

神经元兴奋性和奇异分岔

Peter De Maesschalck¹ and Martin Wechselberger²

¹Hasselt University, Agoralaan gebouw D, 3590 Diepenbeek, Belgium

²School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, F07, NSW 2006 Sydney, Australia

Received 2 May 2015; accepted 23 July 2015; published online: 06 August 2015

Abstract

我们从几何奇异摄动理论的角度讨论了二维慢/快神经元模型中兴奋性的概念。我们关注慢/快神经元模型固有的奇异性质,并通过奇异分岔来定义兴奋性。特别地,我们证明了 I 型兴奋性与一个新的奇异 Bogdanov–Takens/SNIC 分岔有关,而 II 型兴奋性与一个奇异的 Andronov–Hopf 分岔有关。在这两种情况下,鸭解在理解这些奇异分岔结构的展开中都起着重要的作用。我们还解释了两种兴奋性类型之间的转换,并强调了所有涉及的分岔,从而提供了一个基于几何奇异摄动理论的兴奋性的完整分析。

关键词: 分岔理论; 鸭解; 兴奋性; 几何奇异摄动理论; 神经元动力学

1 可兴奋系统

大多数神经元是可兴奋的,也就是说,它们通常是静息的,但在接收到一定刺激下可以产生动作电位或产生放电模式。等效刺激可以在不同神经元中引起不同的尖峰放电模式,这一事实表明,不同神经元的内在编码特性存在显著差异。

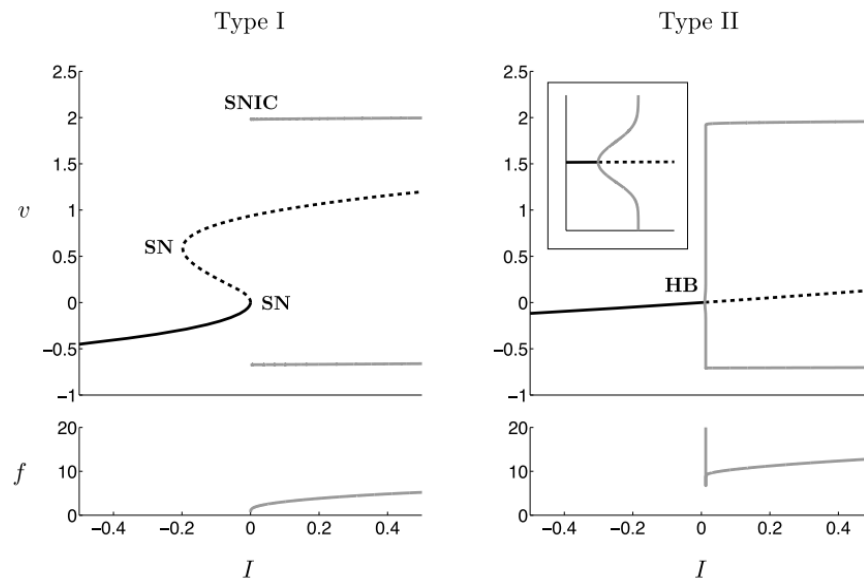


Figure 1: 典型模型 (1) 的分岔图和“频率-电流”(f-I)图: (I型) $c = 0.005$; $I = I_{\text{bif}} = 0$ 附近的 SNIC 分岔, 频率趋于零; (II型) $c = 4$; $I = I_{\text{bif}} = 0$ 附近的超临界奇异 Andronov-Hopf 分岔; 随后的鸭解爆炸清晰可见; 注意弛豫振荡分支的小频带。

20 世纪 40 年代, Hodgkin[1] 给出了神经元计算特性问题的第一个答案, 他确定了三种基本类型 (类别) 的可兴奋轴突, 通过它们对不同振幅电流注入步骤的不同反应来区分。I 型 (I 类) 轴突能够整合注入电流的输入强度, 即相应的频率-电流 (f-I) 曲线是连续的 (见图 1)。II 型 (II 类) 轴突有一个不连续的 f-I 曲线, 因为它们在一定频率以下时不能保持持续放电。II 型神经元的频带非常有限, 因此其频率对注入电流的强度相对不敏感。似乎 II 型神经元与一个特定的频率输入产生共振。III 型 (III 类) 轴突在注入电流时只触发单个或几个动作电位, 但不能触发像 I 型和 II 型神经元这样的重复动作电位。III 型神经元能够分化, 也就是说, 它们能够编码刺激中“变化”的发生。这种阶段性放电 (相对于单一或重复放电) 将这些 III 型神经元定义为斜率检测器 [2]。显然, III 型神经元的 f-I 曲线并没有定义。

从 20 世纪 80 年代开始, Rinzel 和 Ermentrout[3, 4] 开创了一个基于分岔理论的数学框架, 区分了 I 型和 II 型神经元模型。回想一下, 如果 I 型和 II 型神经元的去极化足够强, 它们就能够触发动作电位序列 (强直性放电), 这将它们与 III 型神经元区分开来。这一区别指向了 I 型和 II 型神经元的从可兴奋状态转变为振荡状态一个分岔。主要分岔参数为 I , 电流步长的幅度, 在施加电流 I [4] 的变化下, 通过分岔分析得到以下兴奋性的经典定义:

- Type I: 稳定平衡 (静息状态) 通过不变环 (SNIC) 的鞍结分岔消失。
- Type II: 稳定平衡 (静息状态) 通过 Andronov-Hopf 分岔 (HB) 失去稳定性, 亚临界或超临界。

请注意, 在 III 型模型中没有发生分岔, 即平衡 (静息状态) 保持稳定。对于这三种不同兴奋类型的可能的生物学解释, 我们参考 [5, 6]。

一个捕捉神经元兴奋性主要特征的典型模型是:

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon g(w, v) = \varepsilon(G(v) - w), \\ v' &= f(w, v, I) = v^2(d - v) - w + I, \end{aligned} \quad (1)$$

和

$$G(v) = \begin{cases} cv, & v \leq v_{\text{th}}, \\ cv + e(v - v_{\text{th}})^2, & v > v_{\text{th}}, \end{cases} \quad (2)$$

一个充分光滑的 (这里 C^1) 函数, 阈值参数为 v_{th} , 参数 $0 < \varepsilon \ll 1, d, e > 0$ 对于 $c \in [0, c_1]$ 满足 $\frac{d}{3} < e < d^3$. 参数 $I \in [I_0, I_1] \subset \mathbf{R}$ 是主要的分岔参数, 通常与真实神经元中的注入电流有关。在这个典型模型中, 我们能够识别所有三种兴奋性类型。图 1 显示了 I 型和 II 型兴奋性的分岔图和频率-电流图, 其中参数 $v_{\text{th}} = 0.15, \varepsilon = 10^{-2}, d = 2, e = 1.5$ 为固定值, (I, c) 为变化的。

备注 1 在典型模型 (1) 中, $G(v)$ 的非线性性质对于 I 型神经元中观察到的松弛类型行为至关重要, 这将该多项式模型与经典的 FitzHugh-Nagumo 模型 [7, 8] 区分开, 后者只能产生 II 型 (和 III 型) 行为。在更受生物物理启发的二维系统中, Morris-Lecar 模型 [9] 提供了一个典型的例子, 它能够产生所有三种兴奋性类型; 参见 [4, 5, 6, 10]。

1.1 慢-快可兴奋系统

大多数神经网络的一个重要特征是它们在多个时间尺度上进化; 参见 [11]。正是不同时间尺度上的动力学相互作用创造了复杂的节律。多个 (或慢-快) 时间尺度问题通常由奇异摄动系统建模, 如 (1), 其中“快”变量 v (电压) 和“慢”变量 w (恢复变量) 的时间尺度分离通过奇异摄动参数 $\varepsilon \ll 1$ 定义。人们对这种慢-快系统的兴趣倾向于所谓的松弛振荡的存在。沿松弛振荡的轨道, 相位变量的速度较小的部分 (慢部分) 在短时间段内与高速峰值交替 (快速部分)。在慢部分, 相位状态 $O(\varepsilon)$ 接近临界集合 $f(w, v, I) = 0$ (因为 $\|(w', v')\| = O(\varepsilon)$), 而在快速阶段, 相位状态与这个临界集合有 $O(1)$ 的距离。在 (1) 中观察到的强直放电完全是弛豫型的。

我们想强调在许多神经元模型中发现的这种固有的慢-快时间尺度结构, 并使用几何奇异摄动理论 (GSPT) [12, 13] 作为数学框架。在这种方法中, 我们关注一类二维奇异摄动模型如下

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon g(w, v, \varepsilon, \lambda), \\ v' &= f(w, v, \varepsilon, I), \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $I \in [I_0, I_1] \subset \mathbf{R}$ 是可兴奋系统的外界驱动, 符号 $\dot{}$ 表示时间导数 d/dt , $\varepsilon \ll 1$ 是一个小的正参数, 编码了慢变量和快变量之间的时间尺度分离. 参数 λ 在区间 $[\lambda_0, \lambda_1]$ 中, 将与 I 一起作为分岔参数. 假设函数 f 和 g 足够光滑, 我们强调 f 独立于 λ 和 g 独立于 I 并不重要, 尽管他们确实简化了表示.

通过将快时间尺度 t 转化到慢时间尺度 $\tau = \varepsilon t$, 系统 (3) 转换为

$$\begin{aligned}\dot{w} &= g(w, v, \varepsilon, \lambda), \\ \varepsilon \dot{v} &= f(w, v, \varepsilon, I),\end{aligned}\tag{4}$$

其中, 上方的点表示 (慢) 时间导数 $d/d\tau$. 当 $\varepsilon \rightarrow 0$, (3) 的轨迹在快阶段中收敛到如下一维层 (或快) 问题的解

$$\begin{aligned}w' &= 0, \\ v' &= f(w, v, 0, I),\end{aligned}\tag{5}$$

在慢阶段中, (4) 的轨迹收敛到如下系统的解

$$\begin{aligned}\dot{w} &= g(w, v, 0), \\ 0 &= f(w, v, 0, I),\end{aligned}\tag{6}$$

这是一个一维微分代数问题, 称为简化 (或慢) 问题. 注意以下临界集

$$S := \{(w, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid f(w, v, 0, I) = 0\}\tag{7}$$

是 (5) 的平衡点的集合. 一般来说, 这个集合 S 定义了一个微分流形, 称为临界流形, 它形成了问题 (6) 的相空间. GSPT[12, 13, 14, 15] 使用这些较低维的一维子系统 (5) 和 (6) 来预测 $\varepsilon > 0$ 时全二维系统 (3) 和 (4) 的动力学行为. 在第二节中, 我们提供了在 GSPT 的背景下, 涵盖了所有三种兴奋性类型的一类二维系统的一般形式.

虽然这种解释神经系统中松弛行为的 GSPT 方法在数学和计算神经科学界众所周知, 例如 [5, 11], 它并不经常被用来解释这种奇异扰动系统的潜在分岔结构, 这是第 3-6 节的重点, 我们研究了奇异分岔及其在 3.1 节中引入的正规形式的展开.

仔细观察图 1 中 II 型兴奋性的分岔图, 可以发现在 Andronov-Hopf 分岔后不久, 分岔极限环的振幅在一个非常小的 (指数小的) 参数变化下急剧爆炸. 这被称为鸭解爆炸 [14, 15], 表明神经元模型的奇异扰动性质也反映在分岔结构中. 注意在这个奇异的 Andronov-Hopf 分岔附近也有类似的频率变化. 我们将在第 4 节中回顾这种 (众所周知的) 分岔现象.

我们需要额外的分岔结构来解释从 II 型到 I 型兴奋性的转变, 这在第 5 节中涵盖了. 我们发现了不完全鸭解爆炸. 这种不太为人所知的现象指的是在同宿分岔中鸭解爆炸的过早终止.

类似于奇异的 Andronov-Hopf 分岔, 我们期望图 1 中所示的与 I 型兴奋性相关的 SNIC 分岔必须具有奇异的性质. 我们确定了一个奇异的 Bogdanov-Takens/SNIC 分岔点作为 I 型兴奋性的组织中心. 这种 I 型奇异分岔结构的展开是第 6 部分的重点. 基于爆破方法, 一种去奇异技巧, 成功地运用于具有正常双曲性损失 [14, 15, 16] 的几何奇异摄动问题.

最后, 我们在第 7 节中总结了我们的结果, 并讨论了它对慢-快神经模型中可能的数值观察的影响.

2 慢-快可兴奋系统的建立

我们首先分别引入了奇异摄动系统 (3) 和 (4) 的基本假设.

