





DOI: 10.17323/1609-4514-2005-5-1-269-282 · Corpus ID: 14446784

Share This Paper    

Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems

A. Shilnikov, L. Shilnikov, D. Turaev · Published 26 November 2005 · Physics

We show that the blue-sky catastrophe, which creates a stable periodic orbit of unboundedly increasing length, is a typical phenomenon for singularly perturbed (multi-scale) systems with at least two fast variables. Three distinct mechanisms of this bifurcation are described. We argue that it is behind the transition from periodic spiking to periodic bursting oscillations.

[View via Publisher](#)  [cns.physics.gatech.edu](#)

 Save to Library  Create Alert  Cite

43 Citations

Highly Influential Citations  2

Background Citations 15

Methods Citations 3

[View All](#)

奇异摄动系统中的蓝天灾难

BLUE-SKY CATASTROPHE IN SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS

Author: ANDREY SHILNIKOV, LEONID SHILNIKOV, DMITRY TURAEV

Keywords: 鞍节点, 全局分岔, 稳定边界, 慢-快系统, 爆发振荡, 尖峰, 兴奋性。

DOI: 10.17323/1609-4514-2005-5-1-269-282

Dates: Received April 23, 2003

Translated by Ke He, School of Mathematics, SCUT.

Link to the Journal: [10.17323/1609-4514-2005-5-1-269-282](https://doi.org/10.17323/1609-4514-2005-5-1-269-282)

MOSCOW MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 5, Number 1, January–March 2005, Pages 269–282

2022 年 11 月 4 日

BLUE-SKY CATASTROPHE IN SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS

Andrey L. Shilnikov

*Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, 30 Pryor Street, Atlanta 30303, USA**

Leonid Pavlovich Shilnikov

*Institute for Applied Mathematics and Cybernetics,
10 Ulyanov Street, Nizhny Novgorod, 603005 Russia†*

Dmitry V. Turaev

Department of Mathematics, Ben Gurion University of the Negev, P.O.B. 653, Be'er Sheva 84105, ISRAEL‡

我们证明，蓝天灾难是至少有两个快变量的奇异摄动（多尺度）系统中一种典型的现象，蓝天突变创造了一个长度无限增加的稳定周期轨道。我们描述了这种分岔的三种不同机制。我们认为它是由周期性峰值向周期性爆发振荡转变的背后原因。

2000 Math. Subj. Class. 37G15, 34E15, 37C27, 34C26.

关键词：鞍节点，全局分岔，稳定边界，慢-快系统，爆发振荡，尖峰，兴奋性

Contents

1. 引言	2
2. 慢-快系统	3
3. 蓝天灾难	7
4. 总结	10
5. 参考文献	11

* ashilnikov@gsu.edu

† diffequ@unn.ac.ru

‡ turaev@math.bgu.ac.il

1. 引言

稳定周期轨道在非线性动力学中起着非常特殊的作用。这里的一个基本问题涉及到它们在参数空间中稳定区域边界的结构。即，假设时间连续动力系统具有持续的自振荡，即具有稳定的周期轨道。问题是：当系统参数变化时，周期轨道是如何演变的？换句话说，考虑动力系统的单参数族 X_{μ} 在某些 μ 处具有指数稳定的周期轨道。这一周期轨道将在一定的参数值区间内持续并保持稳定。这个区间的边界是什么？在一个典型的单参数族中，哪种类型的分岔对应于它？

这些问题最初推动了分岔理论在 Andronov 和 Leontovich[1](见 [2]) 的开创性工作中的发展，他们发现了平面上 ode 系统极限环稳定性的四个余维-1 边界。第一个对应于一个稳定的极限环从/进入稳定的平衡态；在第二个边界上，一个稳定的极限环与一个不稳定的极限环合并并消失；在第三边界上，周期轨道转化为具有简单鞍节点平衡态的同宿环；最后，第四，边界对应于一个稳定周期轨道变成同宿轨道到一个鞍值为负的鞍平衡状态。

在多维情况下，目前已知一般单参数族的七个稳定边界。根据临界时刻所考虑的周期轨道是否存在，将其分为两类。在前一种情况下，周期轨道与局部截面的交点是 Poincaré 映射的不动点，因此问题归结为不动点的乘数如何出单位圆的分析。第一种可能性类似于二维的情况：周期轨道的一个算子变成 $+1$ ；这是鞍节点分岔 (见图1)。剩下的两个余维度-1 分岔是翻转或倍周期分岔和环面的诞生。在翻转分岔点，有一个等于 -1 的算子。周期轨道本身在这个分岔之后并没有消失 (不像鞍状 ode 的情况)，只是失去了稳定性。在一对复共轭算子向外穿过单位圆的情况下，周期轨道仍然存在，但它失去了它的外壳：一个稳定的二维不变环面诞生了。

