

International Conference on Difference Equations and Applications

↳ ICDEA 2019: **Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems** pp 45–57

# Poincaré Return Maps in Neural Dynamics: Three Examples

Marina L. Kolomiets & ANDREY L. SHILNIKOV 

Conference paper | [First Online: 05 January 2021](#)

**215** Accesses

Part of the [Springer Proceedings in Mathematics & Statistics](#) book series (PROMS, volume 341)

## 神经动力学中的庞加莱回归映射：三个例子

### Poincaré return maps in neural dynamics: three examples

作者：Marina L. Kolomiets<sup>1</sup>, Andrey L. Shilnikov<sup>2</sup>

组织：1. Department of Mathematics, Academy of Agricultural Sciences, Nizhny Novgorod 603107, Russia,

2. Neuroscience Institute, Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, Atlanta, Georgia 30303, USA.

时间：Submitted: 20 April 2020 · Accepted: 4 July 2020 · Published Online: 27 July 2020

关键词：neurodynamics, Poincaré return maps, neural model, networks

Translated by Xinxin Qie, School of Mathematics, SCUT.

Link to the Journal: [Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems](#)

# Poincaré return maps in neural dynamics: three examples

Marina L. Kolomiets<sup>1</sup>, Andrey L. Shilnikov<sup>2</sup>

1. Department of Mathematics, Academy of Agricultural Sciences, Nizhny Novgorod 603107, Russia,

2. Neuroscience Institute, Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, Atlanta, Georgia 30303, USA.

## 摘要 [Abstract]

在单个神经元和神经网络的现实模型中，如何理解不同的活动模式之间过渡的开始和其一般机制，为应用动力系统的理论提出了一个挑战。我们使用三个慢-快神经系统的例子来演示一套新的计算工具来研究不同的神经元系统。

## 1 引言

大多数神经元表现出膜电位的振荡或内源性或由于外部扰动。神经元动力学的主要振荡活动，如紧张性峰值和爆发，是基于霍奇金-赫胥黎形式主义 [1] 的模型。从数学上讲，这种基于电导的模型属于一类特殊的具有至少两个不同时间尺度的动力系统，即所谓的慢速系统 [2-8]。爆发是一种具有在不同时间尺度上运行的子成分的慢速动力学的表现。神经爆发是一种模块化的活动，由各种限制分岔组成，对应于快速子系统的振荡和平衡状态，并通过它们之间的瞬态连接。使用普通的数学方法，我们可以更好地理解单个和耦合神经元模型中爆发振荡的基本开始。爆发机制及其转换的研究需要非局部分岔分析，这是基于对庞加莱回归图的推导和进一步的检验。

## 2 水蛭心脏间神经元的霍奇金-赫胥黎型模型

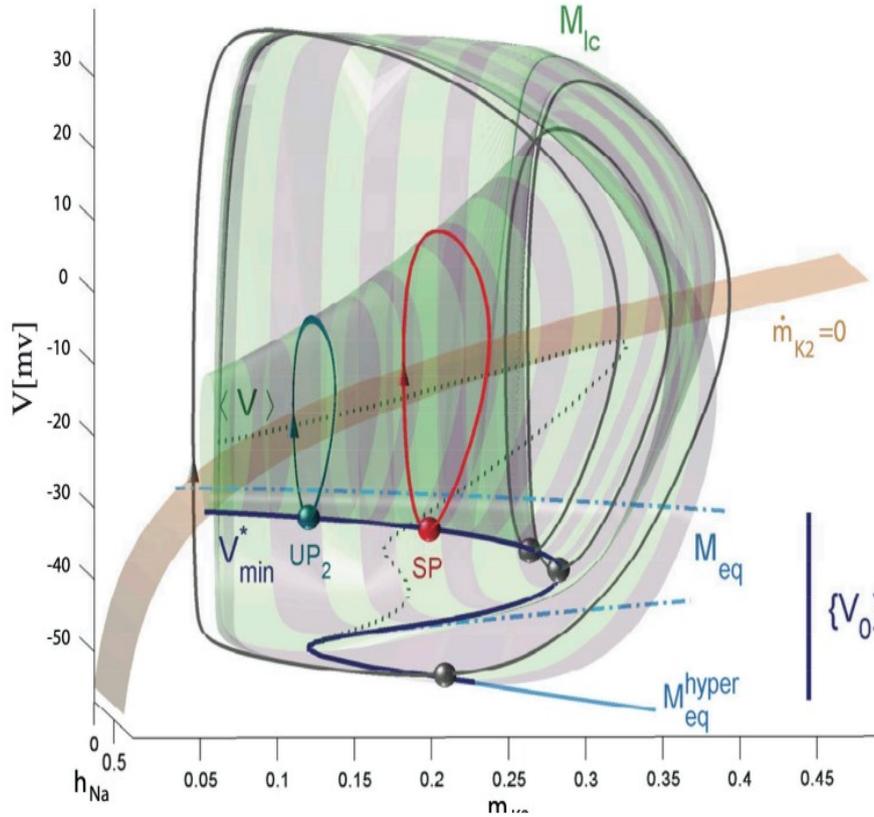
我们的第一个例子是心脏间神经元模型 [9-12]，由霍奇金-赫胥黎方程表示 [1]，并不是每个数学家都熟悉它。它的方程看起来太详细：

