat{C})$  must wind around  $H$  twice.

注 1: 通过额外的假设, 我们可以证明刚才描述的马蹄形是双曲线的。保证这一点的充分的附加假设如下。这些假设都与快子系统 (FS) 的解有关。

- (H1) 下支上不动点  $l_y$  的特征值在  $\lambda < y < \rho$  时形成两个连续函数  $\lambda_1(y)$  和  $\lambda_2(y)$ 。这些函数可以选择使每个  $y$  满足条件  $\lambda_2(y) < \lambda_1(y) < 0$ 。此外, 每个轨迹  $M_y^+(t)$  和  $M_y^-(t)$ ,  $\lambda < y < h$  趋近于与  $l_y$  对应的特征向量相切。
- (H2) 在  $K_\rho$  附近, 快系统 (FS) 的特征值可以参数化为一条曲线  $(v(s), w(s), y(s))$ , 使得  $(v(0), w(0), y(0)) = K_\rho$ 。之前做出的假设已经说明  $y'(0) = 0$ , 现在我们需要  $y''(0) \neq 0$ 。
- (H3) 同宿轨  $M_y^+(t)$  产生于中间分支的中心稳定流形和中心不稳定流形的横向交点。注意, 每个流形都是二维的。中间支路中心不稳定流形为  $\lambda < y < \rho$  时轨迹  $M_y^+(t)$  和  $M_y^-(t)$  的并集。中心稳定流形为 6.2 中描述的流形  $W_M$ 。

有了这些假设, 我们就能够在相空间的每个“部分”附近定义局部坐标。也就是说, (H1) 允许我们定义靠近下分支的局部坐标, (H2) 允许我们定义靠近右膝  $K_\rho$  的局部坐标, (A8) 允许我们定义靠近  $\mathcal{S}$  的局部坐标, (A2) 允许我们定义靠近中间分支的局部坐标。(H3) 允许我们仔细地跟踪经过同宿轨道  $M_h^+(t)$  附近的轨迹。有了这些局部坐标, 我们就可以计算返回映射  $\Phi_\epsilon$  的线性化  $D\Phi_\epsilon$ 。正是这种线性化映射的性质, 使我们能够得出斯梅尔马蹄形是双曲线的结论。详见 Guckenheimer and Holmes[10, 第 241 页]。

刚才描述的分析是非常抽象的, 将在后面的文章中详细介绍。

注 2: 假设  $\Phi_\epsilon$  产生了双曲马蹄形, 并且假设  $\Lambda$  是  $\Phi_\epsilon$  的最大不变集。众所周知, 在  $\Lambda$  上, 在拓扑上等价于两个符号的双无限序列集合上的偏移映射。我们现在讨论这意味着 (2.1) 的爆发解的性质。

集合  $\Lambda$  包含在一个形式为  $M \cap \Phi_\epsilon(M)$  的集合中, 其中  $M$  与命题证明中的一样。现在  $M \cap \Phi_\epsilon(M) = M_1 \cup M_2 \subset H$ , 其中  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ 。见图 10。由于  $H$  位于  $M_y^-(t)$  和  $M_y^+(t)$ ,  $\lambda < y < h$ , 进入  $N_L$  的轨迹附近。我们可以选择  $M_1$  和  $M_2$ , 使  $M_1$  位于接近  $M_y^-(t)$  轨迹进入  $N_L$  的地方, 而  $M_2$  位于接近  $M_y^+(t)$  轨迹进入  $N_L$  的地方。



这意味着如果  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  是  $\Lambda$  中的两个点, 使得  $\Phi_\varepsilon(\gamma_1) \in M_1$ ,  $\Phi_\varepsilon(\gamma_2) \in M_2$ , 那么  $\omega_\varepsilon(\gamma_2) = \omega_\varepsilon(\gamma_1) + 1$ 。另一种说法是, 如果  $\gamma_1(t)$  和  $\gamma_2(t)$  是 (2.1) 的解,  $\gamma_1(0) = \gamma_1$  和  $\gamma_2(0) = \gamma_2$ , 并且  $t_1, t_2$  被选择, 以便  $\gamma_1(t_1) = \Phi_\varepsilon(\gamma_1)$ ,  $\gamma_2(t_2) = \Phi_\varepsilon(\gamma_2)$ , 那么  $\gamma_1(t)$  在其爆发期间,  $0 < t < t_1$ , 比  $\gamma_2(t)$  在其爆发期间,  $0 < t < t_2$  少一个尖峰。

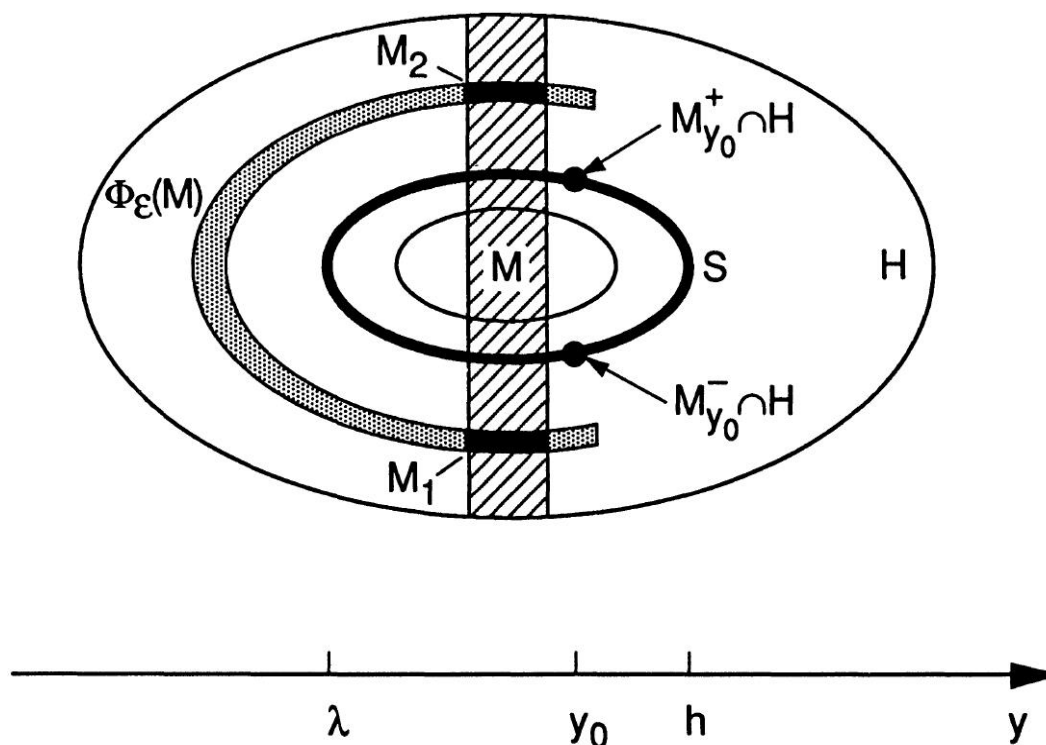


FIG. 10. In this case,  $\Phi_\varepsilon$  gives rise to a Smale horseshoe.