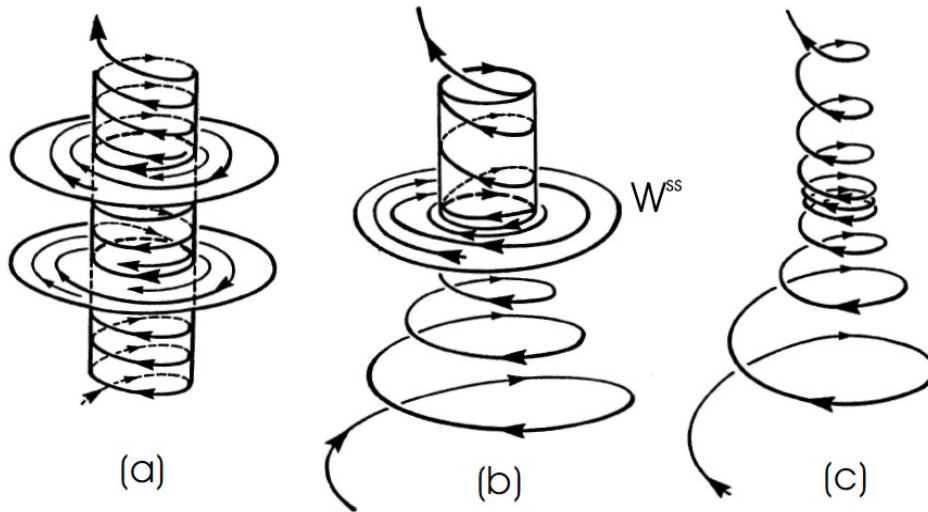


图 1. 鞍-结分岔:(a) $\mu < 0$, 有稳定轨道和鞍轨道两个周期轨道;(b) $\mu = 0$, 周期轨道合并为鞍节点轨道。其强稳定流形 W^{ss} 将邻域划分为节点区域 (图中 W^{ss} 下方) 和鞍区 (W^{ss} 上方)。不稳定流管是中心流管位于鞍区的部分;(c) $\mu > 0$, 鞍状结消失; 通过其邻近区域的漂移时间估计为 $\approx 1/\sqrt{\mu}$ 。

第二种稳定边界有三个，就像平面情况一样。它们对应于脱离稳定平衡态 (Andronov-Hopf 分岔) 的周期轨道的产生，并对应于其流入单鞍节点平衡态或具有一维不稳定流形且鞍值为负 [8] 的双曲平衡态的同宿环。

可以看出，上面的列表给出了周期轨道的长度在分岔时刻保持有界的情况下的所有主要稳定边界 (尽管如果轨道遵循同斜环，周期可能趋于无穷)。在 [13] 中还发现了另一个 (据推测，也是最后一个) 稳定的主边界，它没有二维类似物，对应于周期轨道长度的无界增长。这是至少在三维相空间中的一个 co 维度-1 分岔，这样，对于任何穿过相应分岔面的单参数流族 X_{μ} ，如 $\mu = 0$ 和所有小 $\mu > 0$ (适当选择增加参数 $\mu = 0$ 的方向)，流有一个稳定的周期轨道 L_{μ} ，保持在相空间的有界区域，远离任何平衡态；当 $\mu \rightarrow 0$ 时，它不发生分岔，而其周期和长

度都无限地增加，当 $\mu = 0$ 时 L_μ 消失。

这种类型的分岔 (被称为蓝天灾难) 的存在是一个长期存在的问题。在 [13](另见 [11], [12], [9]) 中建议的构造中，蓝天稳定边界是一个余维-1 分岔面的开放子集，对应于鞍节点周期轨道的存在。这个开集是由一些定性条件来区分的，这些定性条件决定了鞍节点的不稳定流形的几何形状 (见图2) 和一些定量限制 (下面介绍的 Poincaré 映射必须是一个收缩)。在满足上述条件的情况下，当鞍结轨道消失时，形成周期和长度在分岔时刻均趋于无穷大的稳定周期轨道 L_μ 。

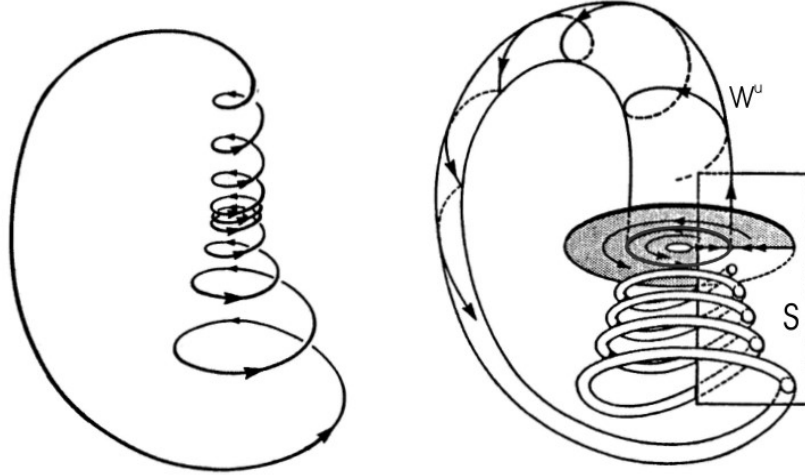


图 2. 蓝天灾难的全局结构 W^u 。 W^u 与节点区域内局部截面 S 的交点是累积到 $S \cap L$ 的可数圆集。

蓝天灾难的鞍-节点不稳定集的全局结构似乎相当复杂，因此可能不清楚如何在自然起源的动力系统中实现这种构造；尽管如此，答案还是很快。在 [5] 中，考虑了一个具有额外简并度的全局同斜 Guckenheimer-Gavrilov 分岔，构建了一个发生蓝天巨灾的三维 ODEs 系统的第一个显式例子。蓝天分岔的另一个设置是在 [9] 中提出的，在那里它表明，这种特殊的鞍节点的不稳定集的配置实际上是相当典型的，对于至少有两个快变量的慢-快 (即，奇摄动) 系统。在本文中，我们提出并分析了在奇摄动系统中确实引起蓝天巨灾的具体情形。

2. 慢-快系统

快-慢系统是一种具有以下形式的系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= h(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是一个小参数。这个系统可以通过调整时间 $t = \varepsilon\tau$ 来进行正则化。随着新的时间 τ ，系统 (1) 变成：

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \\ y' &= h(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

其中符号表示对 τ 求导。取极限为 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，得到

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= h(x, y, 0). \end{aligned} \quad (3)$$

第二个方程叫做快速系统。为简单起见，我们假设 $x \in \mathbb{R}^1$ 。变量 x 可以被认为是控制快速 y -变量运动的参数；我们假设 $y \in \mathbb{R}^n$ ，其中 $n \geq 2$ 。

从任何初始点 (x, y) 出发的系统 (3) 的轨迹，在给定的 x 值下，通常会到达快速系统的一个吸引子。吸引子可以是一个稳定的平衡，或者一个稳定的周期轨道，或者具有一个不那么平凡的结构；我们现在不讨论最后一种可能性。当快系统的平衡态或周期轨道是指数稳定时，它平滑地依赖于 x 。因此，我们得到了系统 (3) 的平滑吸引不变流形：快系统的平衡在 (x, y) -空间中形成曲线 M_{eq} ，极限环形成二维圆柱体 M_{po} ；参见图3。