$$\begin{aligned} C \frac{dV}{dt} &= -I_{Na} - I_{K2} + I_L - I_{app} - I_{syn}, \\ I_L &= \bar{g}_L (V - E_L), \quad I_{K2} = \bar{g}_{K2} m_{K2}^2 (V - E_K), \\ I_{Na} &= \bar{g}_{Na} m_{Na}^3 h_{Na} (V - E_{Na}), \quad m_{Na} = m_{Na}^\infty(V), \\ \tau_{Na} \frac{dh_{Na}}{dt} &= h_{Na}^\infty(V) - h, \quad \tau_{K2} \frac{dm_{K2}}{dt} = m_{K2}^\infty(V) - m_{K2}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $C = 0.5\text{nF}$  为膜电容； $V$  为膜电位； $I_{Na}$  为缓慢失活  $h_{Na}$  的快速电压门控钠电流  $m_{Na}$ ； $I_{K2}$  为激活  $m_{K2}$  的持续钾电流； $I_L$  为泄漏电流， $I_{app}$  为恒定极化或外部施加电流。最大电导为  $\bar{g}_{K2} = 30\text{nS}$ ,  $\bar{g}_{Na} = 200\text{nS}$ ,  $\bar{g}_L = 8\text{nS}$ ，反转电位为  $E_{Na} = 0.045\text{ V}$ ,  $E_K = -0.070\text{ V}$  and  $E_L = -0.046\text{ V}$ 。门控变量的时间常数分别为  $\tau_{K2} = 0.25\text{sec}$  和  $\tau_{Na} = 0.0405\text{sec}$ 。门控变量  $h_{Na}^\infty(V)$ ,  $m_{Na}^\infty(V)$ ,  $m_{K2}^\infty(V)$  的稳态值由以下 s 型函数给出：

$$\begin{aligned} h_{Na}^\infty(V) &= [1 + \exp(500(0.0333 - V))]^{-1} \\ m_{Na}^\infty(V) &= [1 + \exp(-150(0.0305 - V))]^{-1} \\ m_{K2}^\infty(V) &= [1 + \exp(-83(0.018 - V + V_{K2}^{shift}))]^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

其量  $V_{K2}^{shift}$  是该模型的一个真正的分岔参数：它是与半活化钾通道对应的实验平均电压值  $V_{1/2} = 0.018\text{V}$  的偏差，即  $m_{K2}^\infty(0.018) = 1/2$ 。  $V_{K2}^{shift}$  的变化使缓慢的向  $\frac{dm_{K2}}{dt} = 0$  方向移动，见图 1。由于相位变量的时间常数的



**图 1:** 模型 (1) 的慢流形  $M_{lc}$  和零等值线: 当参数  $V_{K2}^{shift}$  从  $-0.026$  增加到  $0.0018$  时, 二维尖峰流形  $M_{lc}$  由从左到右继续的周期轨道形成叶状。空间曲线  $V_{min}$  和  $\langle V \rangle$  由周期轨道的最小坐标和平均坐标组成。  $M_{lc}$  胶合到静止流形的超极化折叠,  $M_{eq}$ , 由 (2) 的平衡态组成, 其中平均值  $\langle V \rangle$  的曲线终止。方程式的一个平衡态。 (1) 是给定  $V_{K2}^{shift}$  的  $M_{eq}$  与慢零等值线 (黄色)  $\dot{m}_{K2} = 0$  的交点。还显示 (红色) 是制造  $M_{lc}$  的周期轨道的  $v$ -最小坐标值的曲线。这条曲线是用来定义庞加莱映射。

差异, 快-慢系统范式适用于系统 (1): 它的前两个微分方程形成一个快子系统, 而最后一个方程是慢方程。这种系统的动力学已知的 [13] 是由吸引构成活动模式骨架的慢动作流形的片段所决定的, 并以其为中心。这些流形是由快速子系统的极限集组成的, 如平衡集和极限环, 其中慢变量成为奇异极限中的一个参数。

一个典型的霍奇金-赫胥黎模型具有一对这样的流形 [14]: 静态和紧张性尖峰, 相应地用  $M_{eq}$  和  $M_{lc}$  表示。 (2) 的解决方案是在  $M_{eq}$  的低、超极化分岔和尖峰流形  $M_{lc}$  之间反复切换, 这代表了模型中的一个爆发活动。当尖峰流形  $M_{lc}$  对于 (1) 的解是瞬态的时, 就像那些在图 2 的周围的绕线, 模型表现出规则的或混沌的爆发。否则, 模型 (1) 有一个峰值周期轨道, 通过鞍结点分岔在  $M_{lc}$  上出现, 从而终止了爆发活动 [16], 或者两种机制可能在 [17,18] 中共存。