假设 1 对每个 $I \in [I_0, I_1]$, 临界流形 S 是一个立方体形状, 是关于 $\{w = \varphi_I(v)\}$ 的图.

$$S = S_a^- \cup F^- \cup S_r \cup F^+ \cup S_a^+,$$

吸引的外部分支 S_a^\pm , 排斥的中间分支 S_r , 折点 F^\pm . 我们还假设包含两个局部折点的垂直纤维, 分别在 p 和 q 处与临界流形相交一次; 见图 2. 假设这两个折点是图 $w = \varphi_I(v)$ 的极值点.

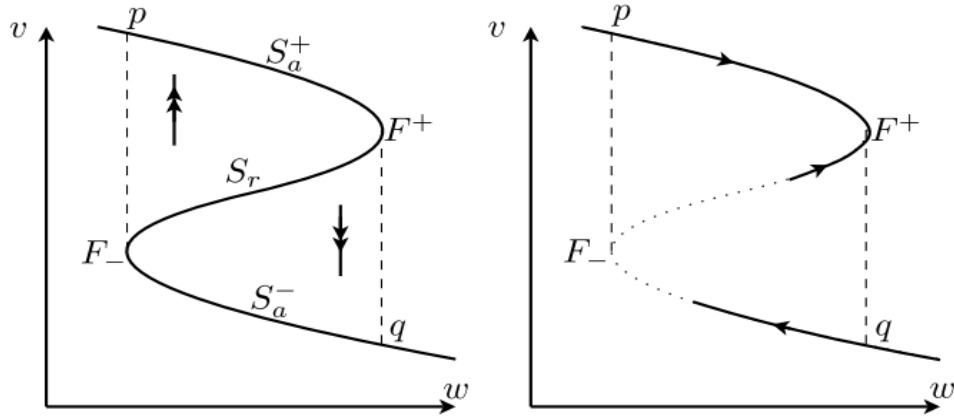


Figure 2: 临界流形的几个分支，中间有折点 F^\pm 。右图：立方体上的缓慢动力学。零斜线 $\dot{w} = 0$ 可以沿该立方体的虚点部分与立方相交一次或多次

将 S 表示成图 $\{w = \varphi_I(v)\}$ 必然意味着对所有的 $(w, v) \in S$ 有 $\partial f / \partial v \neq 0$ 。分支 S_a^\pm 和 S_r 的稳定性条件将他们定义为法向双曲；见图 2（左），这是指 S 作为层问题 (5) 的平衡点的稳定性性质，可以表示如下

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial v}(w, v, 0, I) < 0 & \text{for } (w, v) \in S_a^\pm \\ \frac{\partial f}{\partial v}(w, v, 0, I) > 0 & \text{for } (w, v) \in S_r \end{cases}$$

S 的两个局部极值点被标记为 $(w^\pm, v^\pm) = (\varphi_I(v^\pm), v^\pm)$ ，被称作折点 F^\pm ；他们对应于层问题 (5) 的鞍结分岔点，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial v}(w^+, v^+, 0, I) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(w^+, v^+, 0, I) < 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(w^-, v^-, 0, I) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(w^-, v^-, 0, I) > 0. \quad (9)$$

图 2 可以看作是主要分岔参数 w 的层问题 (5) 对应的分岔图。如果我们想拼凑图 2 中所示的几何形状，那么我们需要并且将会假设

$$\frac{\partial f}{\partial w} < 0, \quad (w, v) \in S. \quad (10)$$

假设 2 对每个 $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ ，系统 (4) 的 w -零斜线 $g(w, v, 0, \lambda) = 0$ 始终满足：

$$\frac{\partial g}{\partial w} \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial w} \leq 0$$

这个假设意味着 w -零斜线是图 $\{w = \psi_\lambda(v)\}$ ，以及 ψ_λ 是一个单调递增的函数。虽然在数学上不是必要的，但这反映了一个典型的神经元模型的性质， $g = 0$ 是由关于 v 的 sigmoidal 函数给出。

假设 3 对所有的 $(I, \lambda) \in [I_0, I_1] \times [\lambda_0, \lambda_1]$ ，系统 (4) 可以有一个，两个，三个平衡点在 $w = \varphi_I(v)$ 上，他们都位于 S_r 或 S_a^- 上；见图 3，平衡点的数量和他们确切的位置取决于 (I, λ) 。

该假设与假设 1 和假设 2 中定义的两个零斜线 $f = 0$ 和 $g = 0$ 的几何性质，表明了 $(I, \lambda) \in [I_0, I_1] \times [\lambda_0, \lambda_1]$ 时所具有的如下性质；见图 3：

- 在较低的吸引分支 S_a^- 上不可能有超过一个平衡点；
- 恰好两个平衡点的存在表明在 S_r 或 F^- 上存在鞍-结分岔。

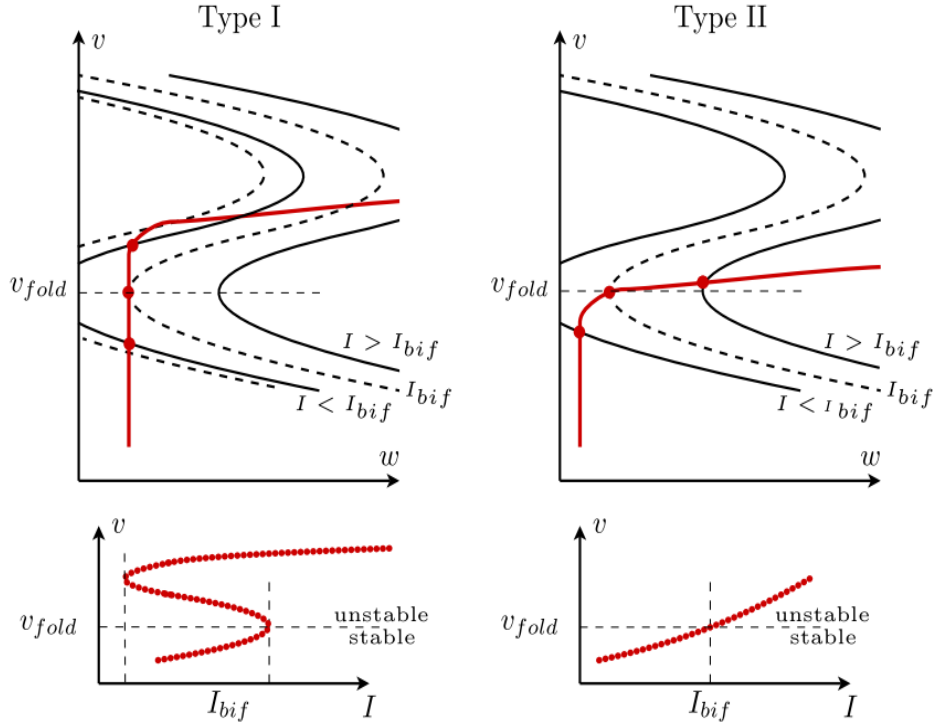


Figure 3: 神经元模型 (1): 在 I 变化下的零斜线, 导致 I_{bif} 的 (奇异极限) 定义: ((类型 I) 鞍结点分岔点处的 $I = I_{bif}$; (类型 II) 奇异的 Andronov-Hopf 点处的 $I = I_{bif}$ 。在从 II 型到 I 型的转变过程中, 出现了一个 cusp 分叉, 这可以从图中底部的图片来预测

备注 2 假设 3 构造了从可兴奋状态到振荡状态的情况。通过限制上述参数空间, 它排除了从振荡状态过渡到 (另一个) 稳态 (在神经科学中称为去极化块) 的可能性。这不是必要的, 但使得我们聚焦在振荡的开始状态, 而不是终止状态。

接下来我们来看看简化问题 (6)。临界流形 S 的一维动力学投影到他的基坐标 V 有

$$-\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi_I(v), v, 0, I) \dot{v} = \frac{\partial f}{\partial w}(\varphi_I(v), v, 0, I) g(\varphi_I(v), v, 0, \lambda). \quad (11)$$

一般来说, 系统 (11) 定义了沿着临界流形的双曲分支的简化动力学, 在折点 F^\pm 外部 (11) 是奇异的. 假设 3 意味着在上分支 S_a^+ 有 $g(\varphi_I(v), v, 0, \lambda) \neq 0$.

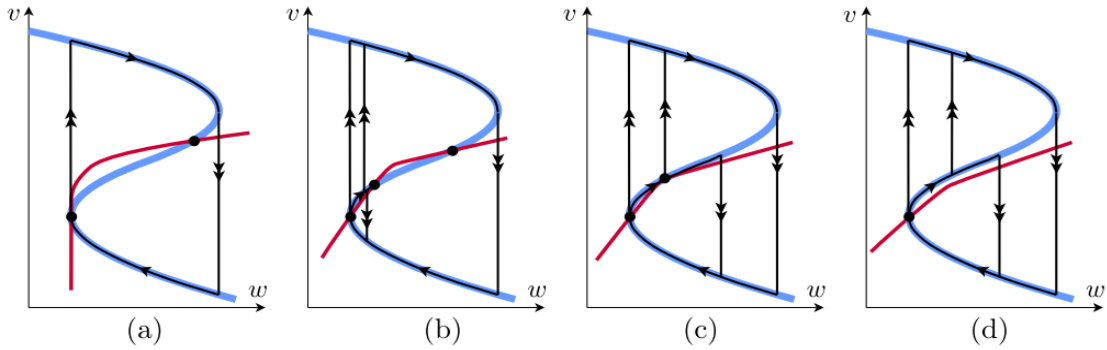


Figure 4: 系统 (1) 中下折点 F^- 处的奇异极限分岔及其奇异极限轨道 ($v_{th} > 0, I = I_{bif} = 0$)。 (a) (I 型) 奇异鞍结点同宿 (SNIC) ($c = 0$) 和奇异 Bogdanov-Takens 分岔 (奇异 BT/SNIC); (b) 具有不完全鸭解环的 Andronov-Hopf 分叉 ($(0 < c < c_{sn})$); (c) 不完全鸭解环和鸭解类型的奇异鞍结同宿 ($(c = c_{sn})$); (d) (II 型) 奇异 Andronov-Hopf 分岔和 (完全) 鸭解族 ($(c > c_{sn})$)

假设 4 对所有的 $(I, \lambda) \in [I_0, I_1] \times [\lambda_0, \lambda_1]$, 折点 $F^+ = (w^+, v^+)$ 是一个规则跳跃点。更准确地说, 我们施加

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(w^+, v^+, 0, I) \cdot \frac{\partial f}{\partial w}(w^+, v^+, 0, I) > 0, \quad g(w^+, v^+, 0, \lambda) > 0. \quad (12)$$

(12) 的第一个条件相当于施加了条件 $\varphi'_I(v) = 0, \varphi''_I(v) < 0$; 换句话说, 折点 F^+ 是 φ_I 的局部最大值。与第二个条件一起, 这决定了 F^+ 附近递减的流的方向, 并将这个点作为一个跳跃点: 所有沿着上分支 S_a^+ 进入的轨道都从 F^+ 跳下来, 并沿着快纤维向 q 移动; 见图 2 (右)。注意, 在改变参数的情况下, S_r 上的平衡点都不能接近折点 F^+ (参见备注 2)。

另一方面, 来自 S_a^- 的平衡可能在 F^- 处交叉或分岔, 这对于观察从可兴奋性到振荡状态的分岔是必要的。假设 3 和 4 表明, S_a^- 上的递减流要么朝向 S_a^- 上的平衡点, 要么朝向较低的折点 F^- (见图 2 (右) 和图 4), 这是可兴奋/振荡系统的另一个基本特征。

这些基本假设适用于许多二维神经元模型, 包括典型系统 (1)。该模型有一个立方形的临界流形 S (假设 1)。函数 $G(v)$ 是单调递增的 (假设 2)。正是由假设 3 所施加的 G 的非线性性质, 使我们能够探索不同数量的平衡点的情况 (仅限于 S_a^- 和 S_r)。如果 $0 < I_1 < I_{F^+}$ 和 $v_{th} < v^+$, 这里 I_{F^+} 由 $\varphi_{I_{F^+}}(v^+) = G(v^+)$ 隐式定义, 那么假设 3 和假设 4 就能满足, 且 F^+ 在所有的 $I \in [I_0, I_1]$ 和 $c \in [0, c_1]$ 上是一个常规跳跃点。

3 奇异 (或慢-快) 分岔

我们的主要任务是基于奇异观测来识别奇异摄动系统 (4) 中的分岔结构, 即对于 $\varepsilon = 0$ 。对于 (1) 我们有 $F^- = (\varphi_I(v^-), v^-) = (I, 0)$ 。在这个折点, 当 $I = I_{bif} = G(0)$ 时, $G(v) - w = G(0) - I$ 为零:

$$I_{bif} = \begin{cases} 0, & v_{th} \geq 0, \\ \varepsilon v_{th}^2, & v_{th} < 0. \end{cases} \quad (13)$$