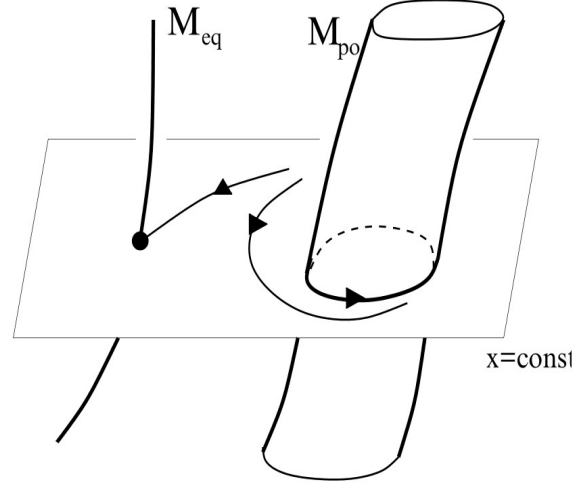


图 3. 快子系统的轨道可以趋于稳定平衡点或稳定极限环。

在局部，在快子系统的任何指数稳定平衡点或周期轨道附近，这样的流形是系统 (3) 的中心流形。由于中心流形对任何闭合系统都存在，因此对于整个系统 (2) 中的所有小的 ε (详见 [3], [4])，都存在光滑吸引不变流形 $M_{eq}(\varepsilon)$ 和 $M_{po}(\varepsilon)$ 。

因此，对于较小的 $\varepsilon > 0$ ，系统 (2) 的任何轨迹表现如下：在有限时间内，它进入不变流形 M_{eq} 或 M_{po} 其中之一的小邻域，使其 x 分量几乎保持恒定。然后，它开始沿着选定的不变流形以 x 的 ε 阶变化率缓慢漂移。

与上述发展相反，在原始系统 (1) 中， y 分量向不变流形的跳跃几乎是瞬间发生的，随后发生的是 x 变量的有限速度运动。此外，如果这是流形 M_{po} ，则可以观察到 y 分量中的快速圆周运动，如图4所示。

由 $h(x, y, 0) = 0$ 条件求出快速系统的平衡态，得到 M_{eq} 的代数方程。如果 $y = y_{eq}(x)$ 是 M_{eq} 的一个稳定分支，则给出 x 沿它的运动方程，直到 $varepsilon$ 中的一阶：

$$\dot{x} = g(x, y_{eq}(x), 0). \quad (4)$$

这是一个一维系统，它可能具有与整个系统 (1) 或 (2) 中的稳定和鞍态相对应的吸引和排斥平衡态。沿 M_{eq} 的演化要么局限于其中一个稳定点，要么在 M_{eq} 附近盘旋，直到达到临界值 x 的一个小邻域。回想一下， x 被视为快速系统的控制参数，因此它的临界值对应于快速系统中的分岔。例如，在 x^* 这样的临界值下，两个快速子系统的稳定和不稳定的平衡态可能发生碰撞，从而形成鞍节点。这对应于 M_{eq} 上 x 的最大值 (或最小值)。轨迹的 x -分量不再沿着 M_{eq} 的稳定分支增加 (分别减少)。相反，轨道跳向另一个吸引子，它是在 $x = x^*$ 时，快速系统中鞍-节点平衡态的输出分离矩阵的 ω -极限集；见图5。

为了确定圆柱体 $M_{po}(\varepsilon)$ 附近轨迹的动力学，我们必须首先找到方程 $y = y_{po}(\tau; X)$ 对应的快速极限环；这里 y_{po} 是周期为 $T(x)$ 的 τ 中的一个周期函数。然后，我们替换 $y = y_{po}(t\varepsilon; x)$ 代入 (1) 中第一个方程的右边，

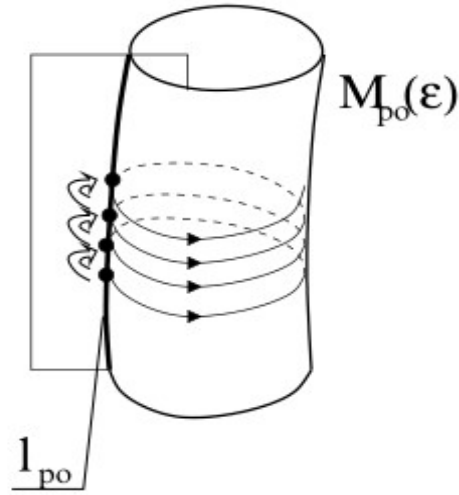


图 4. 圆柱体 $M_{po}(\varepsilon)$ 上的快速圆周运动定义了交点曲线 $l_{po}(\varepsilon)$ 的 Poincaré 映射。

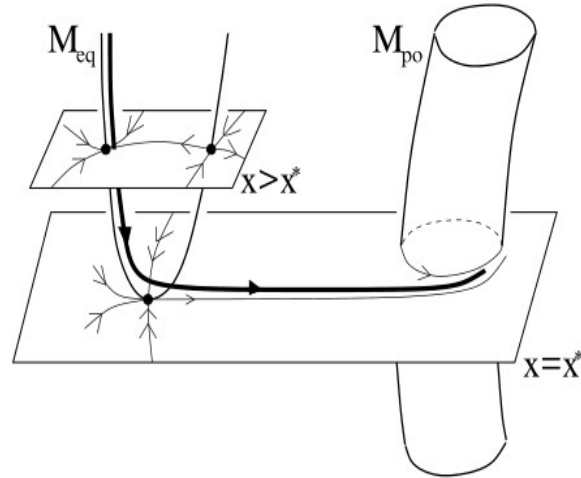


图 5. 轨迹从折叠处向吸引的圆柱面的快速跳跃。

并在周期 $T(x)$ 上取平均值。平均系统可以表示为:

$$\dot{x} = \phi(x) \equiv \frac{1}{T(x)} \int_0^{T(x)} g(x, y_{po}(\tau; x), 0) d\tau \quad (5)$$