设  $n$  为正整数, 如果  $\Phi_\varepsilon(\gamma_1) \in M_1$ , 则  $\omega_\varepsilon(\gamma_1) = n$ , 并且设  $\Gamma$  是所有双无限序列  $\{a_i\}$  的集合, 其中  $a_i \in \{n, n+1\}$ 。设  $\sigma: \Lambda \rightarrow \Gamma$  是由  $\sigma(\gamma_0) = \{a_i\}$  定义的映射, 其中  $a_i = n$  if  $\Phi_\varepsilon^i(\gamma_0) \in M_1$  和  $a_i = n+1$  if  $\Phi_\varepsilon^i(\gamma_0) \in M_2$ 。该映射是一个双射。因此, 如果  $\{a_i\}$  是  $\Gamma$  的任何元素, 则在  $\Lambda$  中存在一个点  $\gamma_0 \in \Lambda$  使得  $\sigma(\gamma_0) = \{a_i\}$ , 设  $\gamma(t)$  是  $\gamma(0) = \gamma_0$  时系统 (2.) 的解, 选择  $\{t_i\}$  使得  $\gamma(t_i) = \Phi_\varepsilon^i(\gamma_0)$ 。我们之前的讨论已经说明  $\omega_\varepsilon(\gamma(t_i)) = a_i$ , 或者在区间  $t_{i-1} < t < t_i$  中第  $i$  个爆发的尖峰数量为  $a_i$ 。

注 3. 如果  $|\omega_\varepsilon(\gamma_1) - \omega_\varepsilon(\gamma_2)| = 2$ , 我们可以认为这个命题仍然有效。如果满足 (H1)-(H3), 情况确实如此。即使对于  $\gamma_1, \gamma_2 \in D, |\omega_\varepsilon(\gamma_1) - \omega_\varepsilon(\gamma_2)| \leq 1$  也有可能存在 Smale 马蹄形。第七章有一个例子数值证明了该说法

注 4. 假设存在  $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ , 使得  $|\omega_\varepsilon(\gamma_1) - \omega_\varepsilon(\gamma_2)| = k > 2$ , 当  $M$  被选中时,  $\Phi_\varepsilon(M)$  绕  $H$   $k$  次。因此,  $\Phi_\varepsilon$  会形成至少绕  $k-1$  圈的斯梅尔马蹄形。第 7 章中给出了一个关于  $k=4$  的例子。

## 5 产生斯梅尔马蹄的非线性特征

我们现在证明, 可以选择 (2.1) 中的非线性, 以便相应的映射产生斯梅尔马蹄形。事实上, 我们将证明以下更强的结果。对于这个结果, 我们假设  $g(v, w, y), g(v, w, y, k)$  对于某个固定的  $k \in (k_\rho, k_h)$ 。

### 命题 6.3

假设对于给定的  $k$ , 假设函数  $f_1(v, w, y), f_2(v, w, y)$  满足条件 (A1) - (A5)。存在满足条件 (A6) 和 (A7) 函数  $g(v, w, y)$ , 使得若  $\varepsilon$  足够小时,  $|\omega_\varepsilon(\gamma_1) - \omega_\varepsilon(\gamma_2)| = k$  对于  $\gamma_1, \gamma_2 \in D_1$  均成立。

**证明** 回想一下, 我们在第 3 章中定义的集合  $N_L$ 、 $N_\rho$  和  $T_\rho$ 。我们假设  $g(v, w, y) = 1$  在  $N_L \cap N_\rho$ 。每一个经过  $D_1$  中的一点轨迹一定进入  $N_L$ , 然后进入  $N_\rho$ , 然后通过  $T_\rho$  离开  $N_\rho$ 。固定  $\gamma_1 \in D_1$ ,  $\gamma_2 \in D_1$ , 设  $\gamma_i = (v_i(t), w_i(t), y_i(t))$  为 (2.1) 的解并且满足条件  $\gamma_i(0) = \gamma_i, i = 1, 2$ 。选择  $t_1$  和  $t_2$ , 使对于  $i = 1, 2, 0 < t < t_i, \gamma_i(t_i) \in T_\rho, \gamma_i(t) \notin T_\rho$ 。假设  $y_i = \pi_y(\gamma_i(t_i))$ 。我们假设  $y_1 \neq y_2$ 。要做到这一点, 可能需要改变  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  或调整  $T_\rho$ 。不失一般性, 我们假设  $y_1 < y_2$ 。

我们现在沿着  $\gamma_1(t)$  和  $\gamma_2(t)$  向前移动。每一个轨迹都会进入  $N_p$ , 即周期解的邻域。假设  $i = 1, 2, \gamma_i(t)$  在  $t = \hat{t}_i$  处进入  $N_p$ 。通过适当地选择  $g(v, w, y)$ , 我们可以假设对于  $\delta > 0$ :

$$\max \{y_1(t) : t_1 < t < \hat{t}_1\} \equiv y_0 < y_0 + 2\delta = y_2(\hat{t}_2).$$

下面我们假设:

$$g(v, w, y) = -\tau \text{ in } N_p \cap \{(v, w, y) : y > y_0 + \delta\},$$

其中  $\tau$  是一个需要确定的小正常数, 在该区域之外, 我们假设  $g(v, w, y)$  用于使得令 (A6) 及 (A7) 成立。特别地, 我们假设  $g$  固定在区域  $\{(v, w, y) : y \leq y_0\}$ 。因此我们就很好的定义了  $\omega_\epsilon(\gamma_1)$ 。我们的结果表明, 可调节  $\tau$  使得  $\omega_\epsilon(\gamma_2) > \omega_\epsilon(\gamma_1) + k$  成立。

令  $t_0 = \hat{t}_2 + \delta/\epsilon\tau$ 。则有以下式子成立:  $y_2(t_0) = y_0 + \delta, y_2(t) > y_0 + \delta, \hat{t}_2 < t < t_0$ 。因为当  $\tau \rightarrow 0$ , 有  $t_0 \rightarrow \infty$  成立, 我们或许可以选择足够小的  $\tau$  使得  $\hat{t}_2 < t < t_0, \gamma_2(t)$  绕  $N_p$  尽可能多次。因此, 通过选择较小的  $\tau$ , 我们可以假设  $\omega_\epsilon(\gamma_2)$  是任意大的。特别地, 我们可以选择  $\tau$  足够小使得  $\omega_\epsilon(\gamma_2) > \omega_\epsilon(\gamma_1) + k$ 。证毕。 ■