当 $I < I_{bif}$, 在稳定的分支 S_a^- 上有一个奇点, 在中间分支上可能有额外的奇点, 在 $I > I_{bif}$ 时, 在 S_a^- 上没有奇点。因此, 从可兴奋性状态到振荡状态的转变发生在 $I \sim I_{bif}$ 附近。我们将通过在低折点 F^- 附近的不同行为来区分不同的兴奋性类型。

备注 3 系统 (1) 模拟了当 I_{bif} 位于区间 $[I_0, I_1]$ 之外, 即 $I_{bif} > I_1$ 时的 III 类兴奋性。一般来说, III 型兴奋性可以通过 I_{bif} 处于区间 $[I_0, I_1]$ 外部的特性来表征。

3.1 奇异折点附近的规范形式

在典型模型 (1) 中, 假设它不是 III 型的, 折点 F^- 在由 (13) 定义的 $I = I_{bif}$ 时是一个奇异折点。我们可以利用 $w = x/d + I$ 和 $v = y/d$ 进行简单的坐标变换来重写系统为以下的形式

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon(dG(y/d) - x - dI), \\ y' &= y^2 - x - y^3/d^2, \end{aligned}$$

对于 $v \leq v_{th}$ 时简化到以下形式

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon(cy - x - a), \\ y' &= y^2 - x - y^3/d^2, \end{aligned} \quad (14)$$

这里 $a = dI$ 。注意, 当 $v > v_{th}$, 一个额外的项 $\varepsilon \frac{c}{d} (y - dv_{th})^2$ 在 x' 的方程中出现。

虽然一般情况下需要做更多的工作, 但系统 (3) 在奇异折点 F^- 规范形式显示出与典型模型的规范形式 (14) 之间具有相似性。下面的命题描述了在折点 F^- 附近向量场 (3) 的局部形状。

命题 1 在假设 1-3 和 (10) 下, 向量场 (3) 族在 F^- 附近可以被局部转化为以下规范形式:

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon (cy - \sigma x - a + O(x^2, y^3, xy, \varepsilon y^2)), \\ y' &= y^2 - x + \beta y^3 + O(y^4), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\sigma = \pm 1, \sigma c \geq 0$ 且 $\beta \neq 0$. 系数 a, c 和 β 可以用 $(I, \lambda, \varepsilon)$ 显示计算.

证明 从系统 (3) 开始, 在假设 1 and (10) 下, 我们从隐函数定理中可知 v -零斜线 $f(w, v, 0, I) = 0$ 就是图 $w = \varphi_I(v)$, 通过同样的观点, 沃恩可以将 $f(w, v, \varepsilon, I)$ 计算为 $(\tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}(v) - w) \cdot \tilde{f}$, 其中 $\tilde{f}(w, v, \varepsilon, I)$ 是严格正的函数, 以及 $\tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}(v) = \varphi_I(v) + O(\varepsilon)$. 通过将向量场除以 \tilde{f} (即重新缩放时间), 我们得到了 (拓扑) 等效的向量场

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon \tilde{g}(w, v, \varepsilon, \lambda, I), \\ v' &= \tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}(v) - w. \end{aligned}$$

读者可以验证假设 1-3 在这个步骤后保持不变, 由于 $\varphi_I''(v) > 0$ 因此 $\tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}''(v) > 0$, 我们可以使用隐函数定理来找一个 I -依赖点 $v = v_*(I, \varepsilon)$, ε -接近于 $\varphi_I(v)$ 来求解 $\tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}'(v) = 0$. 使用 $v - v_*$ 替代 v , $w - \tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}(v_*)$ 替代 w 允许我们在剩余部分假设 $\tilde{\varphi}_{I,\varepsilon}(v)$ 的折点位于原点. 在这个变换之后, 满足 $v' = B_0(\varepsilon)v^2 - w + O(v^3)$ 对一些 $B_0(\varepsilon) > 0$. 我们得到了

$$\begin{aligned} w' &= \varepsilon (A_0 + A_1v + A_2v^2 + A_3w + O(\varepsilon, w^2, v^3, wv)), \\ v' &= B_0(\varepsilon)v^2 - w + O(v^3), \end{aligned}$$

其中, 系数 A_k 和 B_0 依赖于 (I, λ) , 现在我们对于选择好的 (P, Q, Z, R) 可以写 $(w, v) = (Zx + \varepsilon Py + \varepsilon^2 Q, v = Zy + \varepsilon R)$, 在计算机程序的帮助下, 很容易验证我们可以根据 R 来选择 (P, Q, Z) 以确保 $y' = y^2 - x + O(y^3)$. 一旦我们得到了这个, 不难看出可以通过这种方式选择 R 使得我们得到

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon (C_0 + C_1y + C_2x + O(\varepsilon, x^2, y^3, xy)), \\ y' &= y^2 - x + B_1y^3 + O(y^4). \end{aligned}$$

换句话说, x' 中 y^2 这一项的系数消失了. x' 中的项 $O(\varepsilon)$ 是 $\nu_1(\varepsilon), \nu_1(\varepsilon)x, \nu_2(\varepsilon)y, \nu_3(\varepsilon)y^2$ 这几项的形式, 他不是 $O(x^2, y^3, xy)$ 的一部分, 前三项可以与主要项 $C_0 + C_1y + C_2x$ 放在一起, 允许 C_i 依赖于 ε , 它表明剩下的项为 $O(x^2, y^3, xy, \varepsilon y^2)$. (x, y, t) 的线性缩放允许进一步缩减到 $C_2 = \pm 1$ 的情况. 约束 $C_0C_2 \geq 0$ 来自假设 2-3.

备注 4 对于系统 (14), 规范形式的系数由以下条件给出: $c \geq 0$ 和

$$a = dI, \quad \beta = -1/d^2, \quad \sigma = 1, \quad (16)$$

至少当 $v_{\text{th}} > 0$ 时. 而当 $v_{\text{th}} < 0$ 时, 参数 a 和 c 被依赖于 v_{th} 的额外项 (我们在这里不会给出细节) 转换. 系数 a 中的额外项将会使得 $I = I_{\text{bif}} = ev_{\text{th}}^2$ 时 $a = 0$. 规范形式中的参数 c 依赖于 v_{th} 可以用于局部区分出图 3 中的不同情形. 因此, 将规范形式的系数 (a, c) 作为主要分岔参数是有意义的.

在系统 (15) 中, 对于 $a < 0$, 在下稳定分支 S_a^- 上存在一个稳定平衡点; 而对于 $a > 0$, 在下稳定分支 S_a^- 上没有稳定的平衡点, 而折点 F^- 是一个常规跳跃点. 因此, 在较低的折点 F^- 附近, 当 $a \sim 0$ 时发生了动力学转变, 根据 c , 我们将奇异接触点 F^- 分类如下:

- 对于 $a = 0$ 和 $c > 0$, 折点 F^- 是一个奇异 (或慢-快) Andronov-Hopf 分岔点; 详看第 4 节.
- 对于 $a = c = 0$, 折点 F^- 是一个奇异 (或慢-快) Bogdanov-Takens 分岔点; 详看第 6 节.

这两个局部奇异分岔点与两种不同的神经兴奋性类型 I 和 II 有关. 注意, Bogdanov-Takens 分岔是一个余维 2 分岔, 在其展开过程中包含一个余维 1 Andronov-Hopf 分岔. 所以, 我们也期望在 c 趋于零时找到这两个分岔之间的联系.

备注 5 虽然 III 型神经元与固定电流输入的任何分岔无关，但这些斜率检测器在识别动态变化和产生瞬态响应方面发挥着重要作用。我们详细参考了 [2] 和 [[10]，在 GSPT 的背景下讨论了 III 型神经元和兴奋性。

从图 3 中，我们可以推导出另一个（局部）余维 2 分岔的存在，一个 cusp 分岔 [17]，由两个余维 1 鞍-结点分岔合并得到。其近似位置可以很容易地在正规形式 (15) 中计算，计算中丢弃了 x 方程中的高阶项 $O(x^2, xy, y^3)$ 和 y 方程中的高阶项 $O(y^4)$ ，得到： $(a, c) = (a_{\text{cusp}} + O(\varepsilon), c_{\text{cusp}} + O(\varepsilon))$ ，其中

$$a_{\text{cusp}} := \frac{\sigma}{27\beta^2} \quad \text{and} \quad c_{\text{cusp}} := -\frac{\sigma}{3\beta}. \quad (17)$$

这表明对于固定的 $0 < c < c_{\text{cusp}}$ ，我们观察到三个平衡状态，其中两个位于 S_r 上（见假设 3）。这对我们问题的全局分岔结构造成了有趣的影响；见第 5 节。

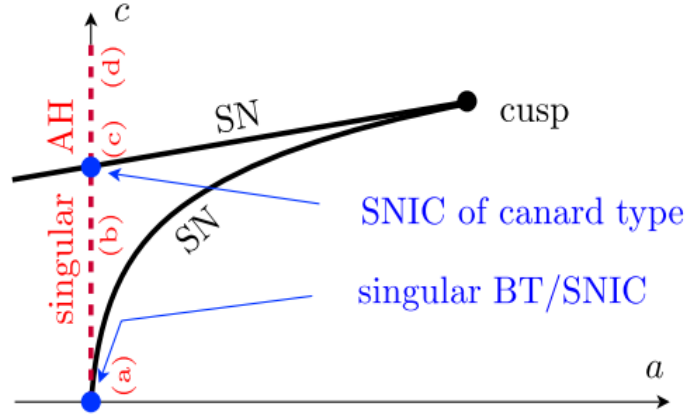


Figure 5: (a, c) 参数空间中奇异极限分岔示意图：原点处奇异 Bogdanov-Takens 和鞍结点同宿（SNIC）（蓝色）；奇异 Andronov-Hopf 分支（红色虚线）和 cusp 分岔 + 鞍结点分支（黑色）；沿奇异 AH 分支的对应情况 (a)-(d) 见图 4。

如图 4 所示，对于 $c = 0$ 和 $I = I_{\text{bif}}$ ，I 型神经元的层问题在较低的 F^- 处有平衡点的鞍-结点分岔。这允许我们构造一个奇异同宿轨道 Γ 如下：我们从较低分支 F^- 上的鞍-结平衡点开始，并连接到与上稳定分支 S_a^+ 相连的层问题的快速纤维。然后我们跟随递减（慢）流到上部折点 F^+ ，在这里与一个快速纤维相连，连接回到低吸引分支 S_a^- ，最后，跟随递减（慢）流流向较低的 F^- 折点，最终到达鞍-结平衡点。该同宿轨道是图 1 中所示的 SNIC 的奇异极限表示，因此，对于 $a = c = 0$ ，我们确定了一个（全局）奇异 SNIC 分岔和一个（局部）奇异 Bogdanov-Takens 分岔。这些奇异分岔的展开在第 6 节中完成了。图 5 总结了我们的所有奇异极限观察结果。

4 II 型兴奋性：奇异 Andronov-Hopf 分岔和鸭解爆炸

如图 3 所示的 II 型兴奋性，较低分支 S_a^- 的稳定平衡点在 $I = I_{\text{bif}}$ 处与较低折点 F^- 相交，并移动到不稳定的中间分支 S_r 作为简化问题 (11) 的不稳定平衡点。因此，两个特征值在经过 F^- 时交换符号。分岔点 I_{bif} 一般依赖于 λ ；在这一节中， λ 将是固定的，我们不会进一步强调对 λ 的依赖，因为相对应的分岔是余维 1 的，只需要 I 作为展开的参数，我们介绍

$$\mathcal{G}(v, I, \lambda) := g(\varphi_I(v), v, 0, \lambda). \quad (18)$$

假设 5 对于固定的 $(I, \lambda) = (I_{\text{bif}}, \lambda)$ ，折点 $F^- = (w^-, v^-)$ 和 $w^- = \varphi_I(v^-)$ 是一个奇异接触点，它关于参数 I 在 $I = I_{\text{bif}}$ 处经历了一个奇异 Andronov-Hopf 分岔。更准确的，我们强加

$$\mathcal{G}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda) > 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda) \neq 0. \quad (19)$$

除了这个分岔中 F^- 周围的奇异点， S_a^- 上没有其他奇异点。

在应用命题 1 的证明中所概述的规范形式变换时，可以发现假设 5 相当于施加

$$\bar{a}|_{I=I_{\text{bif}}} = 0, \quad c > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial a}{\partial I} \neq 0,$$

这可以很容易地在规范模型 (1) 上进行验证。

备注 6 系统 (1) 在一个 λ 值范围内，沿着参数曲线 $I = I_{\text{bif}}^{\text{II}}(\lambda)$ 满足假设 5。

当观察系统 (3) 的雅可比矩阵的迹和行列式时，可以很容易地看到奇异 Andronov-Hopf 分岔的性质

$$\text{tr } J = \frac{\partial f}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial w}, \quad \det J = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial v} \right). \quad (20)$$

