

Shilnikov 分岔

Leonid Pavlovich Shilnikov^[1], Andrey Shilnikov^[2]

1. 应用数学和控制论研究所，俄罗斯下诺夫哥罗德，
2. 数学系，GSU，亚特兰大，GA

Leonid Pavlovich Shilnikov and Andrey Shilnikov (2007), Scholarpedia, 2(8):1891.

doi:10.4249/scholarpedia.1891

revision #194931 [[link to/cite this article](#)]

Shilnikov 或 Silnikov 分岔代表了引起系统中复杂动力学开始的鞍-焦平衡状态 () 的同宿分岔。

1 鞍-焦

我们考虑在一个三维系统中的原点处有这样一个鞍-焦点:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\rho x - \omega y + F_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= \omega x - \rho y + F_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= \gamma z + F_3(x, y, z),\end{aligned}\tag{1}$$

这里它的李亚普诺夫特征指数是 $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega, \rho > 0, \omega \neq 0, \lambda_3 = \gamma > 0$; 平滑函数 F_i , 以及它们的第一个参量, 在原点消失。那么, 鞍-焦 O 的稳定流形 W^s 是二维的, 而不稳定流形 W^u 是一维的。流形 W^u 是 O 和两个在 $t \rightarrow -\infty$ 时趋向于 O 的分离矩阵的联合。一个同宿环 Γ 是一个在 $t \rightarrow +\infty$ 时双渐近于 O 的轨迹。换言之, $\Gamma \in W^s \cap W^u$ 。

2 鞍值

接下来我们介绍鞍值或数量 $\sigma = \rho + \gamma$ 和鞍指数 $= \rho/\gamma$ 。根据 σ 的符号, 或者是否小于或大于 1, 当 $\sigma < 0$ 时, (1) 在鞍-焦附近的动力学是简单的, 如果 $\sigma > 0$, 则是复杂的。

同宿分岔的分析被简化为由同宿环路 Γ 附近的轨迹定义的庞加莱映射的分析。为了简单起见, 我们假设上述系统 (1) 在原点附近是线性的。

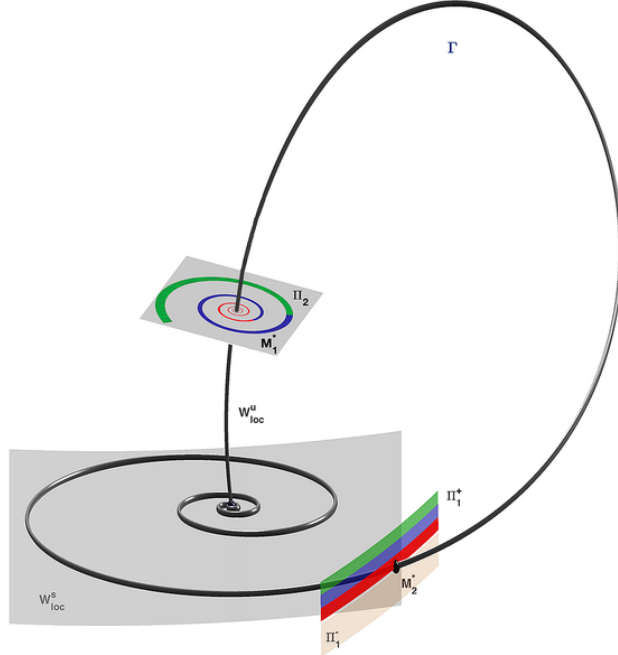


图 1: 鞍-焦点的同宿环。

3 全局映射

首先, 在鞍-焦的一个小的邻域, 横截面 Π_1 被引入, 作为稳定流形 W_{loc}^s 的横断面, 将 Π_1 分成顶部 Π_1^+ 和底部 Π_1^- 两部分。同宿环在 W^s 上的某个点 $M^* \in \Gamma \cap \Pi_1$ 处击中 Π_1 。

接下来我们需要确定 Π_1 在横跨 W_{loc}^u 的第二个截面 Π_2 上的图像; 它将具有一个焦点形的形状, 有无数次的旋转累积到 W_{loc}^u 。因此, 从 $\Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ 的局部映射 T_0 被定义了。它的特性完全由鞍焦点的特征指数决定。