## 6 从 $n$ 到 $n+1$ 尖峰的平滑过渡

我们现在讨论 (2.1) 有可能不产生斯梅尔马蹄形的一种方式。在本例中, 从  $n$  到  $n+1$  个尖峰转换是连续的。当调整  $\epsilon$  时, 总存在一个 (2.1) 稳定的周期解, 它随  $\epsilon$  连续变化。随着  $\epsilon$  的变化, 爆发解的周期增加。这是因为周期解沿中间支路向上移动的时间越来越长。当周期解沿着中间的分支一路向上, 直到它到达接近左膝的地方, 此时在  $\epsilon$  的值处出现新的尖峰。我们希望在 (2.1) 中给出非线性的条件, 以保证这种情况的发生。下面我们假设快动力学特征  $f_1$  和  $f_2$  是固定的。我们证明, 如果选择  $g$ , 将发生平滑转变, 使被动相位的慢动力学比主动相位的慢动力学慢得多。

对于  $|r| < 1/2$ , 设  $H_r$  为 (6.1) 中定义的集合。假设对于每个  $r, \Phi_\epsilon(H_r) \in H_r$ 。这意味着  $\Phi_\epsilon$  在每个  $H_r$  中有一个不动点。当然, 这个不动点对应于 (2.1) 的周期解或爆发解。对于  $r$  接近  $-1/2$ , 该爆发解 (Bursting Solution) 必须沿靠近左膝的中间分支向上流动。因此, 它对应于一个长周期的破裂解。我们现在找到了在慢动力学上保证对于  $|r| < 1/2$ , 有  $\Phi_\epsilon(H_r) \in H_r$ 。在这种情况下, 我们并不认为  $\Phi_\epsilon$  会产生 Smale horseshoe。

这一分析的基本思想如下。对于  $h \in H_r$ , 设  $\gamma(h)(t)$  是 (2.1) 在  $\gamma(h)(0) = h$  处的解。当  $\gamma(H_r)$  经过较低的分支时, 它的大小以指数速率收缩。之后, 当它经过中间的分支附近时, 它会以指数速度伸展。为了使  $H_r$  映射到它自身, 我们必须使靠近下分支的收缩大于靠近中分支的拉伸。这可以通过选择靠近较低分支的慢动力学速率远小于靠近中间分支的慢动力学速率来实现。

为了简化讨论, 我们假设 (2.1) 在靠近下分支和中分支的地方是线性的。也就是说, 在  $N_L$  中, 我们假设 (2.1) 由以下式子给出:

$$\begin{aligned} v' &= -\lambda_1(v - v_l), \\ w' &= -\lambda_2(w - w_l), \\ y' &= \epsilon_1, \end{aligned} \tag{6.2}$$

而在  $N_M$  中, (2.1) 由以下式子给出:

$$\begin{aligned} v' &= -\lambda_1(v - v_m), \\ w' &= -\lambda_2(w - w_m), \\ y' &= \epsilon_2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

我们还认为  $N_L$  和  $N_M$  是矩形盒子。也就是说, 存在  $(v_l, w_l)$ ,  $(v_m, w_m)$ , 以及  $\beta > 0$ , 使得:

$$\begin{aligned} N_L &= \{(v, w, y) : |v - v_l| \leq \beta, |w - w_l| \leq \beta, \lambda - \delta \leq y \leq y_\rho\}, \\ N_M &= \{(v, w, y) : |v - v_m| \leq \beta, |w - w_m| \leq \beta, y_\lambda \leq y \leq h + \delta_1\}. \end{aligned}$$

选择  $r_0 \in (\lambda, h)$  使得  $H_r \subset \{(v, w, y) : \lambda - \delta \leq y \leq r_0\}$  成立。

现在我们跟踪  $H_r$  随时间发展, 直到其穿过  $L_\rho$ 。选定  $\gamma_0 = (v_0, w_0, y_0) \in H_r$ , 且令  $\gamma(t) = \gamma(h_0)(t)$ 。选择  $t_0$  使得  $\gamma(t_0) \in L_\rho$ 。从 (6.2), 以及对  $L_\rho$  的定义可知  $y(t_0) = y_0 + \epsilon_1 t_0 = y_\rho$ , 或  $t_0 = (y_\rho - y_0) / \epsilon_1$ 。从 (6.2) 式中我们可知:

$$\begin{aligned} |v(t_0) - v_l| &= |v(0) - v_l| e^{-\lambda_1 t_0} \leq \beta \exp\left[-\lambda_1 \left(\frac{y_\rho - y_0}{\epsilon_1}\right)\right], \\ |w(t_0) - w_l| &= |w(0) - w_l| e^{-\lambda_2 t_0} \leq \beta \exp\left[-\lambda_2 \left(\frac{y_\rho - y_0}{\epsilon_1}\right)\right]. \end{aligned}$$

那么若  $\gamma_0 \in H_r$ , 有  $\lambda - \delta \leq y_0 \leq r_0$  成立。假设, 不失一般性  $\lambda_1 < \lambda_2$ , 有下列式子成立:

$$\begin{aligned} \beta \exp\left[-\lambda_2 \left(\frac{y_\rho - \lambda + \delta}{\epsilon_1}\right)\right] &\leq \|(v(t_0), w(t_0)) - (v_l, w_l)\| \\ &\leq 2\beta \exp\left[-\lambda_1 \left(\frac{y_\rho - r_0}{\epsilon_1}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

这给了我们一个  $\gamma(H_r)$  的估计值, 说明了当它经过较低的分支附近时收缩了多少。

现在, 我们希望估算当  $\gamma(H_r)$  经过中间分支附近时拉伸了多少。回想一下, 我们试图在参数上找到条件, 以便  $\Phi_\varepsilon(H_r) \subset H_r$ 。我们要做的是及时向后跟踪  $H_r$ , 并估计当它经过  $N_M$  时, 向后流动收缩了多少。修正  $\gamma_0 = (v_0, w_0, y_0) \in H_r$ , 让  $\gamma(t)$  作为 (2.1) 的解,  $\gamma(0) = \gamma_0$ 。和前面一样, 我们假设  $\lambda - \delta < y_0 < r_0$ ,  $\gamma_0 \in H_r$ 。选择  $t_2 < t_1 < 0$  使得  $\gamma(t) \notin N_L \cup N_M$  对于  $t \in (t_1, 0)$  成立,  $\gamma(t_1) \in \partial N_M$ ,  $\gamma(t) \in N_M$  对于  $t \in (t_2, t_1)$  成立, 以及有  $\gamma(t_2) \in \partial N_M$ 。令  $\gamma(t_1) = (v_1, w_1, y_1)$  以及  $\gamma(t_2) = (v_2, w_2, y_2)$ 。对于  $t \in (t_1, 0)$ ,  $\gamma(t)$  由快动力学确定。我们假设  $\varepsilon$  足够小使得  $\lambda - \delta < y_1 < r_0$  成立。