在 F^- 附近，当 $\text{tr } J = 0$ 时， $0 < \varepsilon \ll 1$ 发生了由 $f = g = 0$ 定义的平衡分岔。这意味着 $\frac{\partial f}{\partial v} = -\varepsilon \frac{\partial g}{\partial w} = O(\varepsilon)$ ，在奇异极限下，这给出了折叠条件 $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ 。从假设 5，我们有在 $g = 0$ 处化简的 $\frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial v} < 0$ ，因此， $\det J = O(\varepsilon) > 0$ 。因此，我们期望 $I = I_h$ 有一个奇异的 Andronov-Hopf 分岔，它产生了具有 $O(\sqrt{\varepsilon})$ [14,15,18] 非零频率的小 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 振幅极限环。因此，Andronov-Hopf 分岔的奇异性质被编码在振幅和频率上。图 1 显示了超临界 Andronov-Hopf 分岔的一个例子。

请注意，在图 1 中，Andronov-Hopf 分岔的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 分支在 $I = I_c$ 附近突然发生了显著的变化，这个几乎垂直的分支标志着在分岔参数 I 的指数小参数区间内的展开，这通常被称为鸭解爆炸 [14,15]；它提供了小 Andronov-Hopf 极限环和大松弛环之间必要的连续连接，如图 1 所示。在奇异极限下，鸭解环可以识别如下：请注意，在简化问题 (11) 中平衡的稳定性转换是由于系统 (11) 在 F^- 处的奇异性；在一维规则扰动问题中，单一平衡的稳定性不与另一个平衡相互作用是不可能的。事实上，对于 $I = I_{\text{bif}}$ ，由于一个简单的零的抵消，在简化问题 (11) 中不存在平衡。因此，轨迹能够以非零速度从 S_a^- 到 S_r ，这是奇异鸭解的标志。可以构造通过慢鸭解段和快速纤维连接形成的奇异鸭解环，如图 4(d)。所示请注意，这些奇异的鸭状周期有 $O(1)$ 振幅和慢时间尺度上的 $O(1)$ 频率。这些奇异的鸭解环将在鸭解爆炸中展开成上述鸭解环。下面总结了这些观察结果。

定理 1 在系统 4 (假设 1-5 下) 中，假设只存在一个平衡点，并且对于足够小的 ε ，一个奇异的 Andronov-Hopf 分岔和一个鸭解爆炸发生在

$$I_h = I_{\text{bif}} + H_1 \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (21)$$

$$I_c = I_{\text{bif}} + (H_1 + K_1) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (22)$$

系数 H_1 和 K_1 和奇异 Andronov-Hopf 分岔的 (超临界或亚临界) 类型可以被显式地计算出来。

事实上，对于命题 1 给出的正规形式 (15)，在 $c > 0$ 足够大的条件下，我们发现关于分岔参数 a 有 $a_{\text{bif}} = 0, a_h = H_{1a} \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})$ 和 $a_c = (H_{1a} + K_{1a}) \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2})$ ，以及

$$H_{1a} = \frac{c}{2} \sigma, \quad K_{1a} = -\frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{3}{2} \beta c \right). \quad (23)$$

当 $K_{1a} > 0$, Hopf 是超临界的; 当 $K_{1a} < 0$, 是亚临界的。

证明: 我们可以看 [15]，其中展示了大部分申明，这里我们只用规范形式 (15) 计算 H_{1a} 和 K_{1a} 。

让我们从 H_{1a} 开始，给出 (21)，一个简单的渐进分析表面一个奇点位于 $(x, y) = (\varepsilon^2 \frac{H_{1a}}{c^2} + O(\varepsilon^3), \varepsilon \frac{H_{1a}}{c} + O(\varepsilon^2))$ 处，其向量场的线性化轨迹由 $(-\sigma + \frac{2H_{1a}}{c}) + O(\varepsilon^2)$ 给出，因此 Hopf 分岔发生在 $H_{1a} = \frac{c}{2} \sigma$ 处。

接下来我们将关注鸭解值 $H_{1a} + K_{1a}$ 。由于奇异 Hopf 点具有一般性质，鸭解存在的参数值是相同的参数值，其中存在光滑渐近展开 $x = \varphi(y) + \varphi_1(y)\varepsilon + \varphi_2(y)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ ，表示一个不变图。通过插入微分方程中的级数来表示不变性，得到了 φ_1 和 φ_2 的表达式，给定了 $a_c = (H_{1a} + K_{1a})\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ 。然后，要求 φ_2 在 $y = 0$ 处不应有一个极点，从而在 $H_{1a} + K_{1a}$ 上产生一个条件，得到所需的结果。

备注 7 通过使用鸭解的奇异性质,上述计算也提出了一种寻找第一李雅普诺夫系数 K_{1a} 的替代方法,以确定奇异 Andronov-Hopf 分岔的临界性。

在奇异极限下,我们有 $I_h = I_c = I_{\text{bif}}$ 表示分岔的奇异性质。需要注意的是,II 型兴奋性的经典定义是指大弛豫振荡的慢 $O(\varepsilon)$ 频带,它变化不大(而不是实际的中间 $O(\varepsilon^{1/2})$ 奇异 Andronov-Hopf 分岔频率)。

仔细观察定理 1 中第一李亚普诺夫系数 K_{1a} 的表达式,可以发现在 $c = c_{\text{bautin}} + O(\varepsilon^{1/2})$ 处有临界性的变化

$$c_{\text{bautin}} := -\frac{2\sigma}{3\beta}, \quad (24)$$

在典型模型 (1) 中被化简为 $c_{\text{bautin}} = \frac{2d^2}{3}$ 。

引理 1 对固定的 $0 < \varepsilon \ll 1$, 正规形式 (15) 对于 $r c \approx c_{\text{bautin}} a$ 有一个余维-2 Bautin (广义 Andronov-Hopf) 分岔点。

Bautin 分岔 [17] 表明对于固定的 $0 < c < c_{\text{bautin}}$, 我们有一个亚临界奇异 Andronov-Hopf 分岔(在参数 a 的变化下)并伴随着另一个余维 1 分岔, 周期轨道的鞍-结点 (SNPO) 分岔有一个余维 2 的 Bautin 分岔分支。由于我们问题的奇异性, 这个 SNPO 分岔是鸭解环的分岔。因此, 它发生在指数接近定理 1 中定义的鸭解参数值 a_c 。

5 I/II 型兴奋性转化机制: 不完全鸭解爆炸

回顾 (17), 对于 $\varepsilon = 0$, 我们在 $(a, c) = (a_{\text{cusp}}, c_{\text{cusp}})$ 观察到一个 cusp 分岔, 他沿着 (a, c, ε) 参数平面上的参数曲线 $\{(a_{\text{cusp}}(\varepsilon), c_{\text{cusp}}(\varepsilon), \varepsilon) : \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ 。

引理 2 对固定的 $0 < \varepsilon \ll 1$, 正规形式 (15) 对于 $c \approx c_{\text{cusp}} a$ 有一个余维-2 cusp 分岔点。

这个引理表明, cusp 对于极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 没有奇异的性质。对于固定的 $0 < c < c_{\text{cusp}}$, 我们三个平衡态, 其中至少有两个位于 S_r 上(见假设 3), 这改变了我们问题的全局分岔结构。虽然我们仍然观察到关于参数 a 的奇异 Andronov-Hopf 分岔, 但是, 当接近这些附加的平衡(鞍型)时, 极限环的增长是有界的。下一个定理讨论了这个情况, 它描述了从 II 型兴奋性向 I 型极限情况的第一次转变。我们制定了有关主系统的结果, 但我们将根据第 3.1 节中正规形式 (15) 引入的参数进行描述。对于典型模型 (1), a 和 I 之间的关系是微不足道的, 而一般来说, (I, λ) 和 (a, c) 之间的关系可能是复杂的, 尽管第 3.1 节说明了如何计算参数的变化的过程。

备注 8 我们用 $c_{\text{sn}}^- > 0$ 表示 SN 一个分支与 c 轴相交的坐标。(图 5 中的 ‘SNIC’ 鸭解类型)。在规范形式 (15) 中, 包括高阶项, 我们知道 $0 < c_{\text{sn}}^- < c_{\text{cusp}}$, 我们假设包含高阶项也是如此。

定理 2 在假设 (1-5) 下的系统 (15), 对于固定的 $0 < c < c_{\text{sn}}^- < c_{\text{cusp}}$ 和 $0 < \varepsilon \ll 1$, 在中间分支 $S_{r,\varepsilon}$ 上存在一个不稳定的平衡, 远离折点 F^- 。进一步的, 存在函数

$$0 < a_{\text{snpo}}(\varepsilon) < a_\ell(\varepsilon) < a_S(\varepsilon) < a_c(\varepsilon) < a_h(\varepsilon) < a_{\text{sn}}^+(\varepsilon)$$

在奇异极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ (除了 a_{sn}^+) 下均收敛于零, 以下条件成立 (另见图 6):

1. 对于 $a_{\text{sn}}^+ < a$, 折点 F^- 是一个常规跳跃点, 存在一个大的稳定的松弛环。
2. 在 $a = a_{\text{sn}}^+$, 在中间分支 $S_{r,\varepsilon}$ 上的奇点的鞍-结点分岔在 F^- 的 $O(c)$ 邻域; 大的松弛环仍然存在。
3. 对于 $a_h < a < a_{\text{sn}}^+$, 系统在中间分支 $S_{r,\varepsilon}$ 上有一个鞍点 p_+ 和一个不稳定焦点/结点 p_- , 被一个大的松弛环围绕。不稳定的焦点/结点 p_- 靠近折点 F^- 。
4. 在 $a = a_h, p_-$ 改变了稳定性, 而且 Andronov-Hopf 分岔发生; 大的松弛环存在。
5. 对于 $a_c < a < a_h$, 在稳定焦点 p_- 周围存在一个排斥的小振幅极限环; 大的松弛环存在。
6. 对于 $a_s < a < a_c$, 小的后跳鸭解环出现, 振幅迅速增长 (鸭解爆炸); 大的松弛环扰动到一个大振幅的前跳鸭解环。

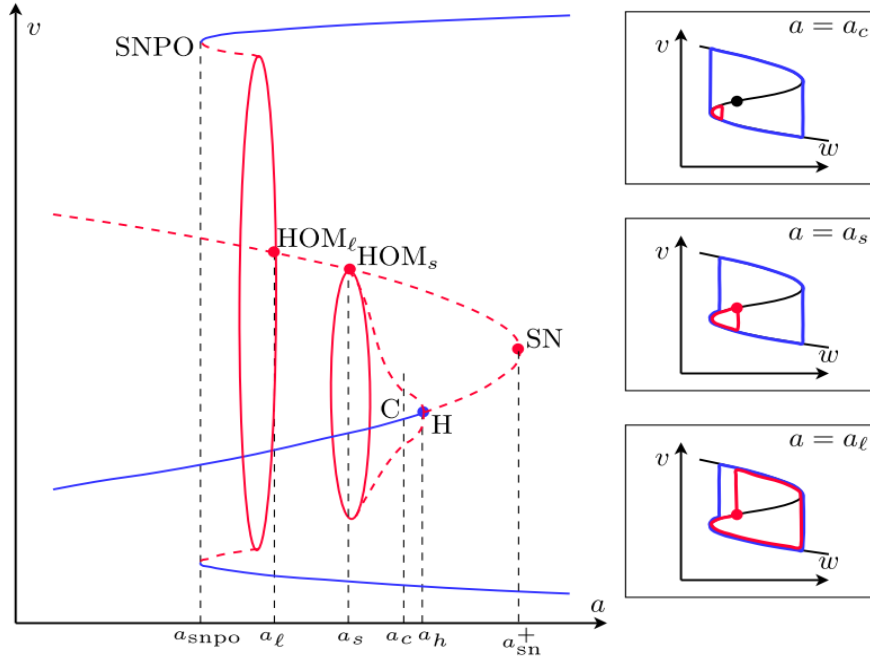


Figure 6: 固定 $0 < c < c_{\text{cusp}}$. 分岔图。抛物线显示了在折点 F^- 附近的两个平衡线（第三个平衡分支和第二个 SN 没有显示）。 a 轴没有显示在尺度上，因为 a_{snpo} 和 a_c 之间的距离应该是指数级小的。记住这一点，一个不完全的鸭解爆炸被视为 a 从 a_c 到 a_s 。