(1) 的解 $(x(t), y(t), z(t))$ 从 $t = 0$ 时接近原点的点 $(x_0, y_0, z_0) \in \Pi_1^+$ 开始, 在 $t = \tau$ 时结束于点 $(x_1, y_1, z_1) = d \ll 1 \in \Pi_2$, 写法如下:

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \exp \left[\tau \begin{pmatrix} -\rho & -\omega \\ \omega & -\rho \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$z(0) = e^{-\gamma\tau} d.$$

我们现在可以评估连接各截面的轨迹的飞行时间 $\tau = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{z_0}{d}$ 。显然, 初始点越接近稳定流形 W_{loc}^s , 这个时间就会以对数速度增加。将 τ 代入 (2) 的第一个方程, 可以得到沿 O 附近的轨迹经过的局部映射 $T_0: \Pi_1^+ \rightarrow \Pi_2$:

$$x_1 = x_0 \begin{pmatrix} z(0) \\ d \end{pmatrix}^{\nu} \cos \frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{d}{z_0}, y_1 = x_0 \begin{pmatrix} z(0) \\ d \end{pmatrix}^{\nu} \sin \frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{d}{z_0}. \quad (3)$$

请注意, 映射 T_0 只对 $z_0 > 0$ 定义, 因为在稳定流形 W_{loc}^s 下面的 Π_1^- 上的初始点的前向轨迹会离

开矩阵焦点，永远不会回来，除非有重新注入，例如，由于同时性或对称的第二同宿环的发生，如图7所示的情况。

我们可以从(3)中看到， Π_1 上的图像 $T_0\Pi_1^+$ 看起来像一条“蛇”，它焦点式地到达点 $M = \Gamma \cap \Pi_1$ ，(图2)。

全局图 T_1 的基本部分从 Π_2 回到 Π_1 是由其线性部分决定的。这个映射是和(1)的轨迹一起定义的，接近于远离 O 的 Γ 的远程段：

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= x_0^+ + a_{11}x + a_{12}y + \dots, \\ \bar{z}_0 &= a_{21}x + a_{22}y + \dots,\end{aligned}\tag{4}$$

因此，将其与(3)结合起来，可以得到返回的庞加莱映射 $T = T_1 \circ T_0$ ：

$$\begin{aligned}\bar{z} &= Axz^v \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{1}{z} + \theta\right) + \dots, \\ \bar{x} &= x_0^+ d^{-1} + A_1 xz^v \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{1}{z} + \theta_1\right) + \dots,\end{aligned}\tag{5}$$

这里 $A > 0, A_1 > 0, \theta$ 和 θ_1 是一些常数。

Π_1^+ 在 $T_1 \circ T_0$ 下的图像也保留了焦点形。如图2所示，它在 M^+ 周围与 W_{loc}^s 无限次相交。

让我们把上段 Π_1^+ 剥离成可数的 k 段 \sum_k 。 $T \sum_k$ 的图像是“蛇”的单个卷曲的一半。从(2)和(5)可以看出，第 k 个卷曲的顶部被估计为

$$z z_{2k}^v e^{-2\pi vk/\omega}$$

因此，当 > 1 时， \sum_k 和 $T \sum_k$ 之间没有交集，因为 \sum_k 的图像在其前像之下。相反，当 < 1 时，交集 $\sum_k \cap T \sum_k$ 是非空的，由两个相连的部分组成(图2)。从几何学上看，在每个分量中都有一个返回映射 T 的固定点。当代读者可能会注意到，这导致了拓扑学的Smale horseshoe[1963]的形成，它成为当今动态混乱的事实证明。请注意，庞加莱第一回归映射(5)的一个固定点对应于系统(1)的一个周期轨道。

4 Shilnikov 定理

定理 [L.Shilnikov, 1965]

如果鞍指数 < 1 ，即鞍值 $\sigma > 0$ ，那么在鞍-焦点的同宿环 Γ 的附近有无数个鞍周期轨道。

< 1 的条件在这里也被称为Shilnikov条件，因为在 > 1 的情况下，同宿环附近的相空间结构是微不足道的，只导致从同宿环中出现一个单一的、稳定的周期轨道。