对应于模型的周期轨道等等。一个多次绕  $M_{lc}$  和从  $M_{lc}$  往返的爆发轨道是一个更复杂的更长周期的轨道。此外, 在脉冲轨道增加跃迁时, 爆发轨道可能变得甚至混沌, 图显示这是由神经模型 (1) 的鞍周期轨道对应的不稳定不动点的同斜轨道 (红色轨道) 引起的。一维回归图的形状推断出, 当它变得更陡峭, 具有一个特征的尖点形状时, 模型将进入混沌状态。

### 3 FitzHugh-Nagumo-Rinzel 模型

我们的下一个例子是 FitzHugh-Nagumo-Rinzel (FNR) 模型, 它是一个椭圆突发的数学模型 (见图 3(B)); 由 [19] 给出的方程:

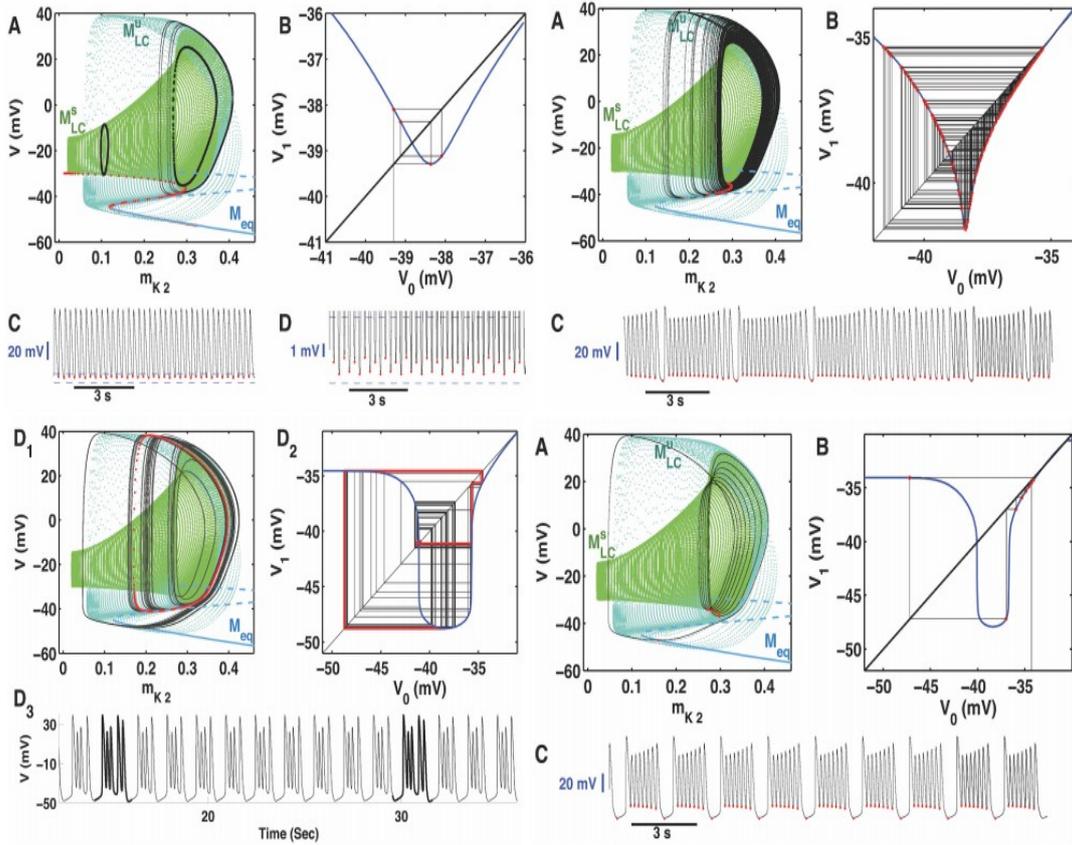


图 2: (左上) 在  $V_{K2}^{\text{shift}} = 0.0255$  处稳定峰值周期轨道峰值的四个  $v$ -最小值对应于庞加莱映射的周期 4 轨道。插图 (C) 和 (D) 显示了电压波形。(右上) 模型映射中的混沌峰值, 且  $V_{K2}^{\text{shift}} = 0.0254$ 。(下面) 在峰值增加过渡变得更加规则化, 每个突发有大量的峰值。