7. 在 $a = a_s$, 一个来源于鞍点 p_+ 的后跳跃同宿环的鸭解类型, 与一个稳定的大振幅鸭解环一起出现。
8. 对于 $a_l < a < a_s$, 小的同宿环破裂, 只有稳定的大振幅鸭解环持续存在。
9. 在 $a = a_l$, 一个来源于鞍点 p_+ 的大振幅同宿环的鸭解类型, 与外部大振幅环一起出现。
10. 随着 a_l 的减小, 大振幅鸭解环出现振幅增长, 直到在 $a = a_{\text{snpo}}$ 极限环的鞍-结点分岔中消失。

证明: 在证明这个定理之前, 我们想提到的是 a_h 和 a_c 之间的距离是 $O(\varepsilon)$, 就像前面的奇异 Andronov-Hopf 情况一样, 而值 a_c, a_s, a_l 和 a_{snpo} 都是指数接近的。

折点附近的奇异性。对于固定的 $0 < c < c_{\text{cusp}}$, 在零斜线 $cy - a - x + O(x^2, y^3, xy) = 0$ 和 $y^2 - x + \beta y^3 + O(y^4) = 0$ 交叉的部分发现了奇点, 因此有 y 坐标满足 $\rho(y) := -a + cy - y^2 + O(y^3) = 0$. 值 a_{sn}^+ 对应于 $\{\rho(y) = 0, \rho'(y) = 0\}$ 的解, 为 (y, a) . 变成

$$a_{\text{sn}}^+ = \frac{c^2}{4} + O(c^3) \quad (25)$$

在 $a = a_{\text{sn}}^+$ 时, 双奇异点出现 (奇异极限 $\varepsilon = 0$) 在 $y = \frac{c}{2} + O(c^2)$, 即在中间分支。对于 $a_h < a < a_{\text{sn}}^+$ 有两个奇异点: 一个不稳定的结点/焦点 p_- 接近折点, 和鞍点 p_+ 以 $O(c)$ 远离折点, 都位于中间分支。

对于 $a > a_h$, 奇点的位置意味着折点 F^- 是一个跳跃点, 并且存在一个稳定的松弛环。这显示了 (1)-(3) 部分。

备注 9 注意, 在中间分支上也存在第三个平衡, 一个用记号 n 表示的不稳定结点/焦点, 远离折点 F^- 。第三个平衡沿着第二鞍结分支在 p_+ 分岔 (见图 5)。

奇异的 Andronov-Hopf 分岔。如定理 1 的证明, 我们有一个奇异 Andronov-Hopf 分岔

$$a_h = \varepsilon \frac{c}{2} + O(\varepsilon^{3/2})$$

临界性取决于 $K_{1a} = -\frac{c}{4}(1 + \frac{3}{2}\beta c) = -\frac{c}{4}(1 + O(c))$ 的符号, 当 $0 < c < c_{\text{cusp}} < c_{\text{bautin}}$ 时为负号, 这意味着 Andronov-Hopf 分岔是亚临界的。这显示 (4)-(5) 部分。

备注 10 鸭解参数值 a_c 没有严格定义，“小振幅极限环”也没有严格定义。我们选择折点的 δ 邻域，以及沿鸭解爆炸的 δ 邻域增长的时刻，我们定义参数值 $a = a_c(\varepsilon)$ 。（换句话说， a_c 不仅仅是“鸭解的诞生”。）

不完全的鸭解爆炸和同宿鞍环。鞍点 p_+ 的存在表明，在鸭解爆炸中鸭解环不能无限地增长。我们在这里给出一个简短的证明存在的概述，因为我们将使用证明的一部分显示鸭解同宿的存在。

对于固定的 $c > 0$ ，我们重新缩放 $a = \sqrt{\varepsilon}A$ ，从而研究 (a, c) 参数空间中正 c 轴的 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 邻域，沿此我们观察到奇异的 Andronov-Hopf 分岔；见图 5。在正态坐标下，我们考虑两个横截面：截面 $S = \{y = 0, x_0 < x < x_1\}$ 横向于快速流，截面 $T = \{y = 0, |x| = O(\varepsilon)\}$ 接近奇异折点 F^- 。利用几何奇异摄动理论，我们发现向量场的前向流和后向流都取 S 到 T 的点；事实上，后向的快速流从 S 到 S_a^- 。在此之后，慢流的动力学支配着向 T 的漂移。它定义了两个映射

$$x_T = \varepsilon F(x_S, \sqrt{\varepsilon}, A), \quad x_T = \varepsilon B(x_S, \sqrt{\varepsilon}, A), \quad (26)$$

其中，正向映射 F 和反向映射 B 在 $(x_S, \sqrt{\varepsilon}, A)$ 方面是光滑的，见 [19]。更准确地说，设 x_S^+ 是 S 与鞍点 p_+ 的快速纤维交点的（参数相关的）坐标。这个坐标定义了 (26) 中的反向映射的 x 坐标的上确界。在 [19] 中， $F - B = 0$ 在 $(\sqrt{\varepsilon}, A) = (0, 0)$ （独立于 x_S ），在这个点还有 $\frac{\partial}{\partial A}(F - B) \neq 0$ 。隐式函数定理的应用导致了鸭解曲线 $A = \sqrt{\varepsilon}A_{\text{canard}}(x_S, \sqrt{\varepsilon})$ 的存在，向量场有一个鸭曲线周期轨道，与 x 坐标的 x_S 相交。鸭解曲线 A_{canard} 在 A_{canard} 中是平滑的，它的值以指数小的方式依赖于 x_S 。换句话说，在 (a, c) 参数空间中，沿正 c 轴的 (a, c) 附近存在一个指数小楔形中。

我们可以进一步依赖于 [20] 中的结果，其中它表明映射 (26) 是平滑的，并包括（在其扩展处）边界 $x = x_S^+$ 。这意味着上面得到的 $a_s = \varepsilon A_{\text{canard}}(x_S^+, \sqrt{\varepsilon})$ 实际上是一个参数曲线，沿该曲线向量场有一个鸭嘴型（“跳回”型）的同宿鞍环。这证明了该定理的第 (7) 部分。

备注 11 在不稳定的鸭型循环中（或同宿）周围，出现了一个大的鸭解弛豫振荡。它靠近完全弛豫振荡，但沿着中间的排斥分支移动一个 $O(c)$ -距离（见图 6）。沿着中间分支移动的确切距离可以用慢发散积分和进出关系来计算；参考文献 [21]。

通过在中上分支之间引入一个替代的部分 \tilde{S} 而不是 S ，我们可以用完全相似的方式处理“跳跃”型的同宿鞍环。唯一的变化是 \tilde{S} 点在正时间到 T 的方式经历大振幅振荡（沿 S_a^+ 向跳跃点 F^+ 移动，向 S_a^- 跳跃）。过渡映射的光滑性和隐函数定理的应用是类似的。这定义了一个 $a = a_\ell < a_s$ ，并证明了该定理的第 (9) 部分。

对于一个 $a < a_\ell(\varepsilon)$ ，同宿连接断裂成一个排斥的大振幅循环。当 a 继续前进到 $O(\varepsilon)$ 邻域的外部时，它遇到了包围所有排斥环的松弛吸引环。它们在 $a = a_{\text{snpo}} < a_\ell$ 的极限环的鞍结点分岔中消失。这证明了该定理的第 (10) 部分。

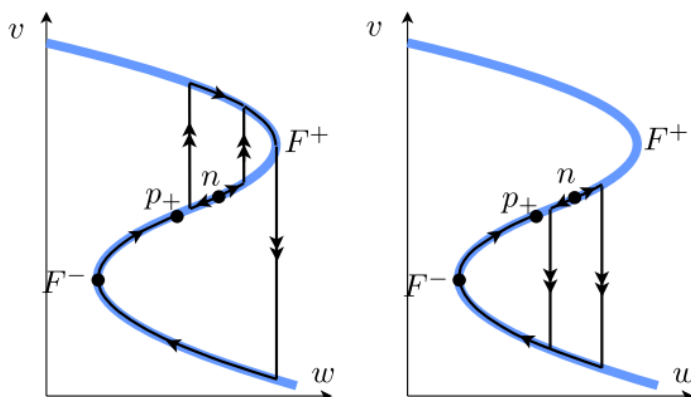


Figure 7: 鸭解型异宿连接经历了从无头鸭到有头鸭的过渡，从跳回鸭同宿到跳走鸭同宿的转变

对于位于两条同宿曲线之间的 $a_\ell < a < a_s$ ，稳定流形 W^s 反向连接到大的同宿轨道，但在连接回 p_+ 所需的时间之前退出。因此，不可能出现极限环。事实上，由于我们知道在中间分支 S_r 上有一个额外的奇异点，用 n 表示，假设它是结点型，那么两个同宿之间的指数间隙被鸭解曲线填充，沿该曲线 n 和 p_+ 之间出现鸭解异宿连接；见图 7。从无头异宿

鸭解到有头异宿鸭解的转变可以看作是鸭解同宿的截断爆炸的自然延续。这种异宿存在的证明与上述情况完全类似。特别是，在这种情况下没有出现极限环。这证明了第 (8) 部分，并完成了该定理的证明。

5.1 同宿鞍环的结束

在典型形式 (1) 中，奇异的 Andronov-Hopf 曲线与鞍点分岔曲线相交，鞍点 p_+ 与第三个奇点碰撞，即中间分支 S_r 上的一个节点 n 。在局部坐标 (14) 中表示 (1)，这个奇异的分岔点在图 5 中用蓝色标记，并具有坐标 $(a_{sn}^-, c_{sn}^-) = (0, -\frac{1}{4\beta})$ 。在本节中，我们将讨论这个余维-2 奇异分岔点如何摄动到 $\varepsilon > 0$ 。

当 ε 为正值时，SN 曲线有规律地扰动为曲线 $c = c_{sn}(a, \varepsilon)$ 。观察到原点和这个余维 2 分岔点之间的 AH 曲线部分扰动到一个楔形鸭解曲线，对应于定理 2 中讨论的不完全鸭解爆炸。

在鞍同宿的情况下，用 x_S^+ 表示截 S 面与奇点 p_+ 的不稳定分界的交点，直到它成为鞍结点。那么 S 的部分 $\{x < x_S^+\}$ 是向后映射 $B: S \rightarrow T$ 定义的部分。应用 [20] 中的结果，我们知道映射 B 在其定义域的边界上有一个 C^k 光滑扩展（对于任何 k）。这意味着我们可以定义 $B(x_S^+, \varepsilon, a, c_{sn}(a, \varepsilon))$ ，也可以定义 $F(x_S^+, \varepsilon, a, c_{sn}(a, \varepsilon))$ ，就像 (26) 中，但我们使 c 的依赖显式。因此，利用重新调整的参数 $A (a = \sqrt{\varepsilon}A)$ 的隐式函数定理求解 $F - B = 0$ ，我们可以证明（“跳回”）鸭嘴类型的鞍结点同宿的存在。

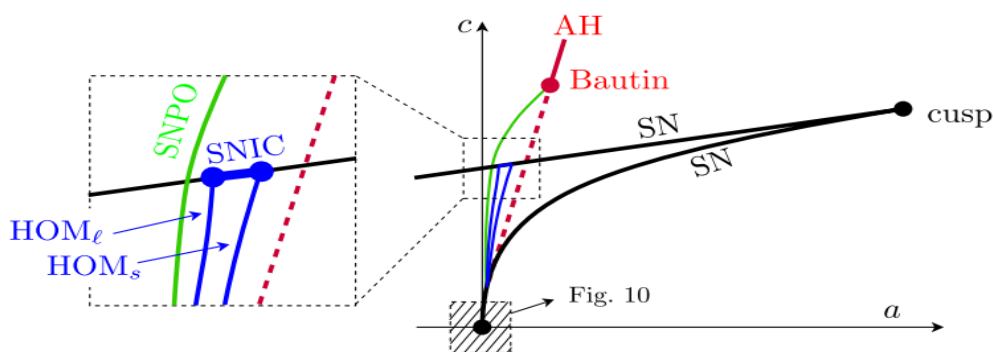


Figure 8: 对于 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的 (a, c) 参数空间中的分岔示意图：cusp 分叉和 SN 分支（黑色）；带有 Andronov-Hopf 分支（亚临界 = 虚线/超临界 = 实）的 Bautin 分岔点（红色）；周期轨道鞍结点（SNPO）分支（绿色）；大小同宿 (HOM_s and HOM_l) 分支（蓝色）；SN 分支上的 a_{sn}^- （蓝色）。

和前面一样，用 \tilde{S} 替换 S 节，我们可以应用同样的推理来证明一个鸭解值的存在，其中存在一个（“跳跃”）鸭解类型的鞍结点同宿。由于鸭解值 A_{canard} 在 x_S 方面是平滑的，我们可以清楚地看到，同宿环曲线（跳回型和跳转型）在鞍结分岔曲线上对应的鞍结点同宿处终止。

