

Showcase of Blue Sky Catastrophes

Leonid Pavlovich Shilnikov, Andrey L. Shilnikov and Dmitry V. Turaev

<https://doi.org/10.1142/S0218127414400033> | Cited by: 12

[< Previous](#)

[Next >](#)

 PDF/EPUB

 Tools [Share](#)  Recommend To Library

蓝天灾难的一个展示 *

Showcase of Blue Sky Catastrophes*

Author: Leonid Pavlovich Shilnikov, Andrey L. Shilnikov, Dmitry V. Turaev

Keywords: 余维-1, 同宿分岔, 蓝天灾难.

DOI: 10.1142/S0218127414400033

Dates: Received February 2, 2014

Translated by Ke He, School of Mathematics, SCUT.

Link to the Journal: [10.1142/S0218127414400033](https://doi.org/10.1142/S0218127414400033)

International Journal of Bifurcation and Chaos
Vol. 24, No. 8 (2014) 1440003

2022 年 11 月 8 日

* 这篇论文是三年多前写的。2010 年, L. P. Shilnikov 完成了几篇论文, 但仍未发表。他的想法是在同宿分岔理论中开辟了一个新的方向——研究非平凡不稳定流形构型摄动下的余维- ∞ 分岔。这篇论文本来是这个系列的第一篇;2011 年夏天, 在 V. Afraimovich 的 65 周年纪念日之际, 它被提交到合集中。由于该卷的发行不幸推迟, 我们, A. Shilnikov and D. Turaev, 决定在这里呈现文本。

Showcase of Blue Sky Catastrophes*

Leonid Pavlovich Shilnikov

Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod, 603005, Russia

Andrey L. Shilnikov

*Neuroscience Institute and Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University,
Atlanta 30303, USA Department of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, 603950, Russia**

Dmitry V. Turaev

Department of Mathematics, Imperial College, London, SW7 2AZ, UK[†]

设一个微分方程组具有一个鞍形周期轨道，使得其不稳定流形中的每个轨道都是同宿的，即不稳定流形是(全局)稳定流形的子集。我们研究了几个分岔的情况下这种同宿连接的破裂，导致了蓝天灾难(Blue Sky Catastrophe)，以及复杂动力学的开始。文中还描述了不变环面和克莱因瓶的诞生。

关键词：余维-1，同宿分岔，蓝天灾难

Contents

1. 引言	2
2. 结果	4
3. 参考文献	10

* ashilnikov@gsu.edu

† dturaev@imperial.ac.uk

1. 引言

在 Andronov 和 Leontovich 的开创性著作中 [Andronov & Leontovich, 1937; Andronov et al, 1971] 研究了平面上动力系统稳定周期轨道的所有主要分岔: 由弱焦点产生的极限环, 稳定极限环与不稳定极限环合并并连续消去的鞍点分岔, 从分离环到鞍点极限环以及从分离环到鞍点平衡的极限环的诞生。后来, 在 50 - 60 年代, 这些分岔被推广到多维情况, 以及另外两个分岔: 倍周期和二维环面的诞生。此外, Shilnikov [1966, 1968] 研究了同宿环到鞍形的鞍形周期轨道的主分岔, 发现了同宿环到鞍形-鞍形的新分岔¹。

然而, 一个悬而未决的问题仍然存在: 是否存在其他类型的周期轨道的余维-1 分岔? 显然, 重点放在稳定周期轨道的分岔上, 因为只有它们产生较强自持续周期振荡, 这是非线性动力学的原始范式。我们可以提出如下问题:

在一个单参数族的微分方程系统 X_μ 中, 当参数 μ 接近某个分岔值, 例如 $\mu_0 = 0$ 时, 结构稳定周期轨道 \mathcal{L}_μ 的周期和长度是否都趋于无穷大?

在这里, 结构稳定性意味着周期轨道 \mathcal{L}_μ 的算子没有一个穿过单位圆, 即 \mathcal{L}_μ 在 $\mu \neq \mu_0$ 处不分叉。特别值得注意的是, \mathcal{L}_μ 是稳定的, 即所有算子都严格在单位圆内。

Palis 和 Pugh [1975] 给出了一个类似的公式 (值得注意的第 37 题), 但是没有对结构稳定性的要求。周期轨道的典型分岔, 其周期变得任意大, 而随着分岔力矩的接近, 其长度保持有限, 这是具有负鞍值的鞍形和鞍形 ode 的同斜分岔 [Shilnikov, 1963; Shilnikov 等, 2001]。这些在当时是众所周知的, 所以在 [Palis & Pugh, 1975] 中强加了一个附加条件, 以确保所寻找的分岔确实是一种新的类型: 周期轨道 \mathcal{L}_μ 必须远离任何平衡态 (这立即意味着轨道的长度与周期成比例地增长到无穷)。正如亚伯拉罕所说, 周期轨道必须“消失在蓝天中” [Abraham, 1985]。

事实上, 对“第 37 个问题”的肯定答案可以在更早

的一篇论文中找到 [Fuller, 1967]。Medvedev [1982] 提出了一个明确的解决方案。他构造了环面上流动和克莱因瓶上流动的例子, 它们具有稳定的极限环, 当 $\mu \rightarrow \mu_0$ 时, 极限环的长度和周期趋于无穷, 而当 $\mu = \mu_0$ 时, 周期轨道消失, 新的结构不稳定的鞍-节点周期轨道出现 (如果流在环面上, 至少会出现两个)。[Medvedev, 1982] 的第三个例子是一个三维环面上的流, 其轨道都是周期和简并的, 对于极限系统, 环面由二维不变环面叶状。