该系统给出了 M_{po} 附近轨线 x 分量演化的一阶近似 (见 [6])。

通过快速运动的横截面切割圆柱体表面 (见图 4), 我们发现相交线 $l_{po}(\varepsilon)$ 上定义了一个 Poincaré 映射:

$$\bar{x} = x + \varepsilon\psi(x, \varepsilon) = x + \varepsilon\phi(x)T(x) + o(\varepsilon). \quad (6)$$

这个一维映射可能有稳定和不稳定的不动点 (在 $\psi(x)$ 的零点处)。这些点对应于系统 (1) 的稳定和鞍形周期轨道。 l_{po} 上的任意点的迭代要么收敛于映射上的稳定不固定点之一, 要么继续单调增长直到临界值 x 。

临界值 x 对应快速系统中的一个分岔。我们将考虑这种分岔的三种类型。第一种情况 (见图6) 对应于快速

系统的稳定周期轨道与鞍形周期轨道碰撞，从而形成鞍形-节点轨道，然后鞍形-节点轨道消失。经过这个临界值后，奇异摄动系统 (1) 的轨道必须跟随快子系统的轨道，即它们向鞍节点的不稳定流形的 ω -极限集跳去。

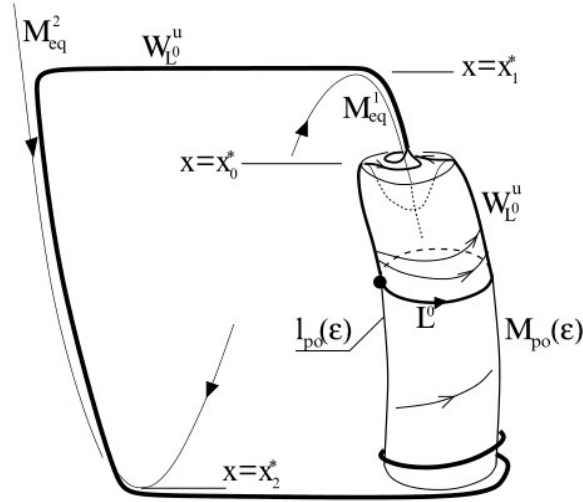


图 6. M_{po} 上的折叠 (由于快速系统在 $x = x_0^*$ 处存在鞍-节点分岔) 触发了快速跃迁到快速子系统平衡点 M_{eq}^1 处。鞍节点周期轨道 L^0 的不稳定流形在跃迁后收缩成一个窄管。

图7所示的第二种情况对应于快速系统的稳定周期轨道缩小为焦点的情况。经过临界值后，相点沿快系统稳定平衡的相应支路漂移。

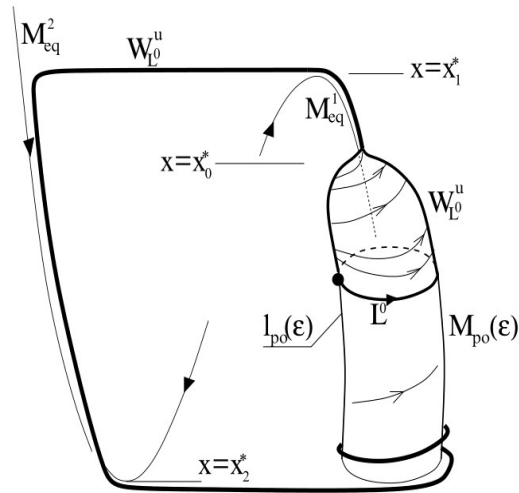


图 7. 曲面 M_{po} 在快子系统 $x = x_0^*$ 处通过超临界 Andronov-Hopf 分岔收缩为 M_{eq}^1 。

第三种情况 (见图8) 对应的是快系统的稳定周期轨道变成具有一维不稳定流形的鞍平衡同宿环的情况。因此，在 x 的这个值处， M_{po} 的稳定分支与 M_{eq} 的鞍点分支相接触而终止。

在 $\epsilon = 0$ 处， M_{eq} 的这个分支包含快速系统的鞍点。它们的一维不稳定流形的并集 (在 x 的值区间上) 得到二维不变流形 $W^u(M_{eq})$ ，它们的稳定流形的并集形成 n -维不变流形 $W^s(M_{eq})$ 。流形 $W^u(M_{eq})$ 是指数上吸引的，流形 $W^s(M_{eq})$ 是指数上排斥的。两者都是标准双曲不变流形，因此，对于所有足够小的 ϵ [3] 都持久存在。鞍支 $M_{eq}(\epsilon)$ 是 $W^u(M_{eq})$ 和 $W^s(M_{eq})$ 的交集。流形 $W^u(M_{eq})$ 吸引轨道，因此对于每一个接近 M_{eq} 的初始

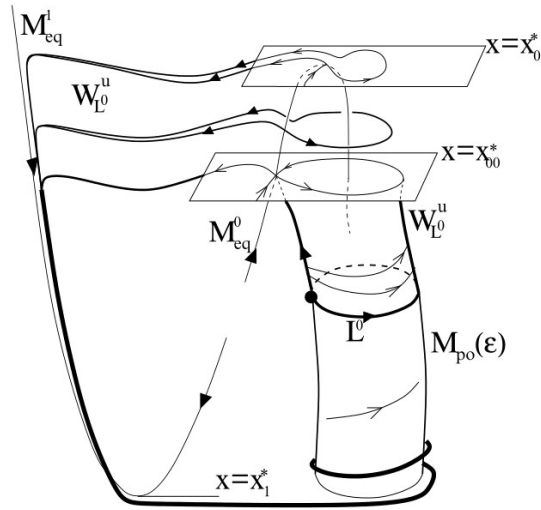


图 8. 曲面 M_{po} 以 $x = x_0^*$ 结束，这对应于快速子系统同斜环。鞍支 M_{eq}^0 在 $x = x_0^*$ 处终止。从 M_{eq}^0 附近开始的所有轨道最终到达下一个稳定分支 M_{eq}^1 。