当  $t = t_2$ , 随时间发展,  $\gamma(t)$  进入  $N_M$ 。根据推论 3.6 可知,  $h < y_2 < h + \delta_1$ 。因此, 若  $\delta_2 = \delta + \delta_1$ , 则有下式成立:

$$h - r_0 < y_2 - y_1 < h - \lambda + \delta_2. \quad (6.5)$$

不失一般性, 假设在  $t = t_2$  时,  $\gamma(t)$  由边  $v = v_m + \beta$  进入  $N_M$ , 并且在  $t = t_1$  时, 经过边  $w = w_m + \beta$  离开  $N_M$ 。

由 (6.1) 可知, 当  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $\gamma(t)$  由以下式子给出:

$$\begin{aligned} (a) \quad v(t) &= \beta e^{-\gamma_1(t-t_2)} + v_m, \\ (b) \quad w(t) &= (w_2 - w_m) e^{\gamma_2(t-t_2)} + w_m, \\ (c) \quad y(t) &= y_2 - \epsilon_2(t - t_2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

因此, (6.5) 和 (6.6)(c) 说明:

$$\frac{h - r_0}{\epsilon_2} < t_1 - t_2 = \frac{y_2 - y_1}{\epsilon_2} < \frac{h - \lambda + \delta_2}{\epsilon_2}. \quad (6.7)$$

由 (6.6)(b) 我们可以得出结论:

$$|w_2 - w_m| \exp \left[ \frac{\gamma_2 (h - r_0)}{\varepsilon_2} \right] < |w(t_1) - w_m| < |w_2 - w_m| \exp \left[ \frac{\gamma_2 (h - \lambda + \delta_2)}{\varepsilon_2} \right].$$

因为  $|w(t_1) - w_m| = \beta$ , 可得出以下结论:

$$\beta \exp \left( -\frac{\gamma_2 (h - \lambda + \delta_2)}{\varepsilon_2} \right) < |w_2 - w_m| < \beta \exp \left( \frac{-\gamma_2 (h - r_0)}{\varepsilon_2} \right). \quad (6.8)$$

这给出了  $\gamma(H_r)$  经过  $N_M$  时的大小边界。另一方面 (6.2) 给出了  $\gamma(H_r)$  经过  $N_L$  向前时间收缩的估计。我们假设  $\gamma(H_r)$  经过从  $N_L$  到  $N_M$  的参数变化量是  $O(1)$ 。因此如果我们要求  $\Phi_\varepsilon(H_r) \subset H_r$ , 则必须存在一个足够大的常数  $C$ ,

$$\exp \left[ -\lambda_1 \left( \frac{y_\rho - r_0}{\varepsilon_1} \right) \right] < C \exp \left( -\frac{\gamma_2 (h - \lambda + \delta_2)}{\varepsilon_2} \right). \quad (6.9)$$

回想一下, 如果  $\Phi_\varepsilon(H_r) \in H_r$  对于每个  $r \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  都成立将发生平稳过渡。因此, 我们期望在  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$  时发生平稳过渡。在这种情况下, 我们不期望 Smale horseshoe 的存在。另一方面, 我们在上一节中证明, 如果主动相的慢动力学  $\varepsilon_2$  远小于被动相的慢动力学  $\varepsilon_1$ , 则存在 Smale horseshoe。

注: 假设  $k_\rho < k < k_h$  且  $k - k_\rho$  很小。那么 (2.1) 的不动点将位于较低的分支附近。如果  $(k_h - k)$  很小, 则不动点靠近周期解  $\mathcal{P}$  的中间支路和支路。这意味着如果  $k - k_\rho$  很小, 则被动相位 (下支路) 的慢速动力学小于主动相位的慢速动力学。另一方面, 如果  $(k_h - k)$  较小, 则主动相位的慢速动力学将小于被动相位的慢速动力学。这些考虑使我们预测, 如果  $k - k_\rho$  很小, 那么从  $n$  到  $n + 1$  个尖峰的培养将是连续的。如果  $(k_h - k)$  很小, 那么从斯梅尔马蹄形的意义上讲, 这种转变将是混乱的。在下一节中, 我们将用数字演示这正是所发生的情况。

## 7 数值结果

我们现在描述我们所执行的数值计算的结果, 以检验前几节的结果。我们考虑的系统是:

$$\begin{aligned} v' &= y - .5(v + .5) - 2w(v + .7) - m_\infty(v)(v - 1), \\ w' &= 1.15(w_\infty(v) - w)\tau(v), \\ y' &= \epsilon(k - v), \end{aligned} \quad (6.10)$$

其中:

$$\begin{aligned} w_\infty(v) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{v - .1}{.145} \right) \right] \\ m_\infty(v) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{v + .01}{.15} \right) \right] \\ \tau(v) &= \cosh \left( \frac{v - .1}{.29} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Morris 和 Lecar[11] 介绍了该系统作为藤壶肌肉纤维电活动的模型。我们可以从数值上验证, 该系统满足基本假设 (A1)-(A9) 和 (H1)-(H3)。见 Rinzel and Ermentrout[14]。在图 11 中, 我们显示了快速子系统的休息打印集以及沿着每个周期解的  $v$  坐标的最大值和最小值。稳定休息点和周期解用实心曲线绘制, 不稳定解用虚线曲线绘制。这个分岔图是使用 AUTO[7] 绘制的。注意, 在这些方程中:

$$k_h \approx -.186 \text{ and } k_\rho = -.245. \quad (6.12)$$

由上一节的注 (Remark) 可预期从  $n$  到  $n + 1$  的跃迁在  $k - k_\rho$  很小的情况下是连续的, 在  $k_h - k$  很小的情况下是混沌的。