边界情况下的分岔 $= 1$ ，其中小扰动触发了同宿簇发放(< 1)和琐碎动力学(> 1)之间的系统，在[L.Belyakov, 1973]中首次被考虑。

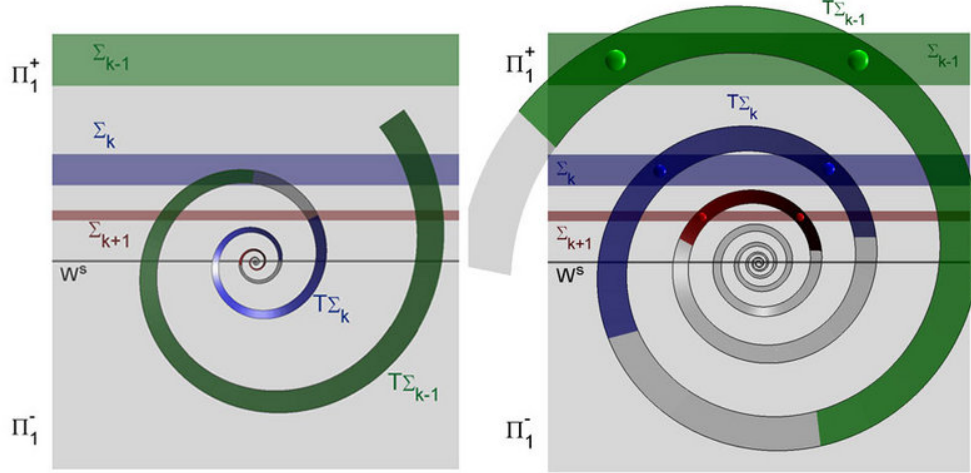


图 2: 横截面 Π_1 上的庞加莱映射在鞍值 $\sigma < 0$ (> 1) 时是一个收缩 (左), 或者在 $\sigma > 0$ (< 1) 时是一个扩展 (右), 其中非空交点 $\Sigma_k \cap T\Sigma_k$ 产生了 Smale horseshoes。

庞加莱映射 $T(5)$ 的固定点的坐标可以从下面方程中找到

$$\begin{aligned} z &= Axz^\nu \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{1}{z} + \theta\right) + \dots, \\ x &= x_0^+ d^{-1} + A_1 x z^\nu \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{1}{z} + \theta_1\right) + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

将 $x = x^+ d^1 + o(z)$ 插入 (6) 的第一个方程, 得到

$$z = A \frac{x^+}{d} z^\nu \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{1}{z} + \theta\right) + o(z). \quad (7)$$

我们从中可以看出, 当 < 1 时, 有无限多的根累积为零:

$$z^*_{k} = C e^{-\pi k \gamma / \omega} (1 + o(1)) \quad \text{as } k \rightarrow +\infty, \quad (8)$$

其中 $C = e^{(\theta \frac{\pi}{2}) \gamma / \omega}$ 。

通过研究以下一维庞加莱映射

$$z_{n+1} = \mu + Az_n \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{1}{z_n} + \theta\right) + \dots \quad (9)$$

其中 μ 是控制 $\mu = 0$ 时存在的主要同宿环的分解的分岔参数, 可以揭示具有鞍的系统的一些特性。该映射的图形如图3所示在这两种情况下。

5 鞍-焦的拓扑类型

谈到非线性动力学的应用, 我们需要通过高维系统中的主要特征指数来区分以下三种情况, 图4:

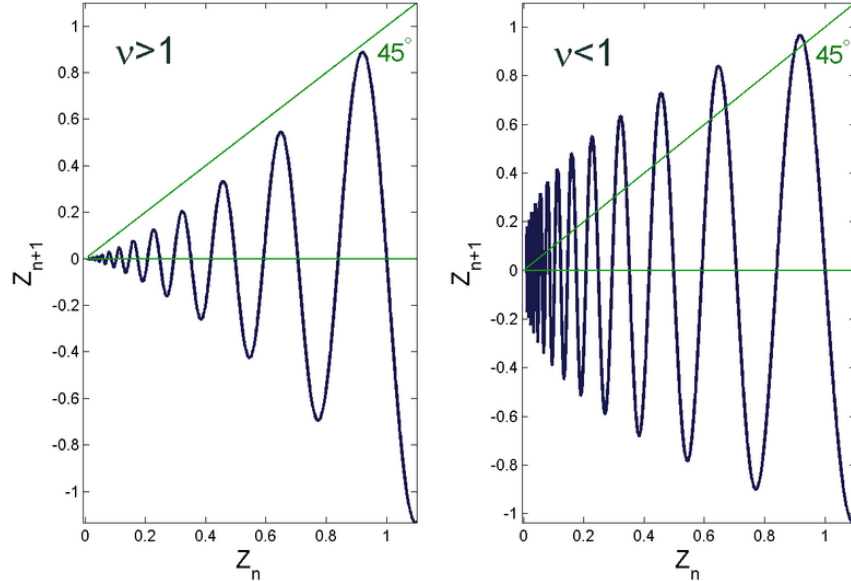


图 3: 在 $v > 1$ 和 $v < 1$ 的情况下，一维庞加莱映射 (9)。可以清楚地看到，在后一种情况下，在 $\mu = 0$ 处的主同宿环 Γ 附近有无数个固定点。随着这个参数的变化，它们会经历鞍-结点和周期加倍的分岔，而系统会产生更复杂的同宿环。

- 1. $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega, \rho > 0, \omega \neq 0, \lambda_3 = \gamma > 0$ ，这样，第一个鞍点值 $\sigma_1 = \text{Re}\lambda_{1,2} + \text{Re}\lambda_3 = \rho + \gamma > 0$ 。
- 2. $\lambda_1 = \gamma < 0, \gamma > 0, \lambda_{2,3} = \rho \pm i\omega, \rho > 0, \omega \neq 0$ ，使得 $\sigma_1 = \rho + \rho < 0$ 。
- 3. $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega_1, \rho > 0, \omega_1 \neq 1, \lambda_{3,4} = \rho \pm i\omega_2, \rho > 0, \omega_2 \neq 0$ ，使得 $\sigma_1 = \text{Re}\lambda_{1,2} + \text{Re}\lambda_{3,4} = \rho - \rho \neq 0$ 。

从图3中可以看出，控制参数 μ 的变化引起了周期加倍和鞍-结点分岔的周期性轨道，这些周期性轨道位于鞍-焦点的主要同宿环附近。那么，人们想知道：在什么条件下，系统本身和接近的系统在同宿分岔附近没有稳定的周期轨道？如果右半平面上至少有一个特征指数，那么答案默认为正。否则，在鞍的所有其他特征指数都离虚轴较远的情况下，我们需要在所有三种情况下分别引入第二个鞍值，如下所示。

- $\sigma_2 = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \gamma = 2\rho + \gamma$ 。
- $\sigma_2 = \lambda_1 + 2\text{Re}\lambda_{1,2} = \gamma + 2\rho$ 。
- $\sigma_2 = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + 2\text{Re}\lambda_{3,4} = 2\rho - \gamma \neq 0$ 。

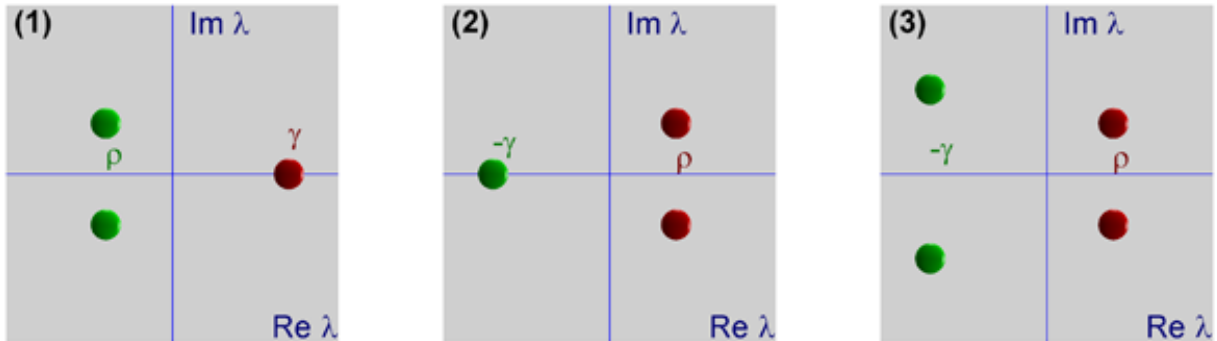


图 4: 三个鞍-焦按其主导特征指数进行分类。假设不存在其他具有正实部的特征指数。

因此, 如果 $\sigma_2 > 0$, 系统在 B^1 附近没有稳定的轨道 [Ovsyannikov and L. Shilnikov, 1987 and 1992, Glendenning and Sparrow, 1984]。相反, 当 $\sigma_2 < 0$ 时, 那么具有稳定周期轨道的系统在 B^1 上到处都是稠密的。