Medvedev 的例子不是余维-1 的: 这对于至少需要两个鞍状节点的环面情况是明显的, 即 X_{μ_0} 至少是余维-2 的。在克莱因瓶的情况下, 可能会出现 [Shilnikov et al., 2001; Afraimovich & Shilnikov, 1982; Shilnikov & Turaev, 2000; Li & Zhang, 1991; Ilyashenko & Li, 1999] 由于 Medvedev 族的一般摄动, 存在于 $\mu \neq \mu_0$ 的周期轨道不会在所有的轨道上保持稳定, 因为它们经历了无限的前向和后向倍周期分岔 (这是圆的不可定向微分胚的不动点的典型行为)。

余维-1 的蓝天大灾难是在 1995 年才被 Shilnikov 和 Turaev 发现的 [Shilnikov & Turaev, 2000; Turaev & Shilnikov, 1995; Shilnikov & Turaev, 1997, 2006]。该方法是在研究整个不稳定流形同斜的鞍节点周期轨道的分岔问题的基础上求解的。这种分岔的研究是由 Afraimovich 和 Shilnikov [Afraimovich & Shilnikov, 1982, 1974a, 1974b, 1978] 针对鞍节点的不稳定流形为环面或 Klein 瓶 (见图1) 的情况而发起的。一旦鞍节点消失, Klein 瓶可能会持续存在, 也可能会崩溃, 造成系统的混沌动力学 [Afraimovich & Shilnikov, 1991; Newhouse et al., 1983; Turaev & Shilnikov, 1986; Shilnikov et al., 2004]。在这些工作中, 大部分注意力都集中在环面情况上, 因为它的分解提供了非线性动力学中普遍遇到的准周期性向混沌过渡的几何模型, 包括混乱的开始 [Shilnikov, 1991]。

在寻找蓝天大灾难的过程中, [Turaev & Shilnikov, 1995] 提出了鞍-节点不稳定流形的其他不同构型。特别地, 在 3 维及更高的相空间中, 同斜轨道可以螺旋返回到鞍节点轨道上, 如图2所示。如果我们有一个单参数族的微分方程组 X_μ , 它的鞍节点周期轨道在 $\mu = \mu_0$ 处, 它具有这种特殊的同斜不稳定流形, 并且满足某些附加条件, 那么当鞍节点消失时, 继承吸引子由一个稳定周期轨道 \mathcal{L}_μ 组成, 当 $\mu \rightarrow \mu_0$ 时, 它的长

¹ 由两个不同拓扑类型的鞍点合并而形成的一种平衡点, 也称为 Shilnikov 鞍结点

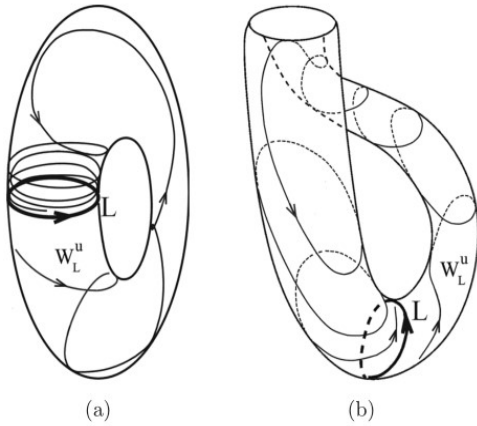


图 1. 不稳定流形 W_L^u 同宿于鞍节点周期轨道 L 的两种情况:(a) 二维环面或 (b) 克莱因瓶。

度趋于无穷时不发生分岔。它的拓扑极限 M_0 是鞍节点周期轨道的整个不稳定流形。

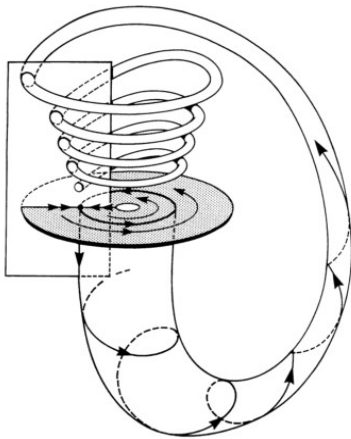


图 2. [Turaev & Shilnikov, 1995] 中蓝天灾难的原始构建。

在 [Turaev & Shilnikov, 1995] 中发现的保证蓝天突变的同宿轨道行为的条件是开放的, 即单参数族 X_μ 的一个小扰动不会破坏结构。这意味着, 当一组微分方程组穿过光滑动力系统的 Banach 空间中相应的一码次面时, 这样的蓝天灾难就会发生。这个表面构成了周期轨道的稳定边界。这个边界与 30 - 60 年代以来已知的边界相比是全新的, 在平面系统中没有类似的边界。有理由推测, 这种类型的蓝天灾难关闭了周期轨道的主要稳定边界列表 (即任何新的稳定边界的余维将大于 1)。

此外, 另一种版本的蓝天灾难导致了一致双曲奇异吸引子的诞生 (斯梅尔-威廉姆斯螺线管 [Smale,

1967; Williams, 1974]) 也在 [Turaev & Shilnikov, 1995; 希尔尼科夫和图拉耶夫, 1997]。鞍节点的这种一码次分岔对应于周期轨道的同斜不稳定流形的另一种构型 (完整的分类在 [Shilnikov 等人, 2001] 中给出)。在这里, 结构稳定的吸引子一直存在到 $\mu = \mu_0$, 所以当 $\mu \rightarrow \mu_0$ 时, 吸引子中的每个 (鞍状) 周期轨道的长度趋于无穷。