在图 12 中, 我们显示了  $k = -.22$  时 (6.10) 三个解的  $v$  分量。这些计算表明 (6.10) 在从两个峰值到三个峰值

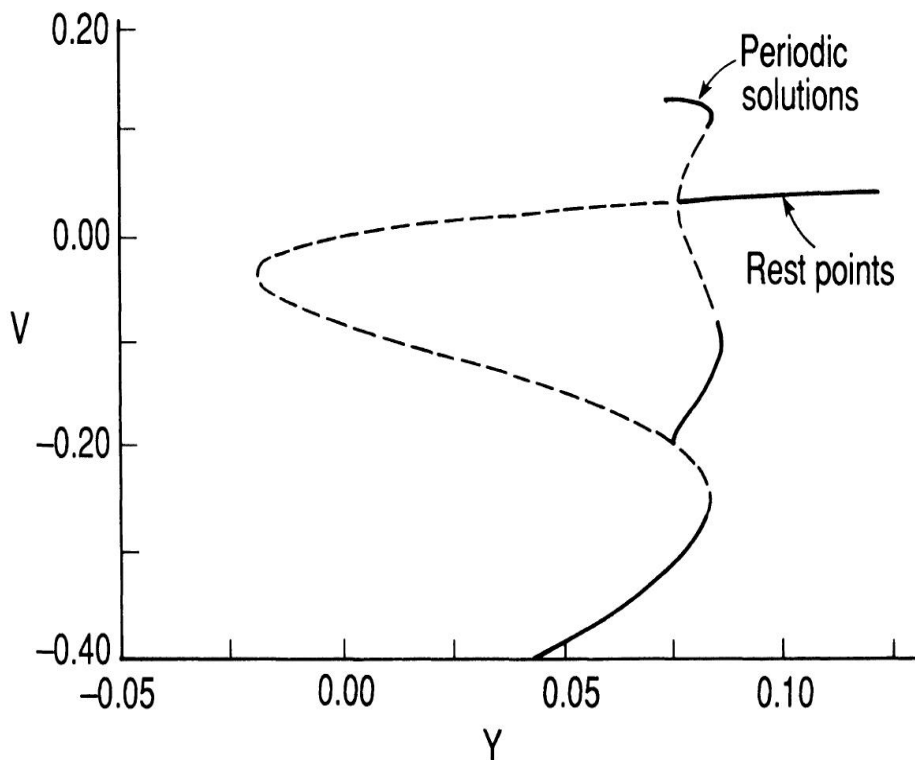


FIG. 11. The bifurcation diagram for the steady state and periodic solutions of (7.1) with  $\epsilon = 0$ . The solid curves correspond to stable solutions and the dashed curves correspond to unstable solutions.

的转变中产生了混沌动力学现象。图 12(a) 给出了 (6.10) 解的  $v$  分量，其中  $\epsilon = .007$ ，初始数据为：

$$(v(0), 2(0), y(0)) = (-.2, .015, .059).$$

在本例中，每次爆发有两个峰值。在图 12(b) 中，我们用  $\epsilon = .006$  和相同的初始数据求解 (6.10)。现在每次爆发有三个尖峰。在图 12(c) 中，我们用  $\epsilon = .006368$  和相同的初始数据求解 (6.10)。注意，在第一个爆发中有三个峰值，在第二个爆发中有两个。此外，在每个爆发中都有一个广阔的高原区域。为了验证 (6.10) 对于  $\epsilon$  在 .006 和 .007 之间的某些值会产生斯梅尔马蹄形，我们在数值上计算了与 6 中考虑的类似的 Poincaré 映射。Poincaré 映射定义如下。令：

$$\Sigma = \{(v, w, y) : v = -.2\}$$

及

$$M = \{(v, w, y) : v = -.2, 0 < w < .007, .059 < y < .061\} \quad (6.13)$$

对于  $m \in M$ ，令  $\gamma_\epsilon(t)$  是  $\gamma(0) = m$  条件下 (6.10) 的解。令  $\Phi_\epsilon(m) = \gamma_\epsilon(t_0)$ ，其中  $t_0$  使得  $\gamma_\epsilon(t_0) \in \Sigma$ ，及  $\gamma_\epsilon(t) \notin \Sigma$  对于  $0 < t < t_0$  成立。在图 12(d) 中，我们发现矩形  $M$  和  $M$  在  $\Phi_\epsilon$  for  $\epsilon = .006368$  下的像为  $v = -.2$  时。注意  $\Phi_\epsilon(M)$  必须靠近中间分支的不稳定流形。图 12(d) 中的虚线曲线不是数值计算的点。相反，它们只是通过数值计算得到的实体曲线的扩展。 $\Sigma$  中的点通过靠近左膝来映射  $\Phi_\epsilon$  的参数值范围非常狭窄。

在图 13 中，我们显示了  $k = -.24$  时 (6.10) 四个解的  $v$  分量。我们的计算表明，从两个到三个峰值的转变是连续的。在这四个解决方案中，我们都用初始数据求 (2.1) 的解：

$$(v(0), w(0), y(0)) = (-.2, .004, .07)$$

该点离下分支非常近。图 13(a)、图 13(b)、图 13(c)、图 13(d) 中  $\epsilon$  的值分别为 .005、.004123、.004122、.004。数值计算表明，每一个解都迅速接近稳定的周期解。从图 13(b) 和图 13(c) 可以看出，在从两个峰值到三个峰值