点，轨道（可能是在沿着 M_{eq} 进行一些漂移之后）在 $W^u(M_{eq})$ 附近留下一个小的 M_{eq} 邻域，也就是说，它在某个 x 处离开 M_{eq} ，并遵循快速子系统的相应鞍点的一个分界。

3. 蓝天灾难

现在，让我们假设存在数字 $x_0^* \dots, x_k^*$ ，满足以下条件。我们的奇微扰系统有分支 $M_{eq}^1 \dots, M_{eq}^k$ ，由快速系统在 $\text{varepsilon} = 0$ 处的指数稳定平衡组成。每个分支 M_{eq}^j 在 $\text{varepsilon} = 0$ 处由方程 $y = y_{eq}^j(x)$ 给出，其中函数 $y_{eq}^j(x)$ 定义在 x 的一定区间上，包括 x_{j-1}^* 和 x_j^* 之间的区间。沿 M_{eq}^j 的漂移从 x_{j-1}^* 指向 x_j^* ，即：

$$g(x, y_{eq}^j(x), 0) \neq 0 \quad \text{and} \quad \text{sign } g(x, y_{eq}^j(x), 0) = \text{sign}(x_j^* - x_{j-1}^*)$$

对于所有的 $x \in [x_{j-1}^*, x_j^*]$ (见 (4))。在 $x = x_j^*$ 处，分支 M_{eq}^j 结束（即，它与马鞍分支碰撞）；所以快速系统在 $x = x_j^*$ 处有鞍-节点平衡。该鞍点的不稳定流形在支路靠近快速系统在分支 M_{eq}^{j+1} 处在 $j < k$ 的稳定平衡点。当 $j = k$ ，鞍节点的不稳定流形趋向于快速系统的指数稳定周期轨道。相应的稳定分支 M_{po} 在 x 中扩展，直到以下三个事件之一发生。

- (I). 在 $x = x_0^*$ 处，稳定分支 M_{po} 与鞍点周期轨道的稳定分支 M_{po} 满足鞍点周期轨道，即快系统具有鞍点周期轨道。快速系统中该轨道的不稳定流形作为一个整体趋向于分支 M_{eq}^1 上的指数稳定平衡 (图6)。
- (II). 在 $x = x_0^*$ 时，快速系统的稳定周期轨道收缩到位于分支 M_{eq}^1 的平衡态 (图7)。
- (III). 当 $x = x_{00}^*$ 介于 x_k^* 和 x_0^* 之间时，快系统的稳定周期轨道服从于快系统鞍态平衡的同斜环。相应的鞍支 M_{eq}^0 在 x 中扩展到 $x = x_0^*$ ，在这里它终止于表示快速系统中的鞍-节点平衡的褶皱； M_{eq}^0 上 x 的移动方向是从 x_{00}^* 向 x_0^* 移动。对于 x_{00}^* 和 x_0^* 之间的每一个 x ，快速系统鞍部的一维分割线都趋向于分支 M_{eq}^1 上的稳定平衡（在 $x = x_{00}^*$ 处，当其中一个分割线形成同斜环时，另一个分割线趋向于分割线 M_{eq}^1 上的平衡）。在 $x = x_0^*$ 时，快速系统鞍节点的整个不稳定集趋向于 M_{eq}^1 上的指数稳定平衡 (图8)。

在最后一种情况下，我们还需要一个假设。设 $\lambda^j(x)$ 代表在 $\varepsilon = 0$ 时，支路 M_{eq}^j 上固定值 x 时快速系统平衡态的特征指数 (即最大的李亚普诺夫指数) 实部的最大值。通过构造，所有 $\lambda^1(x) \dots \lambda^k(x)$ 都是负的 (因为分支 $M_{\text{eq}}^1 \dots, M_{\text{eq}}^k$ 的均衡是指数稳定的)。由于单个分支 M_{eq}^0 对应于鞍均衡，它遵循 $\lambda^0(x) > 0$ 。我们假设：

$$\sum_{j=2}^k \int_{x_{j-1}^*}^{x_j^*} \lambda^j(x) \frac{dx}{g(x, y_{\text{eq}}^j(x), 0)} + \max_x \left(\int_x^{x_1^*} \lambda^1(x) \frac{dx}{g(x, y_{\text{eq}}^1(x), 0)} + \int_{x_0^*}^x \lambda^0(x) \frac{dx}{g(x, y_{\text{eq}}^0(x), 0)} \right) < 0, \quad (7)$$

其中最大值是所有 $x \in [x_0^*, x_1^*]$ 。

关于流形 M_{po} 附近的运动，在所有这三种情况下，我们还假定函数 $\phi(x)$ 在一阶上定义了沿 M_{po} 见 (6)。处处有常量符号 (与 $x_0^* - x_k^*$ 的符号相同)，除了 $x = x^{**}$ ，其中 ϕ 消失了。因此， $\phi(x^{**}) = 0, \phi'(x^{**}) = 0$ ，并且我们可以假设 $\phi''(x^{**}) \neq 0$ (函数 g 和 h in(1) 要求至少是 C^2 -smooth)。让我们将我们的慢-快系统包含在一个单参数系统中 (即，假设函数 g 和 h 依赖于某个参数 μ 在 $\mu = 0$ 附近变化，这样 $\phi(x^{**}) = 0$ 在 $\mu = 0$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(x^{**}) > 0$ 。