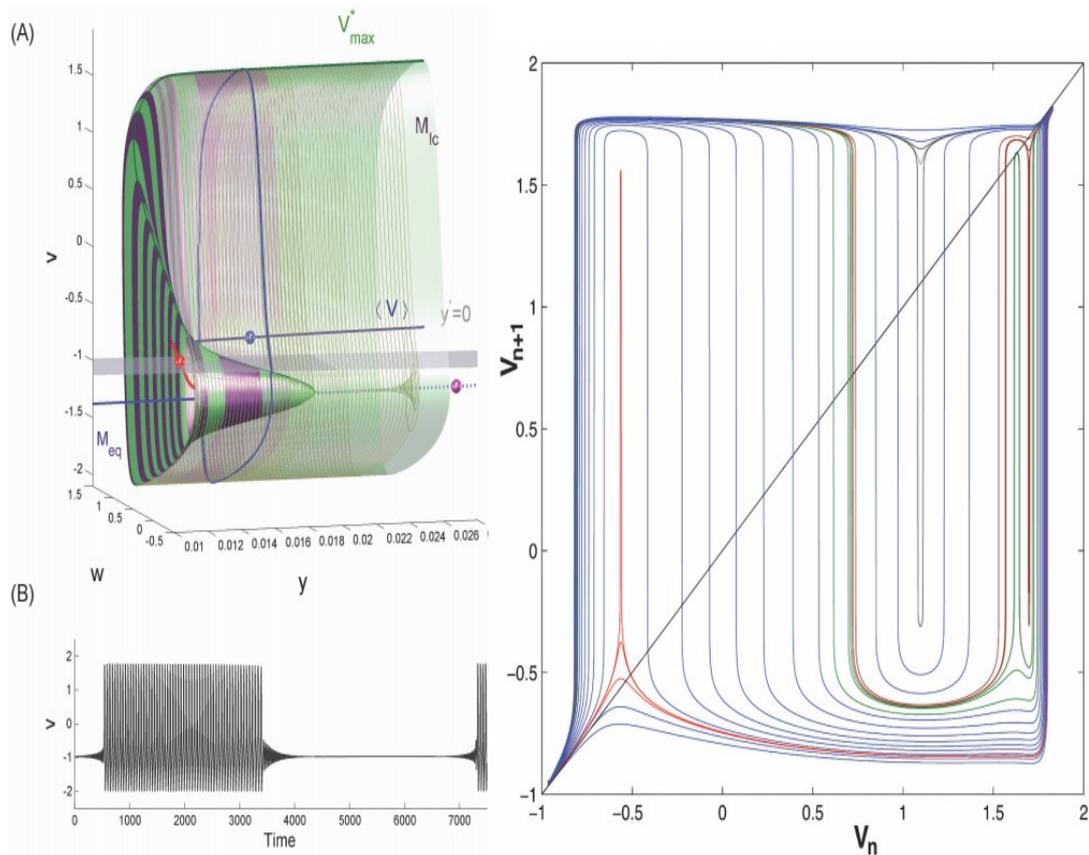
$$\begin{aligned}
 v' &= v - v^3/3 - w + y + I \\
 w' &= \delta(0.7 + v - 0.8w) \\
 y' &= \mu(c - y - v)
 \end{aligned} \tag{3}$$

这里,  $\delta = 0.08, I = 0.3125$  是一个“外部电流”, 我们设置  $\mu = 0.002$  来确定慢变量  $y$  的速度; 模型的分岔参数为  $c$ 。

当  $\mu = 0$  时, 慢变量  $y$  被冻结。(3) 中的前两个快速方程组成了描述一个弛豫振荡器的 FitzHugh-Nagumo 快速子系统模型, 只要  $\delta$  很小。这个子系统要么在稳定的极限环上表现出紧张性尖峰, 要么在某些稳定的  $y$  值上在稳定的平衡态上表现出静止。当一个不稳定极限环崩溃为平衡态时, 快速子系统中平衡态的稳定性损失通过亚临界安多诺夫-霍普夫分岔产生一个稳定的极限环。稳定极限环在 FNR 模型中出现稳定和 unstable 极限环。这两个分岔, 安多诺夫-霍普夫和鞍结点, 都是描述椭圆突发的关键。利用传统的慢速解剖方法, 可以通过在快速子系统的扩展相空间中改变冻结的  $y$  变量来定位极限环和平衡态的相应分岔。图 3 显示了相空间中 FNR 模型的强性尖峰  $M_{lc}$  和静止的  $M_{eq}$  的拓扑结构。

## 4 一维电压映射

回想一下, 慢速系统的一个特征是它的解被限制在慢动作流形附近, 即由平衡点和快速子系统的周期缺陷组成的慢速流形附近。如果两个流形对于相应的神经元模型的解都是瞬态的, 它就表现出爆发行为, 即紧张性



**图 3:** (A) 拓扑的紧张性尖峰  $M_{lc}$ ，和静止流形  $M_{eq}$ 。 $M_{lc}$  上的折叠，对应于一个鞍结分岔，其中由周期轨道组成的稳定（外）和鞍分支（内）合并。这个顶点，其中  $M_{lc}$  的不稳定分支在  $M_{eq}$  处崩溃，对应于一个亚临界的 Andronov-Hopf 分岔。空间曲线，用  $V_{max}^*$ （绿色）和  $\langle V \rangle^{s,u}$ （蓝色和红色）分别标记，对应于周期内的 \* 和周期轨道的平均坐标。平面  $y' = 0$  是缓慢的零等值线，上面（下面），模型解的  $y$  分量增加（减少）。随着  $c$  参数的增加/减少，平面被升降。（右）随着  $c$  从  $c=-1$  增加到  $c=-0.55$  的 1D 指针回归图  $T: V_n \rightarrow V_{n+1}$ 。下图对应于模型中的静止和阈下振荡；上图对应于紧张性尖峰动力学，而中间图描述了爆发的分岔。图与双线图交点是映射的一个不动点。不动点的稳定性由图的斜率决定，即如果  $|T'| < 1$ ，它是稳定的。