最初, 我们认为不稳定流形的对应结构过于奇异, 以致于在一个看似合理的系统中, 蓝天灾难不会自然发生。相比之下, 不久之后, Gavrilov 和 Shilnikov [2000] 提出了第一个余维-1 蓝天灾难的明确例子, 其形式是一组右手边为多项式的三维微分方程组。当蓝天大灾难被证明是慢速系统的典型现象时, 真正的突破出现了。即 [Shilnikov 等人, 2001; Shilnikov 等人, 2005] 我们描述了在这种至少有两个快速变量的系统中导致蓝天灾难的一些非常一般的情景; 对于只有一个快变量的系统, [Glyzin et al, 2008] 发现了蓝天灾难。就这样, 蓝天巨灾在数学神经科学中得到了大量的应用, 即, 它解释了中间神经元的精确 Hodgkin-Huxley 类型模型 [Shilnikov & Cymbalyuk, 2005, 2004] 和方波爆发的数学模型 [Shilnikov & Kolomiets, 2008] 在进气峰值和爆发之间的平稳可逆过渡。在蓝天灾难附近爆发持续时间的巨大变异性被证明是确保控制无脊椎动物运动的小神经元复合体产生节律模式多样性的关键机制 [Belykh & Shilnikov, 2008; Belykh et al, 2010; Wojcik et al, 2011; Wojcik et al, 2014]。

事实上, “蓝天大灾难”一词自然应该用更广泛的方式来对待。也就是说, 在这一项下, 我们允许包含一类动力学现象, 这些现象都是由于一个稳定的 (或者更一般的, 结构稳定的) 周期轨道的存在, \mathcal{L}_μ , 连续依赖于参数 μ , 因此, 当分岔参数值达到时, \mathcal{L}_μ 的长度和周期趋于无穷。至于轨道 \mathcal{L}_μ 的拓扑极限 M_0 , 它可能具有一个相当简并的结构, 不禁止 M_0 包含平衡态。因此, 周期体系 \mathcal{L}_μ 可以作为由几个准定态瞬时组成的复合结构出现: 近常数、周期、准周期甚至混沌片段。作为动机之一 (我们在这里不追究), 人们可能会想到慢-快模型, 其中快速 3D 动力学是由一个慢子系统中的周期性运动驱动的。

2. 结果

在本文中, 我们关注一个无限简并情形, 其中 M_0 由一个鞍形周期轨道和同斜轨道连续体组成。即, 我们考虑一个定义在 $R^{n+1}, n \geq 2$ 的足够光滑的微分方程组 X_μ 的单参数族, 对此我们需要做如下一些假设。

(A) 存在鞍周期轨道 L (我们假设周期等于 2π), 乘子 $\rho_1 \dots \rho_n$ 。让算子满足:

$$\max_{i=2, \dots, n-1} |\rho_i| < |\rho_1| < 1 < |\rho_n|. \quad (1)$$

一旦这个性质在 $\mu = 0$ 处满足, 就意味着鞍轨道 $L = L_\mu$ 对于所有小的 μ 都存在, 并且平滑地依赖于 μ 。条件 (1) 也适用于所有小 μ 。这个条件意味着稳定流形 W_μ^s 是 n 维的³, 不稳定流形 W_μ^u 是二维的。如果不稳定的乘数 ρ_n 是正的 (即 $\rho_n > 1$), 那么轨道 L_μ 将 W_μ^u 分为两半, W_μ^+ 和 W_μ^- , 所以 $W_\mu^u = L_\mu \cup W_\mu^+ \cup W_\mu^-$ 。如果 ρ_n 为负 ($\rho_n < -1$), 则 W_μ^u 为 Möbius 条带, 因此 L_μ 不分割 W_μ^u ; 在本例中, 我们表示 $W_\mu^+ = W_\mu^u \setminus L_{j\mu}$

对于稳定流形, 条件 (1) 表明, 在 W_j^s 中 (在 $n \geq 3$) 存在一个 $(n-1)$ 维强稳定不变流形 W_μ^s , 其在 L_μ 的切线处包含了乘法器 $\rho_2 \dots \rho_{n-1}$ 对应的特征方向, 而在 $W_\mu^s \setminus W_\mu^{ss}$ 中的轨道沿原乘法器 ρ_1 对应的方向趋向于 L_μ 。

(B) 在 $\mu = 0$ 处, 我们有 $W_0^+ \subset W_0^s \setminus W_0^{ss}$, 即我们假设从 W_0^+ 开始的所有轨道都同斜于 L 。而且, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 它们趋向于沿领先方向 L 。

(C) 我们假设 L 附近的流收缩三维体积, 即:

$$|\rho_1 \rho_{nk}| < 1. \quad (2)$$

这个条件是至关重要的, 因为我们通过同斜曲面 $W_0^+ \cup L$ 的分岔得到的对象就是吸引子。注意, 这个条件类似于从同斜环理论到马鞍平衡的鞍值条件的负性 [Andronov & Leontovich, 1937; Andronov 等, 1971; Shilnikov, 1963], 见 (6)。

(D) 我们假设可以引入 L 附近的线性化坐标。也就是说, L 的一个小邻域 U 是一个实环面, 它同 $S^1 \times R^n$, 也就是说, 我们可以用一个角变量 θ 和标准坐标 $u \in R^n$ 来表示它。我们的假设是, 这些坐标的选择使

得在 L 的小邻域内的系统采用这种形式:

$$\dot{u} = C(\theta, \mu)u, \quad \dot{\theta} = 1, \quad (3)$$

其中 C 在 θ 中是以 2π 为周期的。平滑线性化并不总是可能的, 我们的结果可以在没有这个假设的情况下得到。不过, 我们在这里将避免讨论一般情况, 以便使结构更加透明。

众所周知, 通过对坐标 u 进行的 4π 周期变换, 系统 (3) 得到与时间无关的形式。也就是说, 我们可以把方程组写成以下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda(\mu)x, & \dot{y} &= B(\mu)y, \\ \dot{z} &= \gamma(\mu)z, \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $x \in R^1, y \in R^{n-2}, z \in R^1, \lambda = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho_1| > 0, \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln |\rho_n| > 0$, 并且当 $n \geq 2, B(\mu)$ 是一个 $(n-2) \times (n-2)$ 的矩阵, 使得:

$$\|e^{Bt}\| = o(e^{-\lambda t}) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (5)$$