6 通往 Shilnikov/焦点混沌的路线

接下来让我们考虑一个导致形成焦点吸引子的分岔情况。这种情况事实上被证明是大量模型的标准型, 包括 Lorenz-84 模型 [A.Shilnikov et al.,1994], 它将在这里说明。最初, 让一个系统 X_μ 在 $\mu < \mu_1$ 时有一个稳定的平衡状态 O 。接下来 O 在 $\mu = \mu_1$ 处经历了一个超临界的 Andronov-Hopf 分岔, 因此一个稳定的周期轨道 L_μ 从 O 分岔出来。这个轨道成为 $\mu > \mu_1$ 的不稳定流形 W_{loc}^u 的边界, 该流形螺旋地进入 L_μ , 图6(A)。假设随着 μ 的进一步增加, L_μ 的乘数向外穿过一个单位圆。然后, 周期性轨道变得不稳定, 被 $\mu > \mu_2$ 的新生稳定二维环所包围。鞍焦点的不稳定流形现在焦点上升到环形上, 从而增加了涡流的大小(图6(B))。接下来, 让 W^u 触及 W^s : 这形成了上述的同宿环 Γ 的鞍焦点(第二种类型(图6(C)))。之后, 吸引的涡流将包含一组复杂的结构--所谓的焦点奇异吸引子。如果第二个焦点吸引子的值为 $\sigma_2 < 0$, 那么这个焦点吸引子确实是一个准混沌吸引子 [L.Shilnikov, 1981], 因为它本身或近似系统中的一个可能在其中有稳定的周期轨道。然而, 如果 $\sigma_2 > 0$, 那么涡流中的轨迹行为是超混沌的。焦点吸引子的开始可以在二维环形体的破裂之前, 或者在周期加倍的级联中进行。