尖峰和静止周期的重复交替。否则，该模型证明了在主峰流形上存在一个稳定的周期轨道时，主峰活动，或者当解被吸引到静止流形上的一个稳定平衡态时没有振荡。

该方法的核心是对低维庞加莱回归图的简化和推导，并伴随着对极限解的分析：固定、周期和同宿轨道，代表了原始模型中的各种振荡。映射在计算神经科学中被积极应用，见 [21–24] 和其中的引用。通常，这样的映射是从电压轨迹中采样的，例如通过挑出连续的电压最大值或最小值，或峰值间间隔。由时间序列生成的映射的一个缺点是稀疏性，因为构造算法只揭示了模型的一个周期吸引子，除非后者显示混沌或混合动力学产生大量密集的点。

在 [25] 之后的 [12] 中提出了一种新的计算机辅助方法，用于构建神经元霍奇金赫胥黎模型的完整家族，见上文。有了这样的映射，我们就能够详细阐述紧张性尖峰和爆发问题中的分岔，检测双稳定性，以及检查不稳定集，它们在任何模型中复杂动力学的组织中心。利用这种方法，我们研究了水蛭心脏间神经元模型中的复杂爆发变换，揭示了复杂转变行为的原因是同宿轨道可以被小噪声大大放大 [11,20]。对映射的探究将帮助我们在转换实际发生在模型中之前对转换做出定性预测。

电压间隔图的构造是一个两阶段的例程序。首先，我们需要利用参数延拓技术在神经元模型中准确地分离出慢动作流形  $M_{lc}$ 。该流形由主尖峰周期轨道作为慢方程的控制参数组成。回想一下，它的变化，在模型的相空间中提高或降低慢零等值线，不会改变快速子系统，因此确实保持了流形的完整。接下来在  $M_{lc}$  上检测一个空间曲线  $V_{max}$ ，它对应于构成主尖峰流形的所有周期轨道上的膜电位  $V_n$  的最大电压值，见图 3。

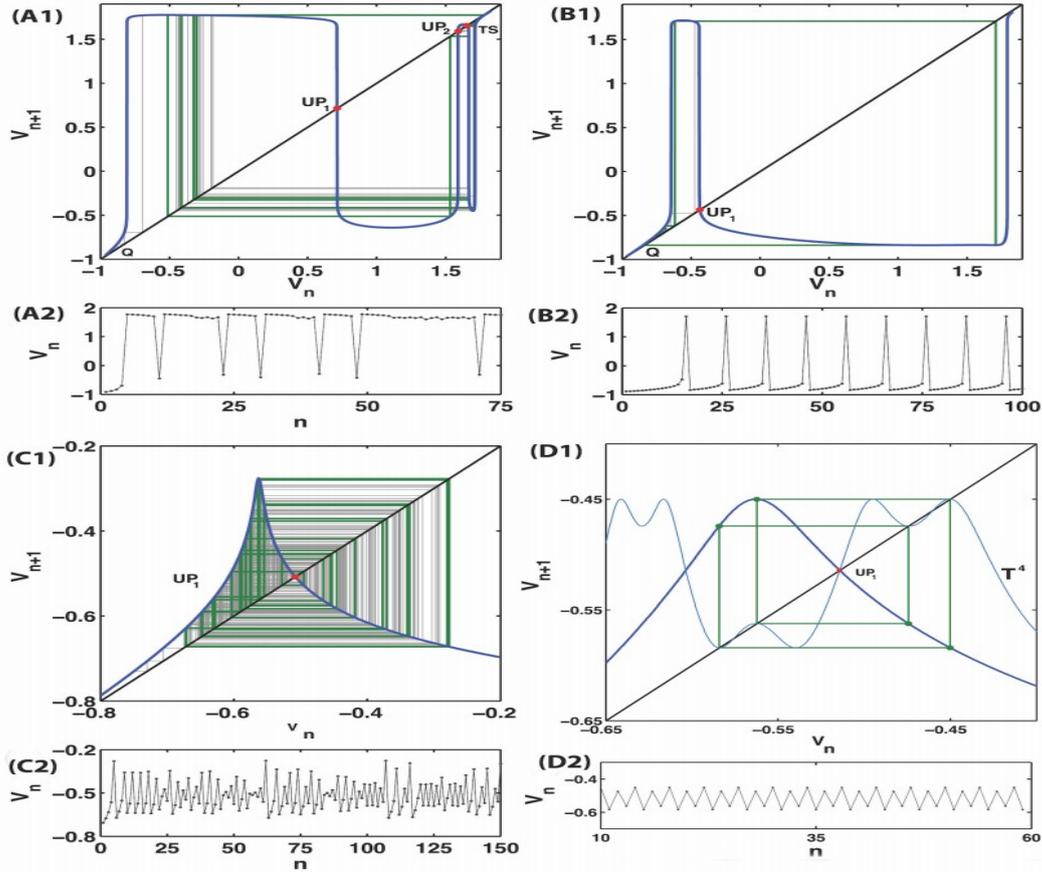


图 4: (A1/2) 一维指针回归图的形状揭示了混沌混合模式振荡过渡时 (MMOs) 的潜在原因, 该模型成为周期性的 MMOs, 随后是 9 次阈值振荡 (B1/2)。(C1/2) 对应于混沌和周期 4 次阈值振荡的单峰图 (D1/2)。