两个终点之间的 SN 曲线上的指数楔形是 SNIC 的异宿鸭解曲线的终点，如图 7 所示。从视觉上看，在图 7 中，当 n 和 p_+ 在 SN 分岔中相互接近时，异宿连接如何趋向于 SNIC。证明的方法与之前使用的方法相似。

备注 12 在 $c_{sn}^- < c < c_{cusp}$ 固定的情况下，第二个 SN 分岔位于奇异（亚临界）AH 分岔之前，我们观察到一个完整的鸭解爆炸（包括鸭解环的 SNPO 分岔）。

在 $c_{cusp} < c < c_{bautin}$ 固定的情况下，只有奇异（亚临界）AH 分岔，我们也观察到一个完整的鸭解爆炸（包括鸭解环的 SNPO 分岔）。

图 8 总结了我们对 $0 < \varepsilon \ll 1$ 的所有观察结果（与图 5 中的奇异极限分岔图相比）。

6 I 型兴奋性：奇异 Bogdanov-Takens/SNIC 分岔

在本节中，我们讨论了原点 $(a, c) = (0, 0)$ ，它代表一个局部奇异的 Bogdanov-Takens 和一个全局奇异的 SNIC 分岔点；见图 5。让我们首先给出在满足假设 1-4 的条件下，局部正态形式的 (a, c) 图中的原点与系统 (3) 相关的一般条件。当

它违反假设 5 时，我们观察它，即我们感兴趣的是参数值 $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) = 0$$

并在 (18) 中定义了 \mathcal{G} 。此条件通常在 1-参数族中被违反。对于在折点 F^- 附近出现一个鞍结点的 SNIC 分岔，我们将因此施加以下条件。

假设 6 对于固定 $(I, \lambda) = (I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}})$ ，折点 $F^- = (w^-, v^-)$ 是一个奇异的接触点，它对参数 (I, λ) at $(I, \lambda) = (I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}})$ 经历一个奇异的 Bogdanov-Takens 分岔。更准确地说，我们施加（在假设 1-4 的基础上）：

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) &= 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v^2}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) > 0, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) &\neq 0, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) &= 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \lambda \partial v}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) \neq 0. \end{aligned} \tag{28}$$

除了在这个分岔中可能出现在 F^- 附近的奇异点外，在 S_a^- 上没有其他奇异点。

条件 (27) 表明折点 F^- 是一个局部余维-2 奇异点。条件 (28) 意味着奇点的完全展开是在变化 (I, λ) 时得到的。事实上，(28) 中的条件可以被稍微更一般的条件所取代，

$$\det \frac{\partial (\mathcal{G}, \mathcal{G}_v)}{\partial (I, \lambda)}(v^-, I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) \neq 0$$

其中 $\mathcal{G}_v := \partial \mathcal{G} / \partial v$ ，但我们更喜欢保留 (28)，以便能够识别 I 作为两个参数之间的 Hopf 破坏参数。

备注 13 可以看出，条件 (27) 和 (28) 隐含着对正常规范形式 (15) 有以下条件：

$$\begin{aligned} (a, c)|_{(I, \lambda)} &= (I_{\text{bif}}, \lambda_{\text{bif}}) = (0, 0), \quad \sigma = +1, \\ \frac{\partial a}{\partial I} &\neq 0, \quad \frac{\partial a}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \lambda} \neq 0, \end{aligned}$$

这在规范模型 (1) 上进行了验证

在这些条件下，众所周知，在与 ε 相关的重新标定坐标中，发生了一个规则的 Bogdanov-Takens 分岔；看到 [16]。因此，在某些参数子集中，小振幅同宿的存在是明显的。此外，由于（奇异的）Andronov-Hopf 分岔是分岔图的一部分，因此出现了鸭解轨道。事实上，在 $x = 0$ 慢流形上的双奇异点，折点可能成为一个鸭解点，在中间分支的慢动力学中可能出现一个额外的鞍型奇点。通过这种方式，可以观察到一个不完全的鸭解爆炸，终止于一个鞍型同宿线（“跳回”，没有“头部”）。事实上，这些现象都是在局部出现在 Bogdanov-Takens 折点附近的现象。

除了在 Bogdanov-Takens 点附近的小振幅现象外，我们还考虑了接近图 4 中所示的奇异鞍结同宿环 Γ 的轨道。我们期望存在大振幅鞍结同宿 (SNICs)，并且与前一节一样，我们也期望存在大振幅鞍同宿和弛豫振荡。

为了得到接近 $c = 0$ 的参数，我们重新缩放参数并引入

$$(c, a) = (\varepsilon C, \varepsilon^2 A), \quad (C, A) \in [0, M] \times [-M, M] \tag{29}$$

对于一些较大的 $M > 0$ 。通过这样做，我们实际上假设了一个 $c = O(\varepsilon)$ 和一个 $a = O(\varepsilon^2)$ 。在参数重新调整 (29) 之后，我们对该系统进行了研究

$$\begin{aligned}x' &= \varepsilon (-\varepsilon^2 A + \varepsilon C y - x + O(x^2, y^3, xy, \varepsilon y^2)), \\y' &= y^2 - x + O(y^3).\end{aligned}\tag{30}$$

在 [16] 中, 在 $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$ 处的奇异点被描述为一个慢-快 Bogdanov-Takens 点。在本文中, 证明了一个 BT 分岔发生在原点附近。更重要的是, 它表明, 与 BT 分岔相关的相位是唯一在原点的一个小的领域内看到的相位。本文没有处理任何与全局返回机制的相互作用, 即 (局部) 奇异 BT 和 (全局) 奇异 SNIC 的相互作用尚未被研究。因此, 我们将重复局部分析, 重点是与全局返回机制的相互作用。

6.1 奇异折点的吹胀技术

在褶皱附近, 我们使用吹胀技术 [14, 15] 来研究该系统。我们写

$$(x, y, \varepsilon) = (r^2 X, rY, rE), \quad r \geq 0, (X, Y, E) \in S_+^2,$$

其中 S_+^2 表示半球 $X^2 + Y^2 + E^2 = 1$ with $E \geq 0$ 当 $E \rightarrow 0$ (也称为庞加莱或吹胀球)。权值的选择方式是 (30) 中的高阶项在重新调整的方程中有更高阶。

与几何设计一样, 我们在不同的 (坐标) 图中研究半球上的流动。有两个图表很重要: 图表 K_1 (或相位方向重新缩放图) 和图表 K_2 (或族重新缩放图)。 K_1 图用于将沿慢流形 (指向褶皱) 的轨道延伸到距离原点距离 $O(\varepsilon)$ 的附近。

对于那些不习惯吹胀技术的读者来说, 这个转换是最具技术性和最不明显的, 幸运的是, 对系统 (30) 的研究与对经典规则跳跃点的研究结果是一致的部分。因此, 我们没有在图表 K_1 中提供详细的计算, 而是专注于呈现重要的事实, 并参考文献 [14,15] 进行详细的分析。

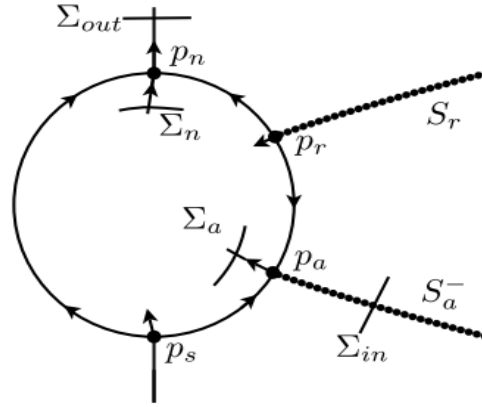


Figure 9: 奇异折点的吹胀。“鸟瞰图”的上部吹胀球体 $X^2 + Y^2 + E^2 = 1$ 在 (X, Y) -空间。在赤道处获得了流形 S_a S_r 的正常双曲性, 允许人们将它们分别扩展到在奇点 p_a 附近的吹胀球体上。另外两个奇点表示在 F^- 处与快速纤维的连接。重新缩放图 K_1 。在这里, 我们解释了吹胀球体 S_+^2 在附近的动力学。当在放大的 (x, y, ε) 空间中呈现图像时, 原点被 (或放大到) 球体取代, 我们可以从 ε 轴的顶部定位视角; 向下看 (X, Y) 平面, 我们看到球面 $X^2 + Y^2 + E^2 = 1, E \geq 0$ 是圆的内部 $X^2 + Y^2 = 1$, 赤道是圆, 周围有外部的慢速动力学; 见图 9。

在 K_1 中的计算显示了两个双曲鞍形奇点, p_s 和 p_n , 以及沿赤道的两个半双曲奇点 p_a 和 p_r 。结合来自 F^- 附近的慢速动力学信息与图 K_1 中获得的信息, 我们可以重建图 9 中所示的圆附近的动力学。

定义映射 $\Sigma_{out} \rightarrow \Sigma_{in}$ 的全局返回机制, 与该图表中的信息相结合, 可以显示映射 (ε, C, A) 族的平滑性和指数收缩性

$$\Sigma_n \rightarrow \Sigma_a\tag{31}$$

鉴于 p_a 发出的中心分隔线的唯一性，可以证明在此地图下任何小部分 Σ_n 的图像限制该中心分隔线（与 Σ_a 相交）为 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。因此，为了描述全局动态，了解这个中心分离线的动态是很重要的。特别是， Σ_a 到 Σ_n 的连接将区分是否满足奇异点，或者是否可能有一个规则的“类跳跃点”连接。本研究将在族方向重新调整图中进行。

族重尺度图 K_2 。一旦轨线通过了图 K_1 ，我们可以假设 $x = O(\varepsilon^2)$ 和 $y = O(\varepsilon)$ 。在吹胀坐标中，这意味着 (X, Y, E) 是有界的，远离 $\{E = 0\}$ （从那时起意味着 $\varepsilon \sim r$ ）。众所周知，对球体的研究可以通过观察 ε 依赖来建立

$$(x, y) = (\varepsilon^2 X, \varepsilon Y), \quad (X, Y) \in [-R, R]^2 \quad (32)$$

对一些较大的 $R > 0$ 。将这种调整应用到 (30) 中，w 我们可以划分出共同的因子 ε ，因此将系统转化为规则的扰动系统

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -A + CY - X + O(\varepsilon), \\ \dot{Y} &= Y^2 - X + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (33)$$

6.2 局部和全局余维-2 分岔

系统 (33) 描述了球体内部的流动，如图 9 所示，它可以通过经典的分岔分析方法进行分析。结合从全局返回机制中获得的信息，我们能够描述在 (A, C) 参数空间中所有观察到的局部和全局分岔。

Bogdanov-Takens 分岔。

引理 3 对于 $\varepsilon = 0$ ，当 $A = A_h(C) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}C, C > 1$ 时，系统 (33) 经历了一个亚临界 Andronov-Hopf 分岔，当 $A = A_{sn}^+(C) = C^2/4$ 时，经历了一个鞍结点分岔，这两个分岔曲线在 $(A, C) = (1/4, 1)$ 处的一个 Bogdanov-Takens 分岔点上相交。对于 $\varepsilon > 0$ 这两个分岔均存在。

证明在 $X = Y^2$ 上有两个奇异点，位于 $Y = Y_{\pm} := \frac{1}{2}(C \pm \sqrt{C^2 - 4A})$ 。 $Y = Y_+$ 处的奇点，表示成 p_+ ，总是一个鞍点。 $Y = Y_-$ 的奇点，记为 p_- ，是 $C > 1$ 的焦点/结点类型，沿 $A_h = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}C$ 轨迹的符号发生变化，这表明是 Andronov-Hopf 分岔。沿着这条参数线， p_- 是弱不稳定的；基本计算表明，第一李亚普诺夫系数是正的。因此，Andronov-Hopf 分岔是亚临界的。

两个奇异点 p_+ 和 p_- 沿着 $A_{sn}^+ = C^2/4$ 碰撞，表明在 p_{\pm} 处有鞍-结分岔。

备注 14 让我们在没有证明的情况下提及，在 $(A, C) = (\frac{1}{4}, 1)$ 的 Bogdanov-Takens (BT) 点同宿鞍-环分岔曲线 (HOM_s) 位于 Andronov-Hopf 曲线 (AH) 和参数线 $A = A_{\ell}(C) = -\frac{1}{16} + \frac{C}{4}$ (HOM_{ℓ}) 之间，并趋于该参数线；见图 10。这可以通过研究接近无穷大的 $\varepsilon = 0$ 的结果 (33) 看出。

鞍-结同宿分岔

下面的命题陈述了对于 $\varepsilon = 0$ 时系统 (33) 的一些性质。如前所述，我们关注局部动力学和全局返回机制的相互作用上，特别的，我们想要了解中心分离线 $\varepsilon = 0$ 的动力学机制。