注意, 条件 (C) 也说明:

$$\gamma - \lambda < 0 \quad (6)$$

通过 (4), 周期轨道 $L(\mu)$ 由 $x = 0, y = 0, z = 0$ 给出, 其局部稳定流形由 $z = 0$ 给出, 稳定流形的领先方向由 $y = 0$ 给出; 局部不稳定流形由 $\{x = 0, y = 0\}$ 给出。

回想一下, 我们用来将系统 (3) 变成自主形式 (4) 的 4π 周期变换实际上是 2π -周期或 2π -反周期的。也就是说, 点 (θ, x, z, y) 和 $(\theta + 2\pi \sigma(x, z, y))$ 是相等的 (它们代表实环面 U 中的同一个点), 其中 σ 是一个对变, 它改变了一些坐标 $x, z, y_1 \dots, y_{n-2}$ 的符号。更准确地说, σ 改变了每个方向的方向, 这些方向对应于真正的负乘数 ρ 。特别地, 如果所有的乘数 ρ 都是正的, 那么 σ 就是恒等数, 即我们的坐标在这种情况下是 2π -周期的。

(E) 考虑两个截面 $S_0 : \{x = d, \|y\| \leq \varepsilon_1, |z| \leq \varepsilon_1\}$ 和 $S_1 : \{z = d, \|y\| \leq \varepsilon_2, |x| \leq \varepsilon_2\}$ 为一些小的正 d 和 $varepsilon_{1,2}$ 。将 S_0 上的坐标表示为 $(y_0, z_0 \theta_0)$, 将 S_1

上的坐标表示为 (x_1, y_1, θ_1) 。集合 S_0 被稳定歧管 W^s 分为两个区域, $S_0^+ : \{z_0 > 0\}$ 和 $S_0^- : \{z_0 < 0\}$ 。由于根据假设 $2W_0^+ \subset W_0^s$, 因此从 S_1 开始的轨道为所有小 μ 定义了一个光滑映射 $T_1 : S_1 \rightarrow S_0$ (见图3):

$$\begin{aligned} z_0 &= f(x_1, y_1, \theta_1, \mu) \\ y_0 &= g(x_1, y_1, \theta_1, \mu) \\ \theta_0 &= m\theta_1 + h(\theta_1, \mu) + \tilde{h}(x_1, y_1, \theta_1, \mu) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 f, g, h, \tilde{h} 是光滑函数 4π -periodic 在 θ_1 中, 函数 \tilde{h} 在 $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ 处消失。条件 $W_0^+ \subset W_0^s$ 为:

$$f(0, 0, \theta_1, 0) \equiv 0.$$

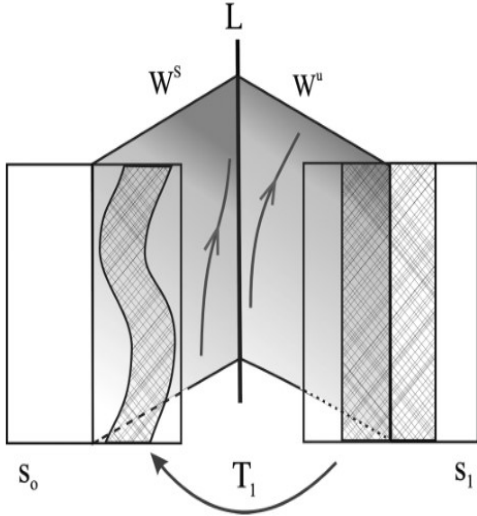


图 3. Poincaré 映射 T_1 的横截面 S_1 横到不稳定流形 W^u 横到稳定流形 W^s 的横截面 S_0 。

假设:

$$f(0, 0, \theta_1, \mu) = \mu\alpha(\theta_1, \mu), \quad (8)$$

其中:

$$\alpha(\theta_1, \mu) > 0 \quad (9)$$

对于所有的 θ_1 , 即所有同理点同时在同一方向分裂, 并且当 μ 跨越零增长时, 交点 $W_\mu^+ \cap S_0$ 以非零速度移动到 S_0^+ 内部。

(7) 的最后一个方程中的系数 m 是一个整数。为了解这一点, 回想一下 U 中的两点 (θ, x, z, y) 和

$(\hat{\theta} \hat{x} \hat{z} \hat{y})$ 是相同的, 当且仅当 $\hat{\theta} = \theta + 2\pi k (\hat{x} \hat{z} \hat{y}) = \sigma^k(x, z, y)$ 对于一个整数 k 。因此, 如果我们将 (7) 的右边的 θ_1 增加到 4π , 那么左边的 θ_0 的对应值可能只会改变为 2π 的整数倍, 即 m 必须是整数或半整数。让我们证明半整数 m 是被我们的假设 (9) 禁止的。确实, 如果乘数 ρ_n 是正的, 那么对合 σ 保持相应的变量 z 不变。因此, $(z = d\theta = \theta_1, x = 0, y = 0)$ 和 $(z = d\theta = \theta_1 + 2\pi, x = 0, y = 0)$ 对应于 $W_\mu^+ \cap S_1$ 上的同一个点, 因此 (7) 它们的像必须给出 S_0 上的同一个点。则 θ_0 的对应值必须是 2π 的整数倍, 这意味着 m 必须是一个整数。如果 $\rho_n < 0$, 那么 σ 改变 z 的符号, 也就是说, 如果 S_0 上的同一个点对应的 θ_0 的两个值在 $2\pi k$ 上不同, 则 z 对应的值不同到 $(-1)^k$ 的因数。现在, 由于 θ_1 增加到 4π 导致 (7) 中 θ_0 增加到 $4\pi m$, 我们发现 $f(0, 0, 4\pi\mu) = (-1)^{2m} f(0, 0, 0\mu)$ 在 $\rho_n < 0$ 的情况下。这意味着, 如果 m 是一个半整数, 那么 $f(0, 0, \theta)$ 在任何 μ 处必须为零, 且 (9) 不能满足。

m 的数量决定了 $W^+ \cap S_0$ 的形状。即曲线 $W_0^+ \cap S_0$ 的方程为:

$$\theta_0 = m\theta_1 + h_1(\theta_1, 0), \quad y_0 = g(0, 0, \theta_1, 0), \quad z_0 = 0,$$