我们利用这些数据来进一步修正了集合  $V_n$ , 通过积分模型在每个极大值附近的解, 以找到模型的精确位置转折点, 由条件  $V'_{max} = 0$  决定。接下来, 使用定义  $V_n$  的点作为初始条件来计算 (3) 将保持在或接近  $M_{lc}$ 。当在电压轨迹中达到电压的连续最大值  $V_{n+1}$  时, 积分就停止了。图 4 展示了随着  $c$  参数的变化, 一维映射的形状如何以一种复杂的可预测的方式发生变化。从终点可以看出, 该映射最初在右上角有一个稳定的固定点, 它对应于图 3(左) 二维流形  $M_{lc}$  外表面上稳定的强直脉冲轨道)。我们还可以从图 3 (右) 右下角的映射中预见到, 神经模型将经历阈下振荡的周期加倍分岔, 随后是涉及阈下振荡和爆发的复杂混合模振荡。我们的预测由图 4 来说明和证实, 即从图 3 中采样了四个特征的一维庞加莱回归图。1D 回归图揭示了混沌混合模式振荡的根本原因 (MMOs) 从紧张峰值爆发的 FNR-model (3) 接下来成为周期性 MMOs, 并进一步过渡到混乱和常规阈下振荡路线静止的阶段在一般椭圆爆发。

## 5 示例 3: 多功能 3 细胞网络中的 2D 循环图。

许多有节律的运动行为, 如呼吸、咀嚼、在陆地和水中的运动以及心跳 (水蛭) 是由称为中央模式发生器 (CPGs) 的细胞网络产生的。CPG 是一种细胞的神经微电路, 其协同、非线性相互作用可以自主产生一系列多成分/多节律性活动爆发模式, 这些模式决定了动物的运动行为, 包括人类 [29–35]。建模研究, 现象学上的数学和详尽的计算, 已经被证明是有用的, 以获得深入了解 CPGs [36–42] 的操作原理。虽然已经开发了各种特定 CPG 的简化和可行的模型, 但仍不清楚 CPG 如何达到在自然 [43–47] 中观察到的稳健性和稳定性水平。理解神经连接功能进化的关键普遍机制、不同神经活动之间转换的分岔机制以及这些过程的精确建模为特别是应用数学和所有计算科学带来了机会和挑战。