命题 2 沿着鞍结点分岔曲线 $A_{sn}^+(C) = C^2/4$ ，对于 $\varepsilon = 0$ 我们有以下行为 (33) (见图 11):

1. 当 $C < \frac{1}{2}$ 时，来自 p_a 的分离线连接到鞍节点奇点 p_{\pm} 的中心稳定分离线。 p_{\pm} 独特的不稳定中心分离线与 p_n 相连。
2. 当 $C = \frac{1}{2}$ 时，来自 p_a 的分离线连接到鞍节点奇点 p_{\pm} 的双曲吸引分离线。 p_{\pm} 独特的不稳定中心分离线与 p_n 相连。
3. 当 $C > \frac{1}{2}$ 时，来自 p_a 的分离线沿着规则的轨道直接与 p_n 相连。这是跳转情景。特别是，BT 点 $p_{\pm}(C = 1)$ 没有连接到分隔线。
4. 鞍结点 p_{\pm} 的吸引分离线和来自 p_a 的分离线相对于参数 C 有规律地断裂。

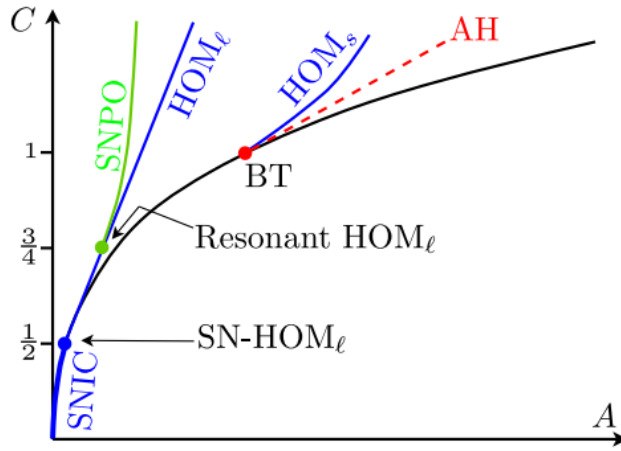


Figure 10: 在 (33) 中发现的 $\varepsilon = 0$ 在 (C, A) 参数平面上的分岔。余维 2: Bogdanov-Takens(BT)、共振同宿 (共振 HOM_ℓ) 和鞍结点同宿 (SN - HOM_ℓ); 余维 1: 鞍结点 (SN)、Andronov-Hopf (AH)、鞍同宿 (HOM_S 、极限环鞍结点 (SNPO))

证明: 证明使用了向量场平面理论的基础 (例如不变曲线, 等斜线, 正不变集)。它需要一些计算, 但由于它涉及到基本性质, 我们把细节留给了读者。

对于 $C < 1/2$, 我们定义 $W = X - Y^2 + (C - 1)Y - \frac{1}{2}(C - 1)C$. 注意鞍结点奇点是 p_\pm 是抛物线 $W = 0$ 上的点, 且 $\dot{W}|_{W=0} = (1 - 2C)(Y - \frac{C}{2})^2$ 是正的, 除了在 SN 点 p_\pm 处。利用来自无穷大的信息 (即来自图 K1), 我们可以看到来自 p_a 的分隔线进入了 $\{W > 0\}$ 的区域, 这是正不变的。因此, 分隔线的 ω 极限集必须是抛物线的顶点。最后, 鞍结奇点 p_\pm 的双曲分离线与 $\partial\{W = 0\}$ 相切, 这意味着它位于正不变集 $\{W > 0\}$ 之外。这证明了第 (1) 部分。

对于 $C = \frac{1}{2}$, 奇点 p_\pm 位于引理 3 的不变抛物线上, 然后与来自 p_a 的分离线重合。不难验证鞍结奇点的双曲特征空间与抛物线的正切空间相交, 这证明了第 (2) 部分。

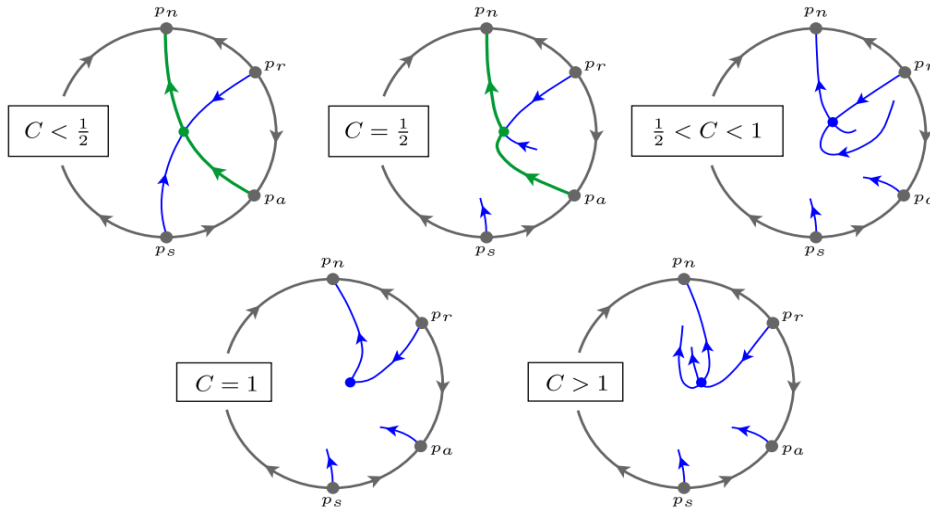


Figure 11: (33) 在 $\varepsilon = 0$ 的庞加莱盘上的行为, 沿着 SN 曲线 $A_{sn}^+(C) = \frac{C^2}{4}$ 。对于 $C \leq \frac{1}{2}$, 点 p_a 连接到 SN 点 p_\pm , 在 $C = 1$, 出现一个 p_\pm 点, 但与 p_a 没有连接。

对于 $C > \frac{1}{2}$, 我们定义 $V = X - Y^2 - \frac{1}{2}Y - (\frac{1}{8} - \frac{C}{2})$ 。我们可以验证 $\dot{V}|_{V=0} = -\frac{1}{16}(2C - 1)^2 < 0$, 因此 $\{V \leq 0\}$ 是一个正不变集。它是一个符号计算, 以验证来自 p_a 的分隔线进入这个不变集, 不能离开。另一方面, 在鞍结点 $p_\pm = (\frac{1}{4}C^2, \frac{1}{2}C)$ 计算的 V 得到 $\frac{1}{4}(C - \frac{1}{2}) > 0$ 。我们认为来自 p_a 的分离线不能达到 p_\pm 。由于 p_n 是 ω 限制的唯一其他选项, 所以它证明了 (3)。

对于第 (4) 部分连接的规则断开, 我们计算了鞍结点 p_\pm 的稳定分离线, 并与来自 p_a 的分离线进行了比较。为了

进行比较, 我们选择了一个任意的截面交叉 $\{V = 0\}$, 并通过 V 的水平来参数化它。不难看出, 来自 p_a 的分隔线在 $O(C - \frac{1}{2})^2$ 的 v 值处与任何这样的截面相交。另一方面, 对 p_{\pm} 的稳定分离线的变分计算表明, 它是由 $V = \frac{1}{4}e^{1-4Y} \times (C - \frac{1}{2}) + O(C - \frac{1}{2})^2$ 给出的。由于 $\frac{1}{4}e^{1-4Y} \neq 0$, 它解释了横向性。这就完成了对这个定理的证明。

显然, 鞍结点曲线 $A_{sn}^+(C) = C^2/4$ 持续存在于流形 $A_{sn}^+(C, \varepsilon) = C^2/4 + O(\varepsilon)$ 中。命题中提出的正则断裂性质保证了 $\varepsilon > 0$ 的结果持续存在。

定理 3 存在一个参数平面 $A_{sn}^+(C, \varepsilon) = C^2/4 + O(\varepsilon)$, 沿该参数平面存在一个鞍结奇点 p_{\pm} 。在这个表面上, 存在一个曲线 $C = \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$, 沿该曲线出现一个鞍结同宿连接, 其中包含鞍结点的双曲分离线。对于参数表面 $C < \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$ 上, 有一个包含鞍结中心分离线的 SNIC 连接。而对于 $C > \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$, 没有 SNIC 连接。

证明: 限制在鞍节点表面。设 $\gamma_{C,\varepsilon}$ 为连接到 p_n 的鞍节点 p_{\pm} 的不稳定分离线。它平滑地相交在一个点 $P_{C,\varepsilon}$ 的 Σ_n 部分。全局返回机制 (31) 将这一点带到 Σ_a 上的一个点 $Q_{C,\varepsilon}$, 其中 $Q_{C,0}$ 位于中心分隔线上。另一方面, 设 $v_{C,\varepsilon}$ 是鞍节点 p_{\pm} 在一个点 $R_{C,\varepsilon}$ 处相交于 Σ_a 的双曲稳定分离线。从命题 2 中, 我们知道 $Q_{\frac{1}{2},0} = R_{\frac{1}{2},0}$, 以及通过正则坐标 θ 参数化 Σ_a , 我们也知道 $\frac{\partial}{\partial C}(Q_{C,0} - R_{C,0}) \neq 0$ at $C = \frac{1}{2}$ 。因此, 我们可以应用隐函数定理来证明曲线 $C = \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$ 的存在, 该曲线上两点重合并出现鞍结同宿连接。其余的陈述很容易遵循奇异极限下的性质。

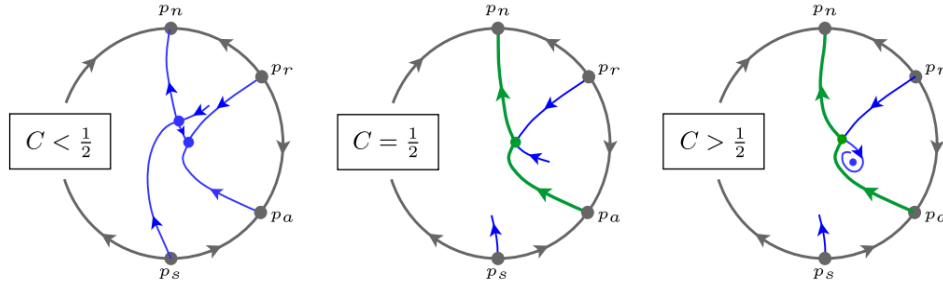


Figure 12: (33) 在 $\varepsilon = 0$ 的庞加莱圆盘上的行为, 沿着曲线 $A_{\ell}(C) = -\frac{1}{16} + \frac{C}{4}$ 。在 $C = \frac{1}{2}$ 处, 点 p_a 连接到 SN 点 p_{\pm} 。对于 $C < \frac{1}{2}$, p_a 连接到节点 p_- , 对于 $C > \frac{1}{2}$, 有一个从 p_a 到 p_n 的两个异宿连接序列, 通过鞍点 p_+ , 在 $C = \frac{3}{4}$ 处共振。

共振同宿分岔

命题 3 沿着 $A_{\ell}(C) = -\frac{1}{16} + \frac{C}{4}$, 对于 $\varepsilon = 0$ 。(33) 有以下行为, 见图 12:

1. 当 $C < \frac{1}{2}$, p_a 的中心分隔线连接到结点 p_- 。
2. 当 $C = \frac{1}{2}$, 发生 SN-分岔 (见命题 2)。
3. 当 $C > \frac{1}{2}$, p_a 的中心分隔线连接到双曲鞍点 p_+ , 鞍点的一个不稳定中心分离线连接到 p_n 。特征值的比值为 $\rho(C) := 2 - 4C < 0$, 鞍点在 $C = \frac{3}{4}$ 处有强共振。
4. 对任何给定的 $C > \frac{1}{2}$, 当远离 $A_{\ell}(C) = -\frac{1}{16} + \frac{C}{4}$ 时, 鞍点连接相对参数 A 有规律的断开。

证明: 从命题 2 的证明中回顾 V , 我们可以看到沿着 $A_{\ell} = -\frac{1}{16} + \frac{C}{4}$, $\{V = 0\}$ 是不变的, 因此包含了 p_a 的中心分离线。很容易验证当 $C > \frac{1}{2}$, 只有结点 p_- 位于 $\{V = 0\}$ 上, 当 $C > \frac{1}{2}$, 只有鞍点 p_+ 在上面。因此, $\{V > 0\}$ 上鞍点的不稳定分离线只能连接到 p_n , 可以直接计算特征值。