由此可以得出，存在一条光滑曲线 $\mu = \mu^*(\varepsilon)$ ($\mu^*(0) = 0$)，这样函数 ψ from(6) 在 $\mu < \mu^*(\varepsilon)$ 处正好有两个 0，在 $\mu < \mu^*(\varepsilon)$ 处碰撞，并且在 x_k^* 和 x_0^* 之间 (case III 在 x_k^* 和 x_0^* 之间)，在 $\mu > \mu^*(\varepsilon)$ 处所有 x 都是非零的。 ψ 为零是吸引不变流形 $M_{\text{po}}(\varepsilon)$ 上 Poincaré 映射的不动点。因此，如果系统 (2)(或 (1)) 在 $M_{\text{po}}(\varepsilon)$ 上有两个周期轨道，一个稳定轨道 L^+ 和一个鞍轨道 L^- (见图9)。

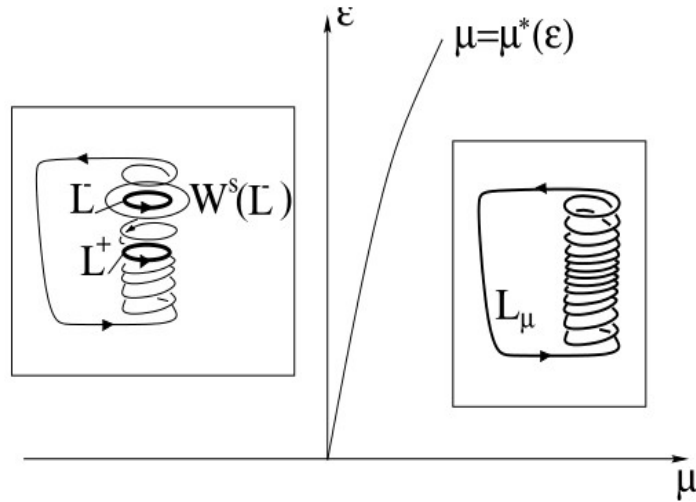


图 9. 在 $\mu < \mu^*(\varepsilon)$ 处，系统有两个周期轨道：稳定轨道 L^+ 和鞍轨道 L^- 。不位于 L^- 稳定流形中的轨道，随着时间的增加趋于 L^+ 。在 $\mu > \mu^*(\varepsilon)$ 处，系统有一个具有吸引力的单极限环 L_μ ，其长度趋于无穷大，即 $\mu \rightarrow \mu^*(\varepsilon) + 0$ 。

设 U 是一个小的固定邻域，它包围了分支 M_{po} 和 M_{eq}^j ，以及连接它们的快速系统的轨道。通过构造， U 内的每个轨道 (除了在 L^- 的稳定流形中的轨道) 随着时间的增加趋于 L^+ 。事实上，任何从 M_{po} 附近开始并达到阈值 $x = x_0^*$ 或 $x = x_0^*$ 的轨道，最终将跳转到下一个分支 M_{eq}^1 ；然后，它将沿着它漂移，然后进行下一次跳跃到类似的分支 M_{eq}^2 ，以此类推，直到它最终回到初始分支 M_{po} ，降落在周期轨道 L^+ 的吸引盆地。

在 $\mu = \mu^*(\varepsilon)$ 处，轨道 L^+ 和 L^- 联合成鞍节点周期轨道 L^0 。流形 $M_{\text{po}}(\varepsilon)$ 是这个轨道的中心流形； $M_{\text{po}}(\varepsilon)$ 中轨道随时间增加而偏离 L^0 的部分是 L^0 的不稳定流形。在接近临界值 x 后，稳定的分支 M_{po} 结束，不稳定流形上的所有轨道紧挨着分支 M_{eq}^1 ，因此流形 W_L^u 集中在一个非常狭窄的管中，绕着分支 M_{eq}^j 旋转，最后返回到绕着 M_{po} 旋转的分支 L^0 。这给出了图 2 中所示的不稳定流形的精确构型。因此，我们应该预见到这里的蓝

天大灾难; 它确实根据下面的定理发生。

定理 1 在 I、II 和 III 的任一情况下, 对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 和 $\mu > \mu^*(\varepsilon)$, 在 U 附近存在一个唯一的稳定周期轨道 L_μ , 它吸引了 U 的所有轨道。 L_μ 的周期和长度都趋于无穷大, 即 $\mu \rightarrow \mu^*(\varepsilon) + 0$

证明 1 假设在 $\varepsilon = 0$ 和 $\mu = 0$ 时, 快系统在 $x = x^{**}$ 处有一个周期轨道 L^0 。由于 L^0 是快子系统的指数稳定周期轨道, 每个乘数的绝对值都小于 1。在增广慢快系统 (2) 中, 这个轨道有一个额外的乘数等于 +1, 对应于 x 变量。形式上, L^0 是一个中心变量为 x 的非双曲周期轨道 (2)。众所周知, 这样的轨道具有不变的中心流形和横向于中心流形的不变强稳定叶理。此外, 对于参数的所有关闭值, 两者都是持久化的。中心流形与曲面 M_{p_0} ; 所以它可以由 x 变量和角变量 $\varphi \in \mathbb{S}^1$ (这确实是快速系统周期轨道上的相位) 参数化。流在横向到 M_{p_0} 的方向上均匀指数收缩。让我们用 $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ 来表示这些收缩维度中的坐标; 我们总是可以以这样一种方式引入 z 坐标, 使中心流形局部变直, 即, 在 L_0 M_{p_0} 对于所有小的 ε 和 μ 都具有方程 $z = 0$ 。

强稳定不变叶理的存在意味着变量 (x, φ, z) 在 L^0 的小邻域中可以以这样一种方式引入, 对于所有小 ε 和 μ , (x, φ) 的演化将独立于 z 变量 (参见 [10] 了解详细信息和证明)。因此, 适当截面的 Poincaré 映射, 例如 $\varphi = 0$, 被写在 L^0 附近:

$$\bar{x} = x + \varepsilon\psi(x, \varepsilon, \mu), \quad \bar{z} = A(x, z, \varepsilon, \mu)z, \quad (8)$$

其中 ψ 是来自 (6) 的函数, A 是 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵, 使得 $\|A\| < 1$