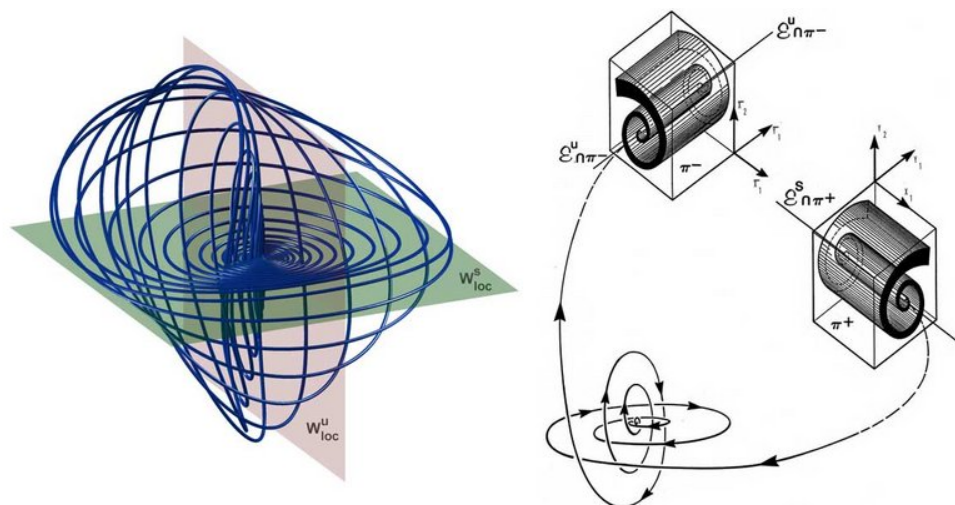


图 5: (左) 第三类或双焦点的鞍焦同宿。(右图) 相应的庞加莱映射的几何形状 (来自 L.Shilnikov et al.,1998)。

例如, 涉及周期翻倍级联的第二种情况在 *Rssler* 系统 [Rssler, 1976] 中成立

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz,\end{aligned}$$

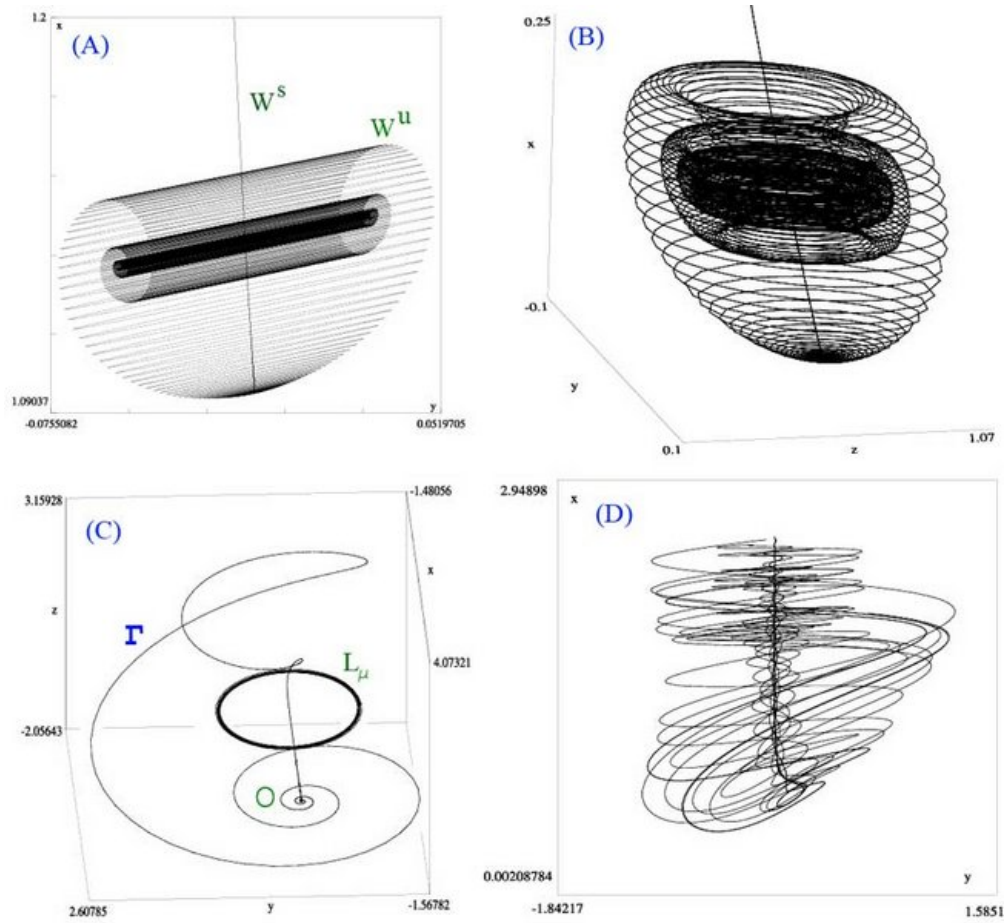


图 6: Lorenz-84 模型中焦点吸引子的形成阶段 (来自 A.Shilnikov et al.,1995)。

第一个问题涉及二维环面的击穿, 在 Anisichenko-Astakhov 电子发生器 [Anisichenko and Astakhov, 1983] 中得到了很好的研究

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + y - xz, \\ \dot{y} &= -x + y, \\ \dot{z} &= -bx + xH(x),\end{aligned}$$

其中 $H(x)$ 是 Heaviside 函数。

由焦点形吸引子产生的波具有明显的形状, (图7)。它有静止期, 当相位点靠近鞍焦点时, 接着是振荡活动的簇发放。焦点吸引子的这一特征使得 Shilnikov 分岔不仅在数值研究中, 而且在实验研究中都可以清楚地识别, 包括非线性激光光学、各种电子电路、经济学、生物学、流体力学流和其他许多领域, 可以谷歌这种分岔。