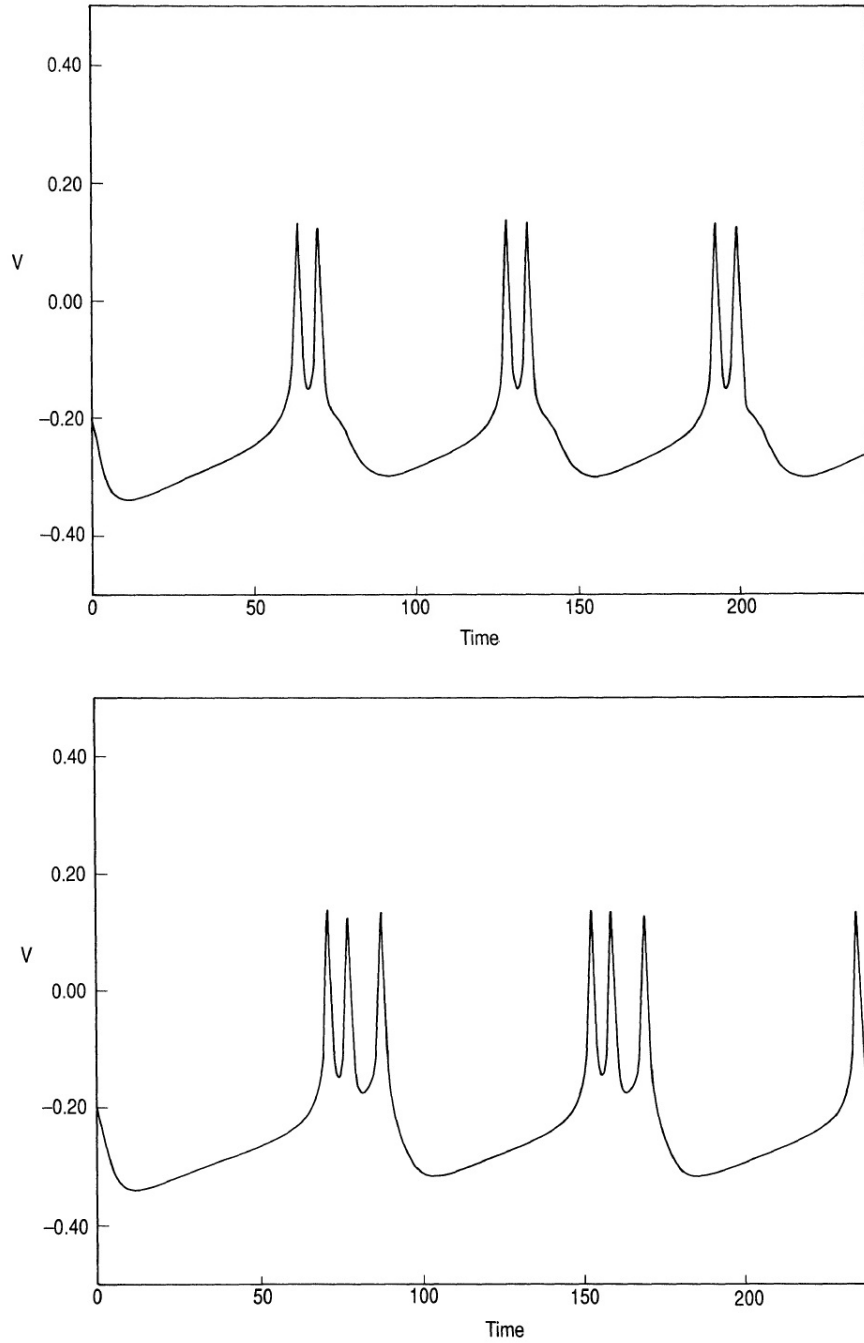


FIG. 12. Solutions of (7.1) with  $k = -.22$  and (a)  $\epsilon = .007$ , (b)  $\epsilon = .006$ , and (c)  $\epsilon = .006368$ . (d) shows the preimage and image of a return map when  $\epsilon = .006368$ . This map gives rise to a Smale horseshoe.



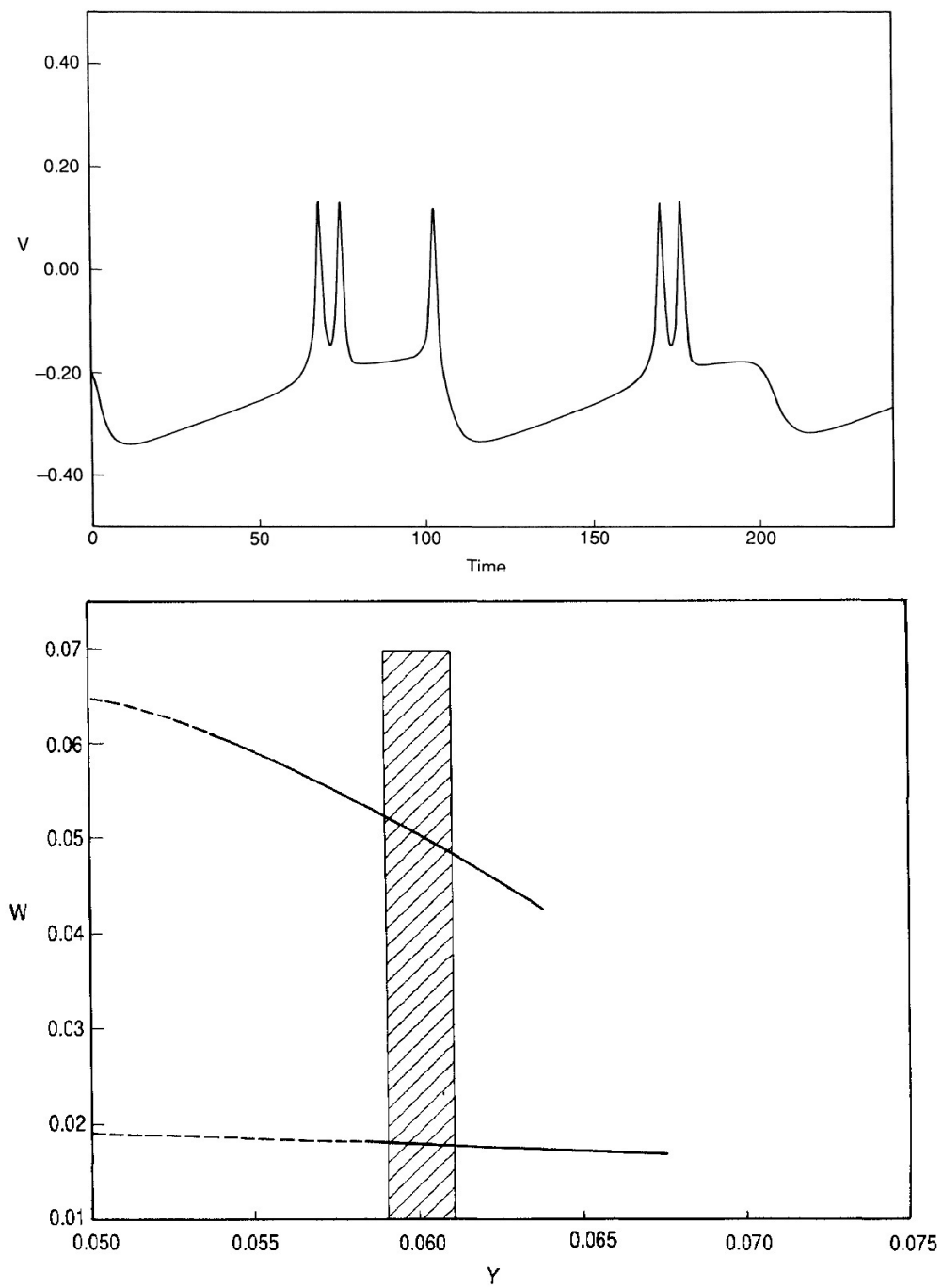


FIG. 12—continued

的转变过程中，数值解处于激发态的时间增加了。这是因为相空间中相应的轨迹在靠近中间支路的地方花费了更多的时间。我们的最后一个例子演示了 6.5 节中所描述的结果。在那一节中，我们证明了如果主动相的慢动