因此 $|m|$ 在 $S_0 \cap W_0^s$ 中定义了这条曲线的同位类型, 而 m 的符号负责方向。在 $n = 2$ 的情况下, 即当系统定义为 R^3 时, 唯一可能的情况是 $m = 1$ 。在 $n = 3$ (R^4 中的系统) 处, 曲线 $W_0^+ \cap S_0$ 位于 W^s 与 S_0 的二维交集中。这要么是一个环 (如果 $\rho_1 > 0$), 要么是一个 Möbius 条带 (如果 $\rho_1 < 0$)。由于光滑曲线 $W_0^+ \cap S_0$ 唯一可能的情况是 $m = 0$, 当 $W^s \cap S_0$ 唯一可能的情况是 $m = 0, \pm 1$ 当 $W^s \cap S_0$ 是一个二维环并且 $m = 0, \pm 1, \pm 2$ 当 $W_0^+ \cap S_0$ 是一个 Möbius 条。在大 n (在 R^5 及更高的系统中), 所有 m 的整数值都是可能的。

现在我们可以表述本文的主要结果了。

定理 1 保持条件 (A)-(E) 不变。考虑同构面 $\Gamma = W_0^+ \cap L$ 的一个足够小的邻域 V 。

(1) 如果 $m = 0$ 并且, 对于所有 θ ,

$$\left| h'(\theta, 0) - \frac{\alpha'(\theta, 0)}{\gamma\alpha(\theta, 0)} \right| < 1, \quad (10)$$

然后一个稳定的周期轨道 \mathcal{L}_μ 随着 Γ 的分裂而诞生。轨道 \mathcal{L}_μ 存在于所有小 $\mu > 0$; 它的周长和长度趋于无穷, 即 $\mu \rightarrow +0$ 。所有在所有正时间都保持在 V 且不位于鞍轨道 L_μ 的稳定流形中的 *orbit* 都趋向于 \mathcal{L}_μ 。

(2) 若 $|m| = 1$, 及所有的 θ ,

$$1 + m \left[h'(\theta, 0) - \frac{\alpha'(\theta, 0)}{\gamma \alpha(\theta, 0)} \right] > 0, \quad (11)$$

然后一个稳定的二维不变环面 (在 $m = 1$ 时) 或一个克莱因瓶 (在 $m = -1$ 时) 在 Γ 分裂时诞生。它存在于所有小的 $\mu > 0$, 并分配了所有停留在 V 和不位于 L_μ 稳定流形中的轨道。

(3) 若 $|m| \geq 2$, 及所有的 θ ,

$$\left| m + h'(\theta, 0) - \frac{\alpha'(\theta, 0)}{\gamma \alpha(\theta, 0)} \right| > 1, \quad (12)$$

那么, 对于所有小的 $\mu > 0$, 系统有一个双曲吸引子 (*small - williams* 螺线管), 它是一个 ω -*limil* 集合, 适用于所有停留在 V 和不位于 L_μ 稳定流形中的轨道。吸引子上的流动在拓扑上共轭于悬浮液, 悬浮液超过了圆的 m 度扩展图的逆谱极限。在 $\mu = 0$ 处, 吸引子退化为同斜曲面 Γ 。

接下来我们将给出定理 1 的相关证明。

证明 1 (4) 在 S_0 中初始条件 $(x_0 = d, y_0, z_0, \theta_0) \in S_0$ 的解可表示为:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t} d, & y(t) &= e^{Bt} y_0, \\ z(t) &= e^{\gamma t} z_0, & \theta(t) &= \theta_0 + t. \end{aligned}$$

从条件中找到到 S_1 的飞行时间:

$$d = e^{\gamma t} z_0,$$

其中 $t = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{z_0}{d}$ 。因此, U 中的轨道定义了映射 $T_0: S_0^+ \rightarrow S_1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= d^{1-\nu} z_0^\nu, & y_1 &= Q(z_0) y_0, \\ \theta_1 &= \theta_0 - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{z_0}{d} \end{aligned}$$

其中 $\nu = \lambda/\gamma > 1$, $\|Q(z_0)\| = o(z_0^\nu)$ (见 (5) 和 (6)), 通过 (7), 我们可以将映射 $T = T_0 T_1$ 写在 S_1 上, 如

下所示 (去掉索引 “1”):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= d^{1-\nu} (\mu \alpha(\theta, \mu) + O(x, y))^\nu \\ \bar{y} &= Q(\mu \alpha + O(x, y)) g(x, y, \theta, \mu) \\ \bar{\theta} &= m\theta + h(\theta, \mu) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\mu}{d} \alpha(\theta, \mu) + O(x, y) \right) + O(x, y) \end{aligned}$$

对于每一个停留在 V 中的轨道, 其与截面 S_1 的连续交点构成一个微分态 T 的轨道。由于 $\nu > 1$, 地图 T 收缩为 x 和 y , 很容易看到, 所有轨道最终进入 $O(\mu^\nu)$ 大小为 $(x, y) = 0$ 的邻域。因此, 我们重新调整坐标 x 和 y 如下:

$$x = d^{1-\nu} \mu^\nu X, \quad y = \mu^\nu Y.$$

映射 T 具有以下形式:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \alpha(\theta, 0)^\nu + o(1) \\ \bar{Y} &= o(1) \\ \bar{\theta} &= \omega(\mu) + m\theta + h(\theta, 0) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \ln \alpha(\theta, 0) + o(1) \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $o(1)$ 表示趋于零的项, 即 $\mu \rightarrow +0$, 以及它们的一阶导数, 而 $\omega(\mu) = \frac{1}{\gamma} \ln(\mu/d) \rightarrow \infty$ 表示 $\mu \rightarrow +0$ 。回想一下, $\alpha > 0$ 对于所有 θ , α 和 h 在 θ 中是周期性的。