而专用 CPG 产生单一模式, 多功能或多态 CPG 可以灵活地产生不同的节律, 如时间上不同的游泳和爬行运

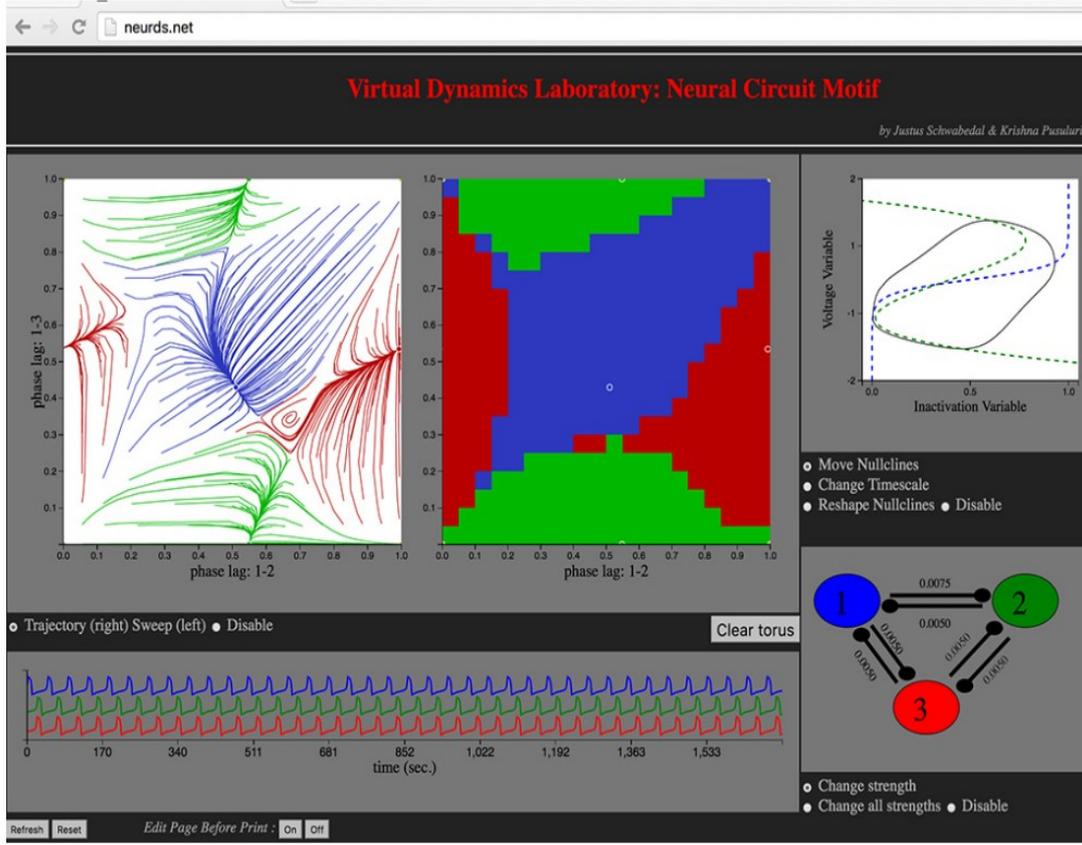


图 5: 基于 GPU 的交互主题工具箱 [58,59] 计算研究 3 细胞电路由突触耦合的 FitzHugh-Nagumo, Hodgkin-Huxley 和  $2\theta$ -神经元, 它可以生成 6 (图中的 3) 健壮的模式对应于稳定的固定点在 2d 指针的回归映射组成细胞之间的相位滞后。

动, 以及水蛭 [48–50] 中血液循环方向的交替。在 CPG 网络的各种吸引子之间的切换会导致运动行为之间的切换。每个吸引子都与一个在特定时间尺度上运行的确定节律相关, 在构成神经元之间具有明确和稳健的相位滞后。神经网络中同步节律的出现与耦合神经元的时间特征密切相关, 这是由于突触耦合的内在特性和类型, 可以是抑制性、兴奋性和电性、快速和缓慢的 [51–55]。

我们开发了一个振荡网络的计算工具包, 减少了 CPG 网络产生的爆发和尖峰节律的发生问题, 从而对振荡神经元之间相位滞后的相应点回归图中的吸引子进行分岔分析。映射的相空间结构是 CPG 独有的特征, 并且它公开了该网络的功能空间的所有特征。由 CPG (由耦合霍奇金赫胥黎型神经元 [56] 系统表示) 产生的重复节律使用庞加莱回归映射, 定义为组成神经元中脉冲/脉冲起始之间的相位滞后 (图 5)[43, 51–53, 57]。庞加莱回归图  $\Pi: \mathbf{M}_n \rightarrow \mathbf{M}_{n+1}$  相位点  $\mathbf{M}_n = (\phi_{21}^{(n)}, \phi_{31}^{(n)})$  的前进轨迹  $\{\phi_{21}^{(n)}, \phi_{31}^{(n)}\}$  是通过在网络周期内标准化的每个周期中的突发初始化之间的时间延迟  $\Delta\phi_{j1}^{(n)} = \frac{\tau_{j1}^{(n+1)} - \tau_{j1}^{(n)}}{\tau_{j1}^{(n+1)} - \tau_{j1}^{(n)}}$  (一维) 定义的。它可以收敛到几个共存的稳定不动点, 从而表明给定的网络是多稳定的, 或者一个稳定的环, 对应于一个周期性变化的相位滞后的独特节律。这些是二维环面回归图的吸引子, 单一或多个, 分别与多功能或专用的神经回路相关 (图 5)。对于相位滞后的 2D 回归图  $\Pi: \mathbf{M}_n \rightarrow \mathbf{M}_{n+1}$  可以写如下:

$$\phi_{21}^{(n+1)} = \phi_{21}^{(n)} + \mu_1 f_1(\phi_{21}^{(n)}, \phi_{31}^{(n)}), \quad \phi_{31}^{(n+1)} = \phi_{31}^{(n)} + \mu_2 f_2(\phi_{21}^{(n)}, \phi_{31}^{(n)}) \quad (4)$$

其中  $\mu_i$  表示耦合强度,  $f_i$  是一些未确定的耦合函数, 如  $f_1 = f_2 = 0$  对应于它的不动点:  $\phi_{j1}^* = \phi_{j1}^{(n+1)} = \phi_{j1}^{(n)}$ 。这些功能, 类似于相位复位曲线, 可以从收集的已知轨迹的模拟数据中进行评估!  $\{\phi_{21}^{(n)}, \phi_{31}^{(n)}\}$ 。通过治疗  $f_i$  部分  $\partial F / \partial \phi_{ij}$ , 我们可以恢复“相电位”  $F(\phi_{21}, \phi_{31}) = C$  决定耦合神经元的动态, 找到其临界点与 FP 吸引子, 排

斥和马鞍的映射，通过比例  $f_i$  预测分岔由于失去稳定性，因此转换的节律结果网络作为一个整体。

有了这样的回归图，我们可以预测和识别一组稳健的结果在 CPG 混合，抑制和兴奋，缓慢和快速的突触，分别通过锁相或周期性变化的滞后对应于稳定的不动点和不变环的回归图。这个工具包可以让我们在有节律的结果实际发生在网络中之前，先预测它们的分岔和转换。该方法还揭示了网络的能力以及其结果对耦合强度、布线电路和突触的依赖性，从而使人们能够定量和定性地确定有节律的结果发生的必要和充分条件。使用图形处理器单元 (GPUs)，使用多个初始条件 (如图 5 所示) 对多稳定神经网络进行并行模拟，可以大大加快分岔分析的速度，并将模拟时间减少到仅几秒钟。

## 6 致谢

This work was funded in part by the NSF grant IOS-1455527 and the RSF grant 14-41-00044 at Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. We thank the Brains and Behavior initiative of Georgia State University for providing pilot grant support. We acknowledge the support of NVIDIA Corporation with the Tesla K40 GPUs used in this study. Finally, we are grateful to all the current and past members of the Shilnikov NeurDS lab for productive discussions.