最后, 我们用适应平面动力学的 Melnikov 方法证明正则断裂性质: $\dot{X} = f, \dot{Y} = g$, 则

$$fg_A - gf_A = Y^2 - X$$

沿着 $\{V = 0\}$ 的计算结果为 $-\frac{Y}{2} - \frac{1}{8} + \frac{C}{2}$ 。这个函数在 $Y = C - \frac{1}{4}$ 从 $Y = -\infty$ 到鞍点 p_+ 有一个固定的符号。我们现在可以直接参考 [19] (命题 5.7) 其中正则断裂与 Melnikov 计算有关, 被积函数恰好是 $fg_A - gf_A$ (乘以一个特定的指数, 这意味着 Melnikov 积分的收敛性)。由于这个函数是符号固定的, 相关的 Melnikov 积分是非零的; 参见 [23] 对任意维 Melnikov 理论的推广。

定理 4 让 $C_{\min} > \frac{1}{2}$, 存在一个参数平面 $A_\ell(C, \varepsilon) = -\frac{1}{16} + \frac{C}{4} + O(\varepsilon)$, $C > C_{\min}$, 沿该参数平面存在大振幅鞍同宿 (HOM_ℓ) 连接。在这个表面存在一条曲线, 沿着曲线同宿稳定性发生改变: 对于较低的 C 值同宿是稳定的, 对较大的值同宿不稳定。这条曲线中出现了一个表面 $A = A_{\text{snpo}}(C, \varepsilon)$, 沿着这个表面发生了一个 SNPO 分岔。表面 $A_{\text{snpo}}(C, \varepsilon)$ 和 $A_\ell(C, \varepsilon)$ 呈指数接近。

证明: 同宿曲面的存在源于一个类似于定理 3 证明中的推理。稳定性的变化只是特征值的计算: 方程 $\rho(C) = -1$ 在 ε 扰动下被有规律地扰动。

从共振鞍同宿中 SNPO 分支的出现是标准的 (见 [24]), 并基于三个特征: (i) 特征值的比率定期扰乱参数 (C) 的变化, (2) 分离连接中断定期在另一个参数 (A) 的变化, 和 (iii) 发散积分沿同宿环非零。性质 (i) 和 (ii) 直接遵循命题 3 中的奇异极限。性质 (iii) 遵循全局回归机制的慢-快属性: 发散积分计算主要是由通道沿着慢分支 S_a^\pm , 有 $-K/\varepsilon$ 阶的吸引和发散。对于一些 $K > 0$, 快部分和折点部分有的 $O(1)$ 贡献。虽然这个论证不能证明 SNPO 分支是一致定义的极限, 但这一结果的证明是基于鞍点局部 Dulac 映射与返回机制的结合。由于所有的性质都是均匀的, 并且由于全局返回机制在奇异极限下都足够平滑, 因此显示 SNPO 分支的方法在 ε 中是均匀有效的。

图 10 总结了所有观察到的余维 2 分岔和分岔的余维 1 分支。

备注 15 没有其他的分支 (证明省略)

备注 16 定理 4 中定义的同宿曲面 $A_\ell(C, \varepsilon)$ 可以推广到 $C = \frac{1}{2}$, 直到包括它与定理 3 中的 SN 曲面的交点 $A_{\text{sn}}^+(C, \varepsilon)$ 。在奇异极限下, 如图 10 所示, 但对于 $\varepsilon > 0$ 需要证明。在这样的证明中, 我们需要在鞍结奇点 $(x, y) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$ 和参数值 $(a, c) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{2})$ 处再次吹胀向量场, 以便将鞍点与结点分离。这种涉及的技术问题超出了我们在本文中揭示的范围。

备注 17 图 8 和图 10 中所示的 AH、SNPO、HOM 和 HOMs 的分岔曲线相同。为了严格证明这一点, 我们需要在吹胀分析中包含参数 (a, c) , 即我们必须吹胀原点 $(x, y, \varepsilon, a, c) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 。同样, 所涉及的技术细节超出了我们打算在本文中揭示的范围。

7 讨论

兴奋性是神经科学的一个重要学科领域, 其现代探究可以追溯到 Alan Hodgkin 的开创性著作 [1]。他根据电流的注入步数区分了三种神经兴奋性类别, 并观察到相应的不同的频率-电流 (f-I) 曲线, 这仍然是理解神经兴奋性分岔机制的基础。FitzHugh 是第一个使用动力系统技术来定性描述动作电位的产生和阈值现象 [7, 8, 25] 的人。Rinzel 和 Ermentrout [3, 4] 提供了一个基于分岔理论的数学框架来区分这些兴奋性类型: I 型 SNIC 分岔和 II 型 Andronov-Hopf 分岔。

这种由 Rinzel 和 Ermentrout 开创的动力系统方法也被用来解释更复杂的神经活动, 如簇发放模式。在这里, 通过固有的慢速和快速细胞膜过程, 固有的多时间尺度结构被用来解释簇发放模式。在快速子系统中发现的分岔结构为理解簇放电模式的起源提供了一个可能的途径: 例如 [5]。有趣的是, 在一个簇内的的峰模式本身也通常是多个时间尺度的结果。这种松弛类型的行为在簇放电文献中通常被忽略, 因为它意味着考虑 (至少) 三个时间尺度的模型——快、中和慢——这直到最近才成为一个新的研究焦点 [26, 27, 28]。

另一方面, 关于神经兴奋性的文献 (见 [5]) 清楚地使用慢-快分解来解释单峰模型动作电位的产生, 尽管伴随的这种系统的分岔分析往往忽略或只是不使用给定的慢/快结构。本文积极探索了 (二维) 神经模型的奇异性质, 并确定了一种基于慢-快结构的新的奇异分岔——Bogdanov-Takens/SNIC 分岔, 这是理解 I 型和 (部分) II 型兴奋性的关键。从几何奇异摄动理论 [14, 15, 16, 19, 20, 21, 22] 和分岔理论 [17, 24] 中使用现成的工具和结果, 使得我们能够展开这个奇异分岔和识别重要的余维 2 分岔点 Bautin, Bogdanov-Takens, 共振同宿和鞍结点同宿, 总结了 $\varepsilon > 0$ 的分岔情形, 有助于解释 I 型和 II 型兴奋性之间的过渡。例如, 基于参数空间中 Bautin 点的位置, 我们确定一个超临界 Andronov-Hopf 作为 II 型兴奋性的明确指标, 而亚临界 Andronov-Hopf 分岔不一定保证频带 (显著) 有界远离零, 也就是说, 模型可以接近类型

I, 从而接近一个同宿。这种接近类型 I 的另一个重要指标是 cusp 分岔及其相应的鞍结点分支。在 cusp 区域内有三个平衡点, 包括一个鞍点, 它是形成同宿环所必需的。在这种 I-II 型过渡机制中, 被认为是 II 型的模型神经元的特性可能通常表现出与 I 型相关的行为, 反之亦然。当从这样一个简单的兴奋性分类推断性质时必须小心; 参见 [5], 其中许多分岔和观察结果已经被强调。

我们的分岔结果为计算神经科学界提供了重要的信息。我们证明了一个与 I 型兴奋性相关的 SNIC 分岔只存在于一个小的参数范围内。因此, 它更有可能在一个参数的神经模型延续中观察到一个 (大的) 鞍型同宿性, 尽管它可能非常接近一个鞍结点, 因此, 被误认为是一个 SNIC。类似地, 如果一个人观察到靠近鞍结点的亚临界 Andronov-Hopf 分岔, 特别是相应的周期轨道终止在一个 (小的) 同宿轨附近, 那么另一个观察到的 (大的) 同宿不能是 SNIC。

数值分岔分析的一个主要障碍不仅是潜在问题的刚度, 而且是不同分岔分支的接近程度。我们的分岔结果应该被看作是数值延拓的一个有用的指导。例如, 所给出的数值分岔图, 如 [29] 中的 Morris-Lecar 神经模型, 如图 6, 或 [30] 中的二维钠峰值模型, 如图 1-2 中是不完整的, 因为指数闭合分支 HOM_s , HOM_ℓ , SNPO 和 SNIC (图 8) 难以数值区分, 并且识别某些余维-2 点 (图 10) 如 Bogdanov-Takens、共振 HOM_ℓ and SN - HOM_ℓ 是一项非常困难的任务。

参考文献

- [1] Hodgkin AI. The local electric changes associated with repetitive action in a non-medullated axon. *J Physiol.* 1948;107(2):165-81.
- [2] Meng X, Huguet G, Rinzel J. Type III excitability, slope sensitivity and coincidence detection. *Discrete Contin Dyn Syst.* 2012;32(8):2729-57.
- [3] Rinzel J. Excitation dynamics: insights from simplified membrane models. *Fed Proc.* 1985;44:29446.
- [4] Rinzel J, Ermentrout G. Analysis of neural excitability and oscillations. In: Koch C, Segev I, editors. *Neuronal modeling: from synapses to networks.* Cambridge: MIT Press; 1998.
- [5] Izhikevich EM. *Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting.* Cambridge: MIT Press; 2007.
- [6] Prescott SA, De Koninck Y, Sejnowski TJ. Biophysical basis for three distinct dynamical mechanism of action potential initiation. *PLoS Comput Biol.* 2008;4(10): e1000198.
- [7] FitzHugh R. Thresholds and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations. *J Gen Physiol.* 1960;43:867-96.
- [8] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys J.* 1961;1:455-66.
- [9] Morris C, Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle-fiber. *Biophys J.* 1981;35(1):193213.
- [10] Wechselberger M, Mitry J, Rinzel J. Canard theory and excitability. In: *Nonautonomous dynamical systems in the life sciences.* Cham: Springer; 2013. p. 89-132.
- [11] Rubin JE, Terman D. Geometric singular perturbation analysis of neuronal dynamics. In: *Handbook of dynamical systems.* Vol. 2. Amsterdam: Elsevier; 2002. p. 93-146.
- [12] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J Differ Equ.* 1979;31(1):53-98.
- [13] Jones CKRT. Geometric singular perturbation theory. In: *Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994).* Heidelberg: Springer; 1995. p. 44-118. (Lecture notes in mathematics; vol. 1609).
- [14] Dumortier F, Roussarie R. *Canard cycles and center manifolds.* Providence: Am Math Soc; 1996. (Memoirs of the American Mathematical Society; vol. 577).
- [15] Krupa M, Szmolyan P. Relaxation oscillation and canard explosion. *J Differ Equ.* 2001;174(2):31268.
- [16] De Maesschalck P, Dumortier F. Slow-fast Bogdanov-Takens bifurcations. *J Differ Equ.* 2011;250(2):1000-25.
- [17] Kuznetsov YA. *Elements of applied bifurcation theory.* New York: Springer; 1995. (Applied mathematical sciences; vol. 112).
- [18] Eckhaus W. Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks. In: *Asymptotic analysis, II.* Berlin: Springer; 1983. p. 449-94. (Lecture notes in mathematics; vol. 985).
- [19] De Maesschalck P, Dumortier F. Canard solutions at non-generic turning points. *Trans Am Math Soc.* 2006;358(5):2291-334 (electronic).

- [20] De Maesschalck P, Dumortier F. Canard cycles in the presence of slow dynamics with singularities. *Proc R Soc Edinb, Sect A*. 2008;138(2):265-99.
- [21] De Maesschalck P, Dumortier F. Time analysis and entry-exit relation near planar turning points. *J Differ Equ*. 2005;215(2):225-67.
- [22] Boutat M. L'étude à l'infini de la bifurcation de Takens-Bogdanov. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*. 1993;316(2):183-6.
- [23] Wechselberger M. Extending Melnikov-theory to invariant manifolds on non-compact domains. *Dyn Syst*. 2002;17:215-33.
- [24] Homburg AJ, Sandstede B. Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields. In: *Handbook of dynamical systems*. Vol. 3. Amsterdam: Elsevier; 2010. p. 379-524.
- [25] FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. *Bull Math Biophys*. 1955;17:257-78.
- [26] Krupa M, Popović N, Kopell N. Mixed-mode oscillations in three time-scale systems: a prototypical example. *SIAM J Appl Dyn Syst*. 2008;7(2):361-420.
- [27] Vo T, Bertram R, Wechselberger M. Multiple geometric viewpoints of mixed mode dynamics associated with pseudoplateau bursting. *SIAM J Appl Dyn Syst*. 2013;12(2):789-830.
- [28] Nan P, Wang Y, Kirk V, Rubin J. Understanding and distinguishing three time scale oscillations: case study in a coupled Morris-Lecar system. *SIAM J Appl Dyn Syst*. 2015. doi:10.1137/140985494
- [29] Tsumoto K, Kitajima H, Yoshinaga T, Aihara K, Kawakami H. Bifurcations in Morris-Lecar neuron model. *Neurocomputing*. 2006;69:293-316.
- [30] Guckenheimer J, Tien JH, Willms AR. Bifurcations in the fast dynamics of neurons: implications for bursting. In: Coombes S, Bressloff PC, editors. *Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system*. Singapore: World Scientific; 2005. p. 89-122.