从 (13) 可以立即看出, 当 $\mu \rightarrow +0$, 选择合适的 $K_\mu, K_\mu \rightarrow 0$, 所有的轨道最终进入一个不变的实心环面 $\{|x - \alpha(\theta, 0)^\nu| < K_\mu, \|y\| < K_\mu\}$ (见图4)。因此, 在 V 中对所有小的正 μ 都有一个吸引子, 它合并到 Γ 为 $\mu \rightarrow +0$ 。我们的定理声称吸引子的结构取决于 m 的值, 所以现在我们分别考虑不同的情况。

如果 $m = 0$ 并且 (10) 成立, 那么映射 (13) 显然在小 μ 处收缩, 因此它有一个稳定的不动点。这个不动点对应于所寻找的周期轨道 A_μ 。当 $\mu \rightarrow +0$ 时, 其周期趋于无穷: 轨道与截面 S_0 和 S_1 相交, 从 S_0 到 S_1 的飞行时间为 $\frac{1}{\gamma} |\ln \mu|$ 。轨道的长度也趋向于无穷大, 因为相速度不会在 V 中消失。

在 $m = \pm 1$ 的情况下, 我们参考 [Afraimovich & Shilnikov, 1978] 的 “环原理” 证明了该定理。换句话

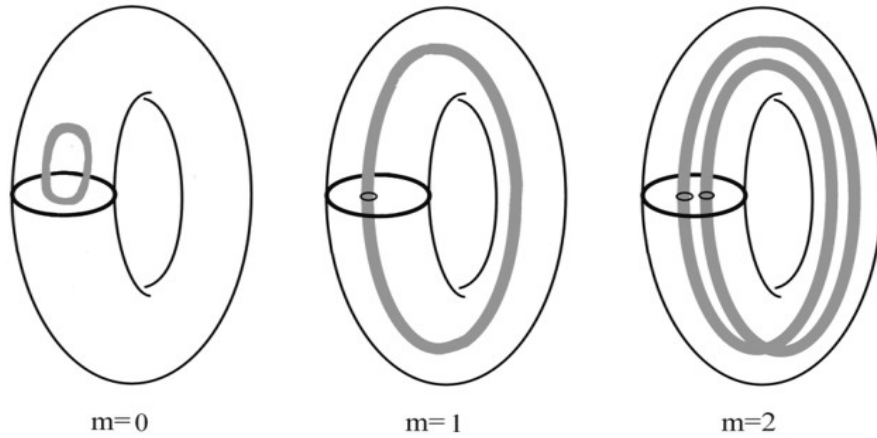


图 4. $m = 0$ 的情况: 实环面的像可收缩到一点; $m = 1$: 纵向收缩; $m = 2$: 实心环面在原内受到挤压、双重拉伸和扭曲等作用, 产生极限螺线管。

说, 考虑以下映射:

$$\bar{r} = p(r, \theta), \quad \bar{\theta} = q(r, \theta)$$

该映射有一个到自己的坚固环面 (这里 θ 是角变量, r 是法变量的向量)。让映射 $r \mapsto p(r, \theta)$ 是每个固定的 θ 的缩写:

$$\left\| \frac{\partial p}{\partial r} \right\|_0 < 1$$

(其中 $\|\cdot\|_0$ 表示所考虑的实环面上范数的极值), 让映射 $\theta \mapsto q(r, \theta)$ 对于每个固定的 r 是圆的微分胚。显然, 如果 [Afraimovich & Shilnikov, 1978; Shilnikov et al., 2001]:

$$1 - \left\| \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial r} \right\|_0 > 2 \sqrt{\left\| \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial q}{\partial r} \right\|_0 \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0},$$

那么该映射有一个稳定、光滑、封闭不变曲线 $r = r^*(\theta)$, 它吸引了实心环面上的所有轨道。如果 (11) 为真 (这里 $r = (X, Y), p = (\alpha(\theta, 0)^\nu + o(1), o(1)), q = \omega(\mu) + m\theta + h(\theta, 0) - \frac{1}{\gamma} \ln \alpha(\theta, 0) + o(1)$), 这些条件显然被 map(13) 满足。因此, 在这种情况下, 映射 T 具有闭合不变曲线。当 $m = 1$ 时, T 对不变曲线的限制保持了方向, 而当 $m = -1$ 时, 则是方向反转。因此, 这个截面上的不变曲线对应于 $m = 1$ 时的流动不变环面, 或者对应于 $m = -1$ 时的克莱因瓶。

对于 $|m| \geq 2$ 的情况, 还需要证明这个定理。证明基于以下结果。

引理 1 考虑实环面的微分胚 $T: (r, \theta) \mapsto (\bar{r}, \bar{\theta})$, 其中

$$\bar{r} = p(r, \theta), \quad \bar{\theta} = m\theta + s(r, \theta) = q(r, \theta), \quad (14)$$

其中 s 和 p 是 θ 的周期函数。让 $|m| \geq 2$, 且:

$$\left\| \frac{\partial p}{\partial r} \right\|_0 < 1, \quad (15)$$

$$\left(1 - \left\| \frac{\partial p}{\partial r} \right\|_0 \right) \left(1 - \left\| \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0 \right) > \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\|_0 \left\| \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{\partial q}{\partial r} \right\|_0. \quad (16)$$

然后该映射有一个均匀双曲的吸引子, 一个小威廉斯螺线管, 在其上拓扑共轭到反谱极限 $\bar{\theta} = m\theta$, 一个度- m 的圆扩展映射。