## 7 参考文献

1. Hodgkin, A.L. and A.F. Huxley (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J.Physiol* 117(4): 500–544.
2. Arnold, V.I., V.S. Afraimovich, Yu.S. Ilyashenko, and L.P. Shilnikov (1994). *Bifurcation Theory*, Vol. V of *Dynamical Systems*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer
3. Bertram, R., M.J. Butte, T. Kiemel, and A. Sherman (1995). Topological and phenomenological classification of bursting oscillations. *Bull. Math. Biol.* 57(3): 413-439.
4. Izhikevich, E.M. (2007). *Dynamical systems in neuroscience. The geometry of excitability and bursting*. MIT Press, Cambridge, Mass.
5. Jones, C.K.R.T. and N. Kopell (1994). Tracking invariant-manifolds with differential forms in singularly perturbed systems. *Journal of Differential Equations* 108(1) : 64-88.
6. Rinzel, J. (1985). Bursting oscillations in an excitable membrane model. *Lecture Notes in Mathematics* 1151: 304-316.
7. Rinzel, J. and B. Ermentrout (1998). Analysis of neural excitability and oscillations;. In Koch, Christof and Idan Segev, editors, *Computational neuroscience*, pp. 135-169. MIT Press, Cambridge, Mass.
8. Rinzel, J. and X.J. Wang (1995). Oscillatory and bursting properties of neurons. In Arbib, M, editor, *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, pp. 686-691. MIT Press.
9. Shilnikov, A.L. and G. Cymbalyuk (2005). Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe. *Phys. Rev.Lett.* 94(4): 048101 .
10. Shilnikov, A.L., R.L. Calabrese, and G. Cymbalyuk (2005). Mechanism of bistability: tonic spiking and bursting in a neuron model. *Phys.Rev.E* 71: 056214.
11. Channell, P., G. Cymbalyuk, and A. Shilnikov (2007a). Origin of bursting through homoclinic spike adding in a neuron model. *Phys. Rev.Lett.* 98(13): 134101.
12. Channell, P., G. Cymbalyuk, and A.L. Shilnikov (2007b). Applications of the poincare mapping technique to analysis of neuronal dynamics. *Neurocomputing* 70: 10-12.
13. A.N. Tikhonov, *Mat. Sb.* 31575 (1952); N. Fenichel, *J. Diff. Eq.* 31,53 (1979).
14. J. Rinzel, B. Ermentrout, *Methods in Neuronal Modelling: From synapses to Networks*, eds. C. Koch and I. Segev, MIT Press (1989).

15. A. Shilnikov and G. Cymbalyuk, PRL 94, 048101 (2005).
16. L.P Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev and L.O. Chua, Methods qualitative theory in nonlinear dynamics, Vols. I-II. World Sci. Publ. (1998, 2001); A.L. Shilnikov, L.P. Shilnikov and D.V. Turaev, Moscow Math J. 5(1), 205 (2005).
17. A. Shilnikov, R.L. Calabrese and G. Cymbalyuk, Neurocomputing 65-66, 869 (2005).
18. G.S. Cymbalyuk A.L. Shilnikov, J. Comp. Neuroscience 18(3), 255 (2004); Regular & Chaotic Dynamics 9 (3), 281 (2004).
19. J. Wojcik and A. Shilnikov, Voltage interval mappings for activity transitions in neuron models for elliptic bursters. Physica D 240(14-15) 1164-1180, 2011.
20. Channell P., Fuwape I., Neiman A., and Shilnikov A.L., Variability of bursting patterns in a neuronal model in the presence of noise, J. Computational Neuroscience, 27(3): 527-42, 2009.
21. Chay, T.R. (1985). Chaos in a three-variable model of an excitable cell. Physica D 16(2) : 233 – 242.
22. Griffiths, R.E. and M.C. Pernarowski (2006). Return map characterizations for a model of bursting with two slow variables. SIAM J.Appl.Math. 66(6): 1917-1948.
23. Shilnikov, A.L. and N.F. Rulkov (2003). Origin of chaos in a two-dimensional map modelling spiking-bursting neural activity. International Journal of Bifurcation and Chaos 13(11): 3325-3340.
24. Shilnikov, A.L. and N.F. Rulkov (2004). Subthreshold oscillations in a map-based neuron model. Phys.Lett.A 328(2-3): 177-184.