假设, 当 $\mu > \mu^*(\varepsilon)$ 时, 函数 ψ 不存在; 为了确定, 我们可以假设 $\psi > 0$ (换句话说, $x_0^* > x_k^*$)。因此, 对于固定的 $x^+ > x^{**}$, 从 $x = x^{**}$ 的小邻域开始的任何轨迹最终都将到达截面上的点 (x, z) 通过定义为 $x^+ \leq x < x^+ + \varepsilon\psi(x^+, \varepsilon, \mu)$ 的 Σ^+ 。随着时间的增加, 轨道向增加 x 的方向移动, 然后跳到一个分支 M_{eq} 等; 最后, 如上文所述, 它从 $x < x^{**}$ 的边界跳跃到 M_{p_0} 上面 $x = x^{**}$ 的一个小邻域内。因此, 对于 x^{**} 附近任何固定的 $x^- < x^{**}$, 轨道将在截面上的某个唯一确定的点刺穿带状 $\Sigma^- : x^- \leq x < x^- + \varepsilon\psi(x^-, \varepsilon, \mu)$ 。因此, L^0 小邻域外的流决定了一个映射 $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-$, 我们用 T_1 表示。

类似地, $x^- \leq x \mu^*(\varepsilon)$ 定义了一个映射 $T_0 : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^+$ 。组合 $T_1 \circ T_0$ 是 Σ^- 的 Poincaré 映射。我们将在下面展示, 这张地图是一个收缩, 因此有一个单一和稳定的固定点吸引所有其他轨道。这个不动点对应于慢-快系统中所寻找的周期轨道 L_μ 。当 $\mu \rightarrow \mu^*(\varepsilon) + 0$ 时, 取一个从 Σ^- 到 Σ^+ 的轨道所需的地图 (8) 迭代次数趋于无穷大; 映射的每一次迭代都对应于围绕 M_{p_0} 的流轨迹的一次完整的旋转, 即到 L_μ 上的一个非零长度区间。因此, L_μ 的总长度无限制地增加为 $\mu \rightarrow \mu^*(\varepsilon) + 0$ 。因此, 为了证明这个定理, 证明映射 $T_1 \circ T_0$ 的收缩就足够了。

首先, 让我们证明映射 T_0 的一阶导数是从上面统一有界的。正如前面提到的, 映射在 z 中收缩, 因此我们只需检查映射在 x -变量中的导数的有界性 (它是独立于 z 的)。采取任何 $x_0 \in [x^-, x^- + \varepsilon\psi(x^-, \varepsilon, \mu)]$, 设 $\{x_1, \dots, x_m\}$ 是它的轨道, $x_{j+1} = x_j + \varepsilon + \psi(x_j, \varepsilon, \mu)$, $x_m \in [x^+, x^+ + \varepsilon\psi(x^-, \varepsilon, \mu)]$ 。我们需要证明 $\frac{dx_m}{dx_0}$ 对于任意的 m 的一致有界性。

注意 $\frac{dx_{j+1}}{dx_0} = (1 + \varepsilon\psi'(x_j)) \frac{dx_j}{dx_0}$ (我们不表明 ψ 依赖于 ε 和 μ)。 [12] 后, 我们引入 $\xi_j = \ln \frac{1}{\psi(x_j)} \frac{dx_j}{dx_0}$ 。很容易得出以下结果:

$$\xi_{j+1} = \xi_j + \ln \frac{(1 + \varepsilon\psi'(x_j)) \psi(x_j)}{\psi(x_j + \varepsilon\psi(x_j))} \leq \xi_j + \ln \frac{1 + \varepsilon\psi'(x_j)}{1 + \varepsilon \min'_{x \in [x_j, x_{j+1}]}(x)}$$

由此可得:

$$\xi_{j+1} - \xi_j \leq K\varepsilon(x_{j+1} - x_j)$$

其中 K 是常数, 因此:

$$\xi_m - \xi_0 \leq K\varepsilon(x_m - x_0) \sim K\varepsilon(x^+ - x^-).$$

因此, $\xi_m - \xi_0$ 是一致有界的, 这意味着 $\frac{\psi(x_0)}{\psi(x_m)} \frac{dx_m}{dx_0}$ 也是一致有界的。由于 x_0 与 x^{**} 有界, $\psi(x_0)$ 的值也与 0 有界, 这意味着 $\frac{dx_m}{dx_0}$ 需要一致有界。

接下来, 我们将证明映射 T_1 正在收缩, 当 $\varepsilon \rightarrow +0$ 对于所有 μ , 收缩因子趋向于零。选择一个点 $M \in \Sigma^+$, 并且令 $\bar{M} = T_1 M \in \Sigma^-$ 。在端点 M 和 \bar{M} 的相速度向量 (\dot{x}, \dot{y}) 都以零为界, 而且对于所有小的 ε , 这些向量与截面之间的夹角也以零为界, 因此, 为了证明映射 T_1 的强收缩性质, 只要证明从 M 到 \bar{M} 的流对 Σ^+ 中的任何初始点 $M \in \Sigma^+$ 都强收缩二维区域就足够了。为此, 我们将从 Σ^+ 到 Σ^- 的飞行分解为几个阶段, 即沿着 M_{po} 的缓慢漂移, 向 M_{eq} 之间跳跃, 沿着这些分支缓慢移动, 最后跳回 M_{po} , 并沿着它一起漂移, 直到到达 Σ^- 。让我们选择一个足够小的 $\delta > 0$ 。系统 (2) 的轨迹从一个分支的 δ -邻域飞到另一个分支的 δ -邻域所需的时间间隔 (τ) 是有限的。因此, 每一次这样的跳跃对区域的收缩或扩张只带来有限的贡献。这种跨分支跳跃的数量也是有限的, 所以总的来说, 跳跃只能对区域的整体扩张/收缩做出有限的贡献。