证明 2 由 (15) 和 (16) 可知 $\left\| \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0$ 是一致有界的。因此, θ 是 $(\bar{\theta}, r)$ 唯一定义的光滑函数, 因此我们可以用“交叉形式”重写 (14):

$$\bar{r} = p^\times(r, \bar{\theta}), \quad \theta = q^\times(r, \bar{\theta}), \quad (17)$$

其中 p^\times 和 q^\times 是光滑函数。很容易看出, 条件 (15)

和 (16) 意味着:

$$\left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0 < 1, \quad \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 < 1 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0 \right) \left(1 - \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 \right) \\ & \geq \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial r} \right\|_0 \end{aligned} \quad (19)$$

这些不等式意味着映射 T 的一致双曲性 (注意 (16) 与 [Afraimovich et al., 1983] 的 Lorenz 吸引子 Poincaré 映射的双曲性条件相一致)。确实, 这就足以证明存在 $L > 0$, 使得 T 的导数 T' 占据 $\|\Delta\bar{r}\| \leq L\|\Delta\theta\|$ 在 $\|\Delta\bar{r}\| \leq L\|\Delta\bar{\theta}\|$ 内的每一个锥体 $\|\Delta\bar{\theta}\| \leq L^{-1}\|\Delta\bar{r}\|$, 并在 $\|\Delta\bar{r}\|$ 中均匀地在 θ 中膨胀, 而 T' 的反函数则占据每一个锥体 $\|\Delta\bar{\theta}\|\|\Delta\bar{r}\|$, 在 $\|\Delta\theta\| \leq L^{-1}\|\Delta r\|$ 并且在这个圆锥中均匀地在 r 中膨胀。让我们检查一下这些属性。当 $\|\Delta r\| \leq L\|\Delta\theta\|$ 时, 我们从 (17) 中发现:

$$\|\Delta\theta\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0}{1 - L \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial r} \right\|_0} \|\Delta\bar{\theta}\| \quad (20)$$

并且:

$$\|\Delta\bar{r}\| \leq \left\{ \frac{L \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0 \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0}{1 - L \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial r} \right\|_0} + \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 \right\} \|\Delta\bar{\theta}\|. \quad (21)$$

类似地, 如果 $\|\Delta\bar{\theta}\| \leq L^{-1}\|\Delta\bar{r}\|$, 我们发现从 (17):

$$\|\Delta\bar{r}\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0}{1 - L^{-1} \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0} \|\Delta r\| \quad (22)$$

并且:

$$\|\Delta\theta\| \leq \left\{ \frac{L^{-1} \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0}{1 - L^{-1} \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0} + \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial r} \right\|_0 \right\} \|\Delta r\|. \quad (23)$$

因此, 如果我们证明存在 L , 我们将证明双曲性, 使得:

$$\left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0 < 1 - L \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial r} \right\|_0$$

并且:

$$\left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0 < 1 - L^{-1} \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0.$$

这些条件可以用任意 L 来解决:

$$\frac{\left\| \frac{\partial p^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0}{1 - \left\| \frac{\partial p^\times}{\partial r} \right\|_0} < L < \frac{1 - \left\| \frac{\partial q^\times}{\partial \bar{\theta}} \right\|_0}{\left\| \frac{\partial q^\times}{\partial r} \right\|_0}.$$

需要注意的是, 当 (18) 和 (19) 满足时, 这种 L 确实存在。□

我们证明了映射 T 的吸引子 A 是一致双曲的。这样的吸引子结构稳定, 因此 $T|_A$ 在拓扑上共轭于任何微分胚的吸引子的限制, 该限制可以通过映射 T 的连续变形而不违反条件 (15) 和 (16) 得到。映射给出了一个明显的微分同态的例子:

$$\bar{r} = p(\delta r, \theta), \quad \bar{\theta} = q(\delta r, \theta) \quad (24)$$

对于任何 $0 < \delta \leq 1$ 。修复小 $\delta > 0$, 并考虑一组映射:

$$\bar{r} = p(\delta r, \theta), \quad \bar{\theta} = q(\varepsilon r, \theta),$$

其中 ε 从 δ 运行到零。当 δ 足够小时, 这个族中的每个映射都是一个微分胚 (否则我们会得到曲线 $\{\bar{r} = p(0, \theta), \bar{\theta} = q(0, \theta)\}$ 将有自交点, 这是不可能的, 因为这条曲线是圆 $r = 0$ 的像, 通过微分胚 T), 并且每个都满足不等式 (15) 和 (16)。这个族是映射 (24) 到映射的连续变形:

$$\bar{r} = p(\delta r, \theta), \quad \bar{\theta} = q(0, \theta) = m\theta + s(0, \theta). \quad (25)$$

因此, 我们发现 $T|_A$ 在拓扑上共轭于微分同态 (25) 对其吸引子的限制。需要注意的是, 图 (25) 是一个固体环面的斜积图, 它沿着纤维 $\theta = \text{const}$ 收缩, 在底部, 它是一个圆的膨胀度- m 图。根据定义, 这种地图的吸引子就是所寻找的 Smale Williams 螺线管 [Smale, 1967; Williams, 1974]。这就完成了引理的证明。

现在, 为了完成定理的证明, 只需注意, 当 (12) 满足时, 映射 (13) 满足引理的条件。

致谢

This work was in part supported by NSF DMS1009591 and RFFI 11-01-00001 (to A. Shilnikov), and the Royal Society Grant “Homoclinic bifurcations” (to D. Turaev).