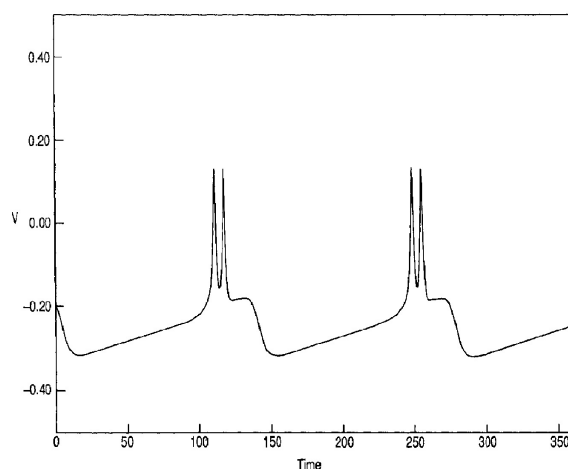
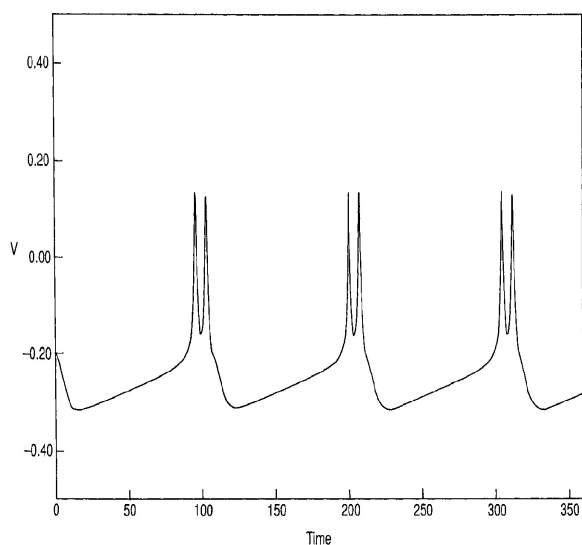


FIG. 13. Solutions of (7.1) with  $k = -24$  and (a)  $\epsilon = .005$ , (b)  $\epsilon = .004123$ , (c)  $\epsilon = .004122$ , and (d)  $\epsilon = .004$ . In this case the transition from two to three spikes is continuous.

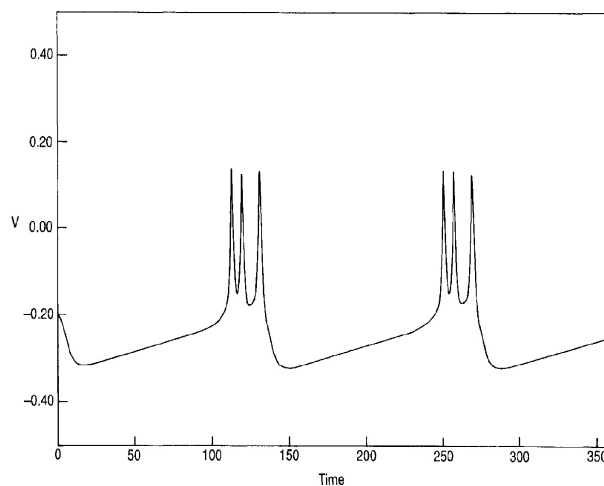
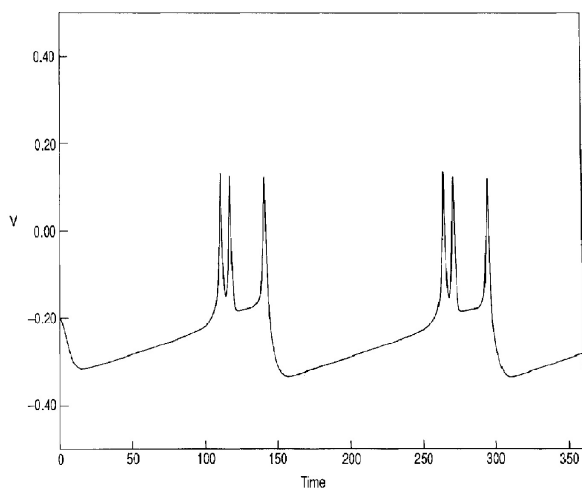


FIG. 13—continued

力学远远小于被动相的慢动力学，那么 (2.1) 可能会产生具有大圈数的 Smale 马蹄铁。我们考虑 (6.10) 的方程组，最后一个方程用以下式子代替：

$$y' = -\epsilon[.22 + v] \left[ \left( \frac{1 + \delta}{2} \right) - \left( \frac{\delta - 1}{2} \right) \tanh \left( \frac{v + .23}{.005} \right) \right]. \quad (6.14)$$

其中， $\delta = .1$ 。

参数  $\delta$  测量的是主动相位的慢动态速率除以被动相位的慢动态速率的比值。在下分支上， $v < -.23$ ，所以  $\tanh((v + .23)/.005) \approx -1$ 。因此，在下面的分支上， $y' \approx -\epsilon(.22 + v)$ 。另一方面，在活性阶段， $v > .23$ 。因此， $\tanh((v + .23)/.005) \approx +1$ ，所以  $y' \approx -\delta\epsilon(.22 + v)$ 。如果取  $\delta = .1$  那么我们应该期望系统产生混沌。