当 $\varepsilon = 0$ 时, 未摄动系统 (2) 在 M_{eq}^j 上点 x 处轨迹的前两个李雅普诺夫指数分别为 0 和 $\lambda^j(x)$ (0 指数对应 x 变量, 而 λ^j 由快速系统决定)。因此, 当 ε 非零且很小时, 时间- $\Delta\tau$ 转变 ($\Delta\tau$) 足够小由点 x 的 Δ -邻域内的流设置, 用 $e^{(\lambda^j(x)+O(\Delta\tau)+O(\varepsilon)) \Delta\tau}$ 为上界的因子乘以区域。由此可以得出, 在分支 M_{eq}^j 的 Δ -邻域内的运输过程中获得的面积的总膨胀或收缩系数从点 x_1 到点 x_2 是有界的:

$$C_1 \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} (\lambda^j(x) + C_2 \delta) \frac{dx}{g(x, y_{eq}^j(x), 0)} \right)$$

其中 $C_{1,2}$ 是与 x, δ 和 ε 无关的常数。回忆 $\lambda^j < 0$ for $j = 1 \dots, k$ 。因此, 如果 $\delta > 0$ 足够小, 在 I、II 和 III 的任何情况下 (在情况 III 中, 不等式 (7) 是至关重要的), 在 Σ^+ 和 Σ^- 之间的运动阶段, 对应于分支 M_{eq}^j 的 δ -邻域的漂移和分支间的跳跃, 流收缩的区域至少有一个因子 $e^{-\alpha/\varepsilon}$, 其中 $\alpha > 0$ 是一个独立于 δ 和 ε 的常数。

现在, 请注意, 在 M_{po} 的 δ -邻域内的流, 但在 $x = x^{**}$ 的小邻域外的流和分支 M_{eq} 的 δ -邻域外的流不能产生强大的区域扩展。的确, 在 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (2) 的前两个李雅普诺夫指数在 M_{po} 上都为零 (如上所述, 第一个对应于 x 变量, 另一个对应于快速系统稳定周期轨道上的圆周运动)。事实上, 在 M_{po} 的 δ -邻域内, 但在分支 M_{eq} 的 δ -邻域外的每一次完整的旋转都会导致面积以 $e^{O(\delta)}$ 的速率扩展。当 $\varepsilon \neq 0$ 足够小时, 这个估计只会稍微差一点, 即因子变成 $e^{O(\delta)+O(\varepsilon)}$ 。轨道沿着从 Σ^- 到 $\Sigma^+(i)$ 的路径在 M_{po} 附近旋转的次数。例如, 在 x^{**} 的小邻域之外) 被赋值为 $O(\varepsilon^{-1})$ (因为函数 ψ 在这个区域内以零为界; 见 (6))。因此, 在传输阶段积累的区域可能从 Σ^+ 扩展到 Σ^- 的因素对应于 M_{po} 附近的漂移不超过某个 $e^{C(1+\frac{\delta}{\varepsilon})}$ 。

因此, 当 ε 足够小时, 在从 Σ^+ 到 Σ^- 的转换过程中, 区域确实是强烈收缩的。因此, 映射 T_1 是一个强收缩, 映射 $T_1 \circ T_0 : \Sigma^- \rightarrow \Sigma^-$ 也是一个强收缩。这就完成了定理的证明。

4. 总结

总之, 我们强调, 在慢-快系统中所提出的蓝天灾难机制确实在神经元活动模型中被观察到, 如在描述了水蛭心脏神经元的动力学的模型中, 参见 [7]。在这两种情况下, 从一种类型的自持续振荡 (圆形稳定周期轨道 L^+) 到吸引子为“长”稳定轨道 L_μ 的平滑过渡 (如图 9 所示) 可以被解释为从周期性强峰值到周期性爆发振荡的过渡。在这里, 每个爆发是由沿 M_{po} 产生大量尖峰的缓慢螺旋状运动构成的, 紧随其后的是由于沿 M_{eq} 的缓慢驱动而形成的爆发间“平静”阶段。

还要注意的, 即使在过渡到爆发振荡之前, 峰值模式也处于可激发状态: 驱动初始点超出鞍极限环 L^- 的扰动导致持续峰值恢复之前的长时间平静阶段。

5. 参考文献

- [1] A. A. Andronov and E. A. Leontovich, Some cases of dependence of limit cycles on a parameter, *Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta* 6 (1937), 3-24.
- [2] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York- Toronto, Ont., 1973.
- [3] N. Fenichel, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana Univ. Math. J.* 21 (1971/1972), 193-226.
- [4] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Differential Equations* 31 (1979), no. 1, 53-98.
- [5] N. Gavrilov and A. Shilnikov, Example of a blue sky catastrophe, *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 200, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 99-105.
- [6] L. S. Pontryagin and L. V. Rodygin, Periodic solution of a system of ordinary differential equations with a small parameter in the terms containing derivatives, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 132 (1960), 537-540 (Russian). MR 0120426. English translation: *Soviet Math. Dokl.* 1 (1960), 611-614.
- [7] A. L. Shilnikov and G. Cymbalyuk, Transition between tonic-spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe, *Phys. Review Letters*, 94 (2005), 048101; A. L. Shilnikov and G. Cymbalyuk, Homoclinic saddle-node orbit bifurcations en a route between tonic spiking and bursting in neuron models, *Regul. Dynamics* 9 (2004), no. 3, 281-297.
- [8] L. P. Shilnikov, Some cases of generation of period motions from singular trajectories, *Mat. Sb. (N.S.)* 61(103) (1963), 443-466 (Russian).
- [9] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. Turaev, and L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part II*, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, vol. 5, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [10] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, and L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I*, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, vol. 4, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1998.
- [11] L. P. Shilnikov and D. V. Turaev, Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors, *Comput. Math. Appl.* 34 (1997), no. 2-4, 173-193.
- [12] L. P. Shilnikov and D. V. Turaev, A new simple bifurcation of a periodic orbit of “blue sky catastrophe” type, *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 200, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 165-188.
- [13] D. V. Turaev and L. P. Shilnikov, Blue sky catastrophes, *Dokl. Akad. Nauk* 342 (1995), no. 5, 596-599.