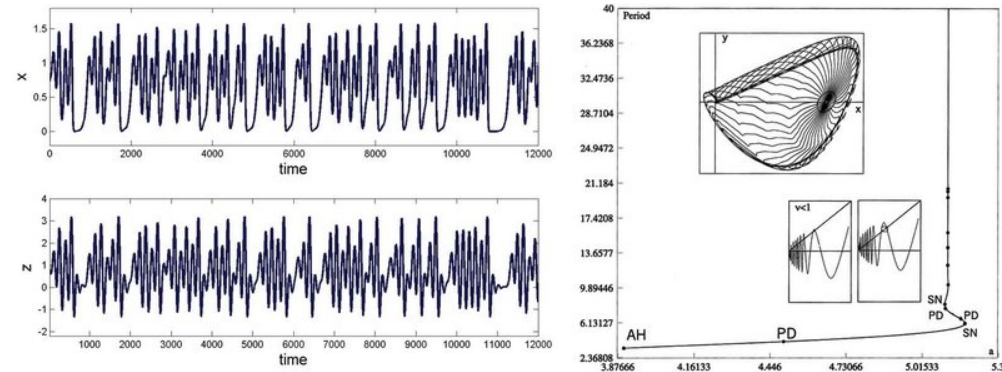


图 7: (左) 由图7中的焦点吸引子产生的簇发放。(右图) 周期性轨道的周期依赖性, 因为它成为具有立方非线性的 Chua 回路中的同宿环 (来自 L.Shilnikov et al.,2001)。

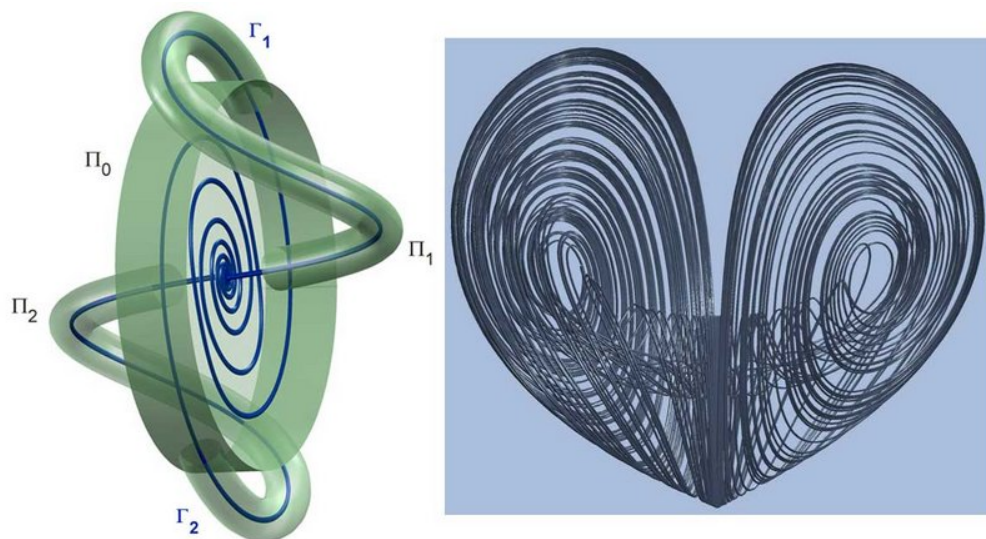


图 8: (左图) 一个吸收域为 102 的系统, 包含 R^4 中鞍焦的两个同宿环, 可能产生一个野生的伪双曲吸引子 (右图)。

7 野生焦点吸引子

最后, 我们描述了一个构造 [L.Shilnikov 和 D.Turaev, 1998] 允许在 $4D+$ 相空间中出现一个野生的伪双曲奇异吸引子。构造的中心是具有两个对称或瞬时的同宿环 Γ_1 和 Γ_2 (图8)。让鞍焦具有领先的特征指数 $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega, \lambda_3 = \gamma > 0$, 所有其他的鞍焦都在复平面内从 $\lambda_{1,2}$ 的左边开始。我们要求:

- (A) 这两个鞍点值都是正的

$$\sigma_1 = -\rho + \gamma > 0,$$

$$\sigma_2 = 2\rho + \gamma > 0$$

- (B) 有一个吸收域 D 包含 $\Gamma_1 \cup O \cup \Gamma_2$ (图8);
- (C) 伪双曲性条件在 D 中成立。

最后一个属性的本质是, 庞加莱映射应拥有一个不变的对开区。在对叶子进行因子化之后, 我们可以创建一个因子映射, 扩大相量。这意味着在域 D 中不可能存在系统本身或接近系统的稳定轨道。在 Newhouse[Newhouse, 1974] 的意义上, 这样的吸引子也是野生的, 因为其中的周期性轨道有各种同宿切线。这个链式过渡吸引子的分形维数超过 3。