3. 参考文献

- Abraham, R. H. [1985] *Catastrophes, Intermittency, and Noise in Chaos, Fractals, and Dynamics*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 98, pp. 3-22.
- Afraimovich, V. S. & Shilnikov, L. P. [1974a] "On small periodic perturbations of autonomous systems," *Sov. Math. Dokl.* 15, 206-211.
- Afraimovich, V. S. & Shilnikov, L. P. [1974b] "On some global bifurcations connected with the disappearance of a fixed point of saddle-node type," *Sov. Math. Dokl.* 15, 1761-1765.
- Afraimovich, V. S. & Shilnikov, L. P. [1978] "The annulus principle and problems of interaction between two self-oscillating systems," *J. Appl. Math. Mech.* 41, 632-641.
- Afraimovich, V. S. & Shilnikov, L. P. [1982] "On bifurcation of codimension-one, leading to the appearance of a countable set of tori," *Sov. Math. Dokl.* 25, 101-105.
- Afraimovich, V. S., Bykov, V. V. & Shilnikov, L. P. [1983] "On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type," *Trans. Moscow Math. Soc.* 44, 153-216.
- Afraimovich, V. S. & Shilnikov, L. P. [1991] *Invariant Two-Dimensional Tori, Their Breakdown and Stochasticity*, American Mathematical Society Translations, Vol. 149, pp. 201-211.
- Andronov, A. A. & Leontovich, E. A. [1937] "Some cases of dependence of limit cycles on a parameter," *Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta (Research Notes of Gorky University)* 6, 3-24.
- Andronov, A. A. & Leontovich, E. A. & Gordon, I. E. & Maier, A. G. [1971] *The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane* (Wiley, NY).
- Belykh, I. V. & Shilnikov, A. L. [2008] "When weak inhibition synchronizes strongly desynchronizing networks of bursting neurons," *Phys. Rev. Lett.* 101, 078102.
- Belykh, I., Jalil, S. & Shilnikov, A. L. [2010] "Burstduration mechanism of in-phase bursting in inhibitory networks," *Regul. Chaot. Dyn.* 15, 148-160.
- Fuller, F. [1967] "An index of fixed point type for periodic orbits," *Amer. J. Math.* 89, 133-148.
- Gavrilov, N. K. & Shilnikov, A. L. [2000] *Example of a Blue Sky Catastrophe*, American Mathematical Society Translations, Series II, Vol. 200, pp. 99-105.
- Glyzin, S. D., Kolesov, A. Yu. & Rozov, N. Kh. [2008] "Blue sky catastrophe in relaxation systems with one fast and two slow variables," *Diff. Eqs.* 44, 161-175.
- Ilyashenko, Y. & Li, W. [1999] *Nonlocal Bifurcations*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 66 (AMS).
- Li, W. & Zhang, Z. F. [1991] "The blue sky catastrophe on closed surfaces," *Adv. Series Dyn. Syst.* 9, 316-332.
- Medvedev, V. S. [1982] "On a new type of bifurcations on manifolds," *Math. USSR Sb.* 41, 403-407.
- Newhouse, S., Palis, J. & Takens, F. [1983] "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms," *Publ. Math. IHES* 57, 5-71.
- Palis, J. & Pugh, Ch. [1975] "Fifty problems in dynamical systems," *Dynamical Systems*, Warwick, 1974, Springer Lecture Notes, Vol. 468.
- Shilnikov, L. P. [1963] "Some cases of generation of periodic motion from singular trajectories," *Math. USSR Sb.* 61, 443-466.

- Shilnikov, L. P. [1966] “On the generation of a periodic motion from a trajectory which leaves and re-enters a saddle-saddle state of equilibrium,” *Sov. Math. Dokl.* 7, 1155-1158.
- Shilnikov, L. P. [1968] “On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type,” *Math. USSR Sb.* 6, 427-438.
- Shilnikov, L. P. [1991] “The theory of bifurcations and turbulence,” *Selecta Math. Sovietica* 10, 43-53.
- Shilnikov, L. P. & Turaev, D. V. [1997] “On simple bifurcations leading to hyperbolic attractors,” *Comput. Math. Appl.* 34, 441-457.
- Shilnikov, L. P. & Turaev, D. V. [2000] “A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type,” in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics*, American Mathematical Society Translations, Series II, Vol. 200, pp. 165-188.
- Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V. & Chua, L. O. [2001] *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II* (World Scientific, Singapore).
- Shilnikov, A. L. & Cymbalyuk, G. [2004] “Homoclinic saddle-node orbit bifurcations en route between tonic spiking and bursting in neuron models,” *Regul. Chaot. Dyn.* 3, 281-297.
- Shilnikov, A. L., Shilnikov, L. P. & Turaev, D. V. [2004] “On some mathematical aspects of classical synchronization theory. Tutorial,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 14, 2143-2160.
- Shilnikov, A. L., Shilnikov, L. P. & Turaev, D. V. [2005] “Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems,” *Moscow Math. J.* 5, 205-218.
- Shilnikov, A. L. & Cymbalyuk, G. [2005] “Transition between tonic-spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe,” *Phys. Rev. Lett.* 94, 048101.
- Shilnikov, A. L. & Turaev, D. V. [2006] “Blue sky catastrophe,” *Scholarpedia* 2, 1889.
- Shilnikov, A. L. & Kolomiets, M. L. [2008] “Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model: A case study,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* 18, 1-27.
- Smale, S. [1967] “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Amer. Math. Soc.* 73, 747-817.
- Turaev, D. V. & Shilnikov, L. P. [1986] “Bifurcations of quasiattractors torus-chaos,” in *Mathematical Mechanisms of Turbulence (Modern Nonlinear Dynamics in Application to Turbulence Simulation)*, Kiev, pp. 113-121.
- Turaev, D. V. & Shilnikov, L. P. [1995] “On blue sky catastrophes,” *Dokl. Math.* 51, 404-407.
- Williams, R. F. [1974] “Expanding attractors,” *Publ. Math. IHES* 43, 169-203.
- Wojcik, J., Clewley, R. & Shilnikov, A. L. [2011] “Order parameter for bursting polyrhythms in multifunctional central pattern generators,” *Phys. Rev. E* 83, 056209.
- Wojcik, J., Schwabedal, J., Clewley, R. & Shilnikov, A. L. [2014] “Key bifurcations of bursting polyrhythms in 3-cell central pattern generators,” *PLoS ONE* 9, e92918.