在图 14 中，我们设  $\epsilon = .0585$ ，并考虑本节前面描述的映射  $\Phi_\epsilon$ 。图 14 显示了线段部分的相：

$$l = \{(v, w, y) : v = -.2, w = .03, .03 < y < .075\}. \quad (6.15)$$

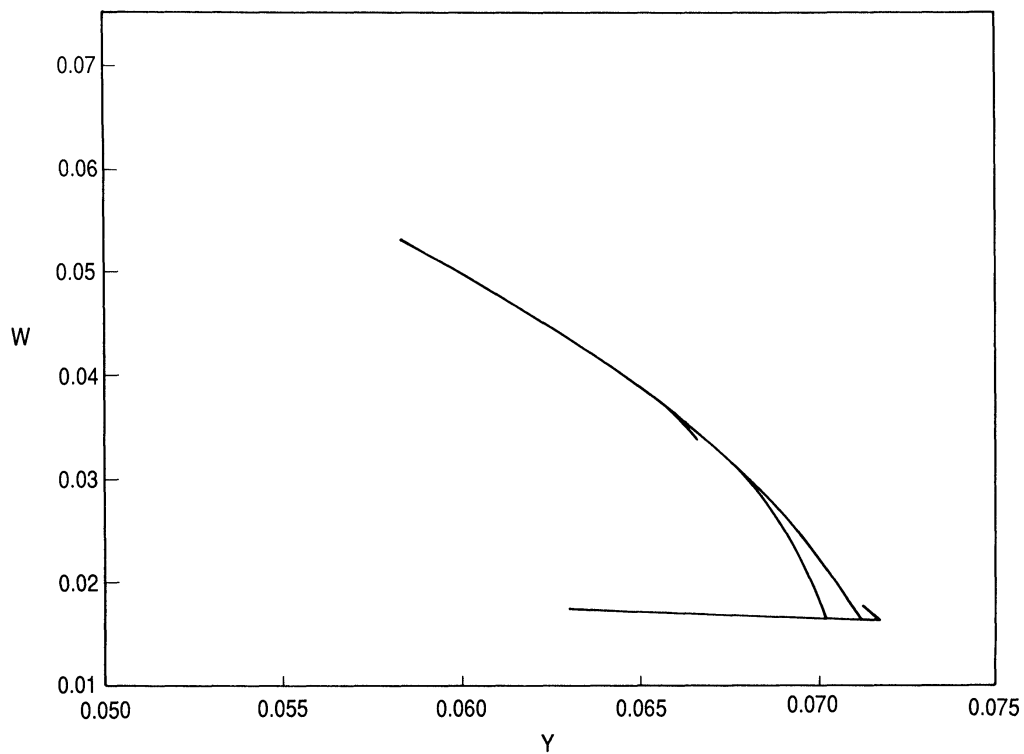


FIG. 14. The image of one line segment of the return map  $\Phi_\varepsilon$  corresponding to solutions of (7.1) with the last equation replaced with (7.3). Here  $\varepsilon = .0585$  and  $\delta = .1$ . This map gives rise to a Smale horseshoe which winds around four times.

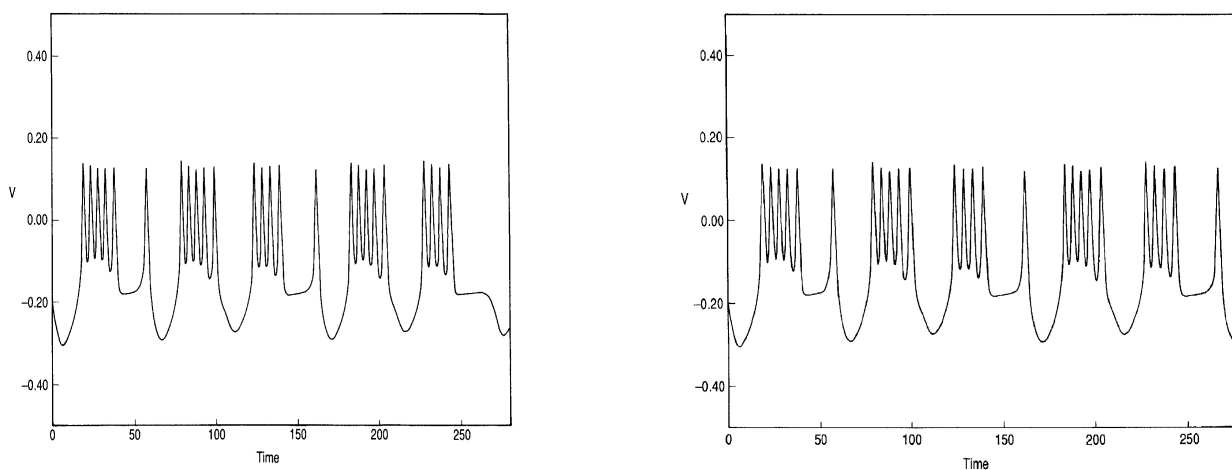


FIG. 15. Solutions of (7.1) where the last equation is replaced with (7.3). The number of spikes per burst varies from four, five, and six. This reflects the existence of the Smale horseshoe.

注意  $\Phi_\epsilon(l)$  绕了四圈。通过进一步的计算表明,  $\Phi_\epsilon$  产生了一个绕四圈的 Smale horseshoe。

在图 15(a) 中, 我们展示了当  $\epsilon = .0585$  和初始条件为以下取值时候方程解的  $v$  分量:

$$(v(0), w(0), y(0)) = (-.2, .015, .05900043). \quad (6.16)$$

注意, 每次爆发的峰值数量在 4、5 和 6 之间变化。此外, 一些爆发具有高原区域 (Plateau Region), 而另一些则没有。

上述系统的数值解对参数的变化极为敏感。例如, 如果我们取以下初始条件而不是 (6.16) 中的条件:

$$(v(0), w(0), y(0)) = (-.2, .015, .059000429).$$

则解的  $v$  分量如图 15(b) 所示。图 15(a) 和图 15(b) 之间唯一显著的区别位于最后一个尖峰。

## 致谢

I am grateful to J. Rinzel for suggesting that I consider this problem, E. Overman for helping me with the numerical computations, and for the hospitality of Heriot-Watt University, where some of this research was done.

---

## 参考文献

- [1] J. C. ALEXANDER, E. J. DOEDEL, AND H. G. OTHMER, On the resonance structure in a forced excitable system, preprint.
- [2] I. ATWATER, C. M. DAWSON, A. SCOTT, G. EDDLESTONE, AND E. ROJAS, The nature of the oscillatory behavior in electrical activity for the pancreatic beta cell, in *Biochemistry and Biophysics of the Pancreatic Beta Cell*, Georg Thieme, New York, 1980, pp. 100-107.
- [3] Z. R. CHAY, Chaos in a three-variable model of an excitable cell, *Phys. D*, 16 (1985), pp. 233-242.
- [4] T. R. CHAY AND J. KEIZER, Minimal model for membrane oscillations in the pancreatic  $\beta$ -cell, *Biophys. J.*, 42 (1983), pp. 181-190.
- [5] T. R. CHAY AND J. RINZEL, Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model, *Biophys. J.*, 47 (1985), pp. 357-366.
- [6] J. CRONIN, *Mathematical Aspects of Hodgkin-Huxley Neural Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.
- [7] E. J. DOEDEL, AUTO: a program for the automatic bifurcation and analysis of autonomous systems, *Congr. Numer.*, 30 (1981), pp. 265-284.
- [8] G. B. ERMENTROUT AND N. KOPELL, Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation, *SIAM J. Appl. Math.*, 46 (1986), pp. 233-253.
- [9] N. FENICHEL, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana Univ. Math. J.*, 21 (1971), pp. 193-226.

- 
- [10] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [11] C. MORRIS AND H. LECAR, Voltage oscillations in the barnacle giant musclefiber, *Biophys. J.*, 35 (1981), pp. 193-213.
- [12] J. RINZEL, A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems, in *Proc. Internat. Congress of Mathematics*, A. M. Gleason, ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1987, pp. 1578-1593.
- [13] Bursting oscillations in an excitable membrane model, in *Ordinary and Partial Differential Equations*, B. D. Sleeman and R. J. Jarvis, eds., Springer-Verlag, New York, 1985, pp. 304-316.
- [14] J. RINZEL AND G. B. ERMENTROUT, Analysis of neural excitability and oscillations, in *Methods in Neuronal Modeling, From Synapses to Networks*, C. Koch and I. Seger, eds., MIT Press, Cambridge, MA, 1989, pp. 135-169.