参考文献

- Shilnikov L. P. [1965] A case of the existence of a denumerable set of periodic motions, Sov. Math. Dokl. 6, 163-166.
- Shilnikov L. P. [1967] The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus, Soviet Math. Dokl. 8(1), 54-58.
- Shilnikov L. P. [1970] A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type, Math. USSR Sbornik 10, 91-102.
- Smale S. [1963] Diffeomorphisms with many periodic points, in Diff. Combin. Topology, ed. S. Cairus (Princeton University Press: Princeton), 63-86.
- Shilnikov L.P. [1981] The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors. Uspehi Mat. Nauk, 36, 240-241.
- Belyakov L. A. [1974] Bifurcation of systems with homoclinic curve of a saddle-focus with saddle quantity zero, Math. Zametki 36, 838-843.
- Ovsyannikov I. M. and Shilnikov, L. P. [1987] On systems with a saddle-focus homoclinic curve, Math. USSR Sb. 58, 557-574.
- Ovsyannikov I. M. and Shilnikov, L. P. [1992] Systems with a homoclinic curve of multi-dimensional saddle-focus type, and spiral chaos, Math. USSR Sb. 73, 415-443.
- Shilnikov L.P., Shilnikov A., Turaev D. and Chua, L. [1998] Methods of Qualitative Theory in

Nonlinear Dynamics. Part I. World Scientific.

- Shilnikov L.P., Shilnikov A., Turaev D. and Chua, L. [2001] *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II.* World Scientific.
- Shilnikov A. L., Nicolis, G. and Nicolis, C. [1995] Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model, *Int. J. Bif. Chaos* 5(6), 1701–1711.
- Glendenning P. and Sparrow, C. [1984] Local and global behavior near homoclinic orbits, *J. Stat. Phys.* 35, 645–696.
- Rössler O. [1976] Different types of chaos in two simple differential equations, *Zeitschrift fur Naturforsch A* 31, 1664–1670.
- Anisichenko V.S. and Astakhov V.V. [1983] Bifurcations in an auto-stochastic generator with regular external excitation, *Sov. Phys.-Thch. Phys.* 28(10), 1326–1329
- Turaev D. V. and Shilnikov, L. P. [1998] An example of a wild strange attractor, *Sbornik. Math.* 189(2), 291–314.
- Newhouse S. [1974] Diffeomorphisms with infinitely many sinks, *Topology*, 13, 9–18.

内部参考文献

- Yuri A. Kuznetsov (2006) [Andronov-Hopf bifurcation](#). *Scholarpedia*, 1(10):1858.
-
- John W. Milnor (2006) [Attractor](#). *Scholarpedia*, 1(11):1815.
- John Guckenheimer (2007) [Bifurcation](#). *Scholarpedia*, 2(6):1517.
- Eugene M. Izhikevich (2006) [Bursting](#). *Scholarpedia*, 1(3):1300.
- James Meiss (2007) [Dynamical systems](#). *Scholarpedia*, 2(2):1629.
- Eugene M. Izhikevich (2007) [Equilibrium](#). *Scholarpedia*, 2(10):2014.
- Jeff Moehlis, Kresimir Josic, Eric T. Shea-Brown (2006) [Periodic orbit](#). *Scholarpedia*, 1(7):1358.
- Yuri A. Kuznetsov (2006) [Saddle-node bifurcation](#). *Scholarpedia*, 1(10):1859.
- Steve Smale and Michael Shub (2007) [Smale horseshoe](#). *Scholarpedia*, 2(11):3012.
- Philip Holmes and Eric T. Shea-Brown (2006) [Stability](#). *Scholarpedia*, 1(10):1838.

其他链接

- [A. Shilnikov 网站](#)

也可参考

[Bifurcation](#), [Chaos](#), [Dynamical Systems](#), [Equilibrium](#), [Homoclinic Bifurcations](#), [Homoclinic Orbits](#), [Iterative Mappings](#), [Smale Horseshoe](#)