

# 在规范的三时间尺度模型中的峰添加：超慢爆炸和折-鞍鸭解

Mathieu Desroches<sup>1</sup> and Vivien Kirk<sup>2</sup>

<sup>1</sup>MathNeuro Team, Inria Sophia Antipolis M'editerran'ee, 2004 route des Lucioles - BP93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France, mathieu.desroches@inria.fr.

<sup>2</sup>Department of Mathematics, University of Auckland, Private Bag 92019 Auckland, New Zealand, v.kirk@auckland.ac.nz.

Published 17 July 2018

## Abstract

我们在一个具有三时间尺度的常微分方程模型中研究了复杂簇振荡的起源。我们表明，在这个模型中，簇解来自于一个 Hopf 分岔，随后是一系列的峰添加转换，这让人想起之前在具有两时间尺度的系统中观察到的峰添加转换。然而，在这个三时间尺度的环境中，这个过程细节可能比在两时间尺度的系统中要复杂得多。特别地，我们发现峰增加可能涉及发生在两个不同时间尺度上的鸭解爆炸，并与折鞍奇异点附近的通道有关。我们证明了发生的峰添加转变的形式取决于某些奇异极限系统的几何形状，特别是临界流形和超低流形的相对位置。我们还表明，与在双时间尺度系统中峰添加的情况不同，在我们的模型中，一个新的峰值的出现通常与簇振荡周期内的局部最大值无关。

## 1 引言

许多自然系统表现出多个时间尺度，也就是说，具有系统中的一个或多个进程比其他进程的演化得快得多的特性。在具有两个时间尺度的系统中，典型行为已经知道很多，如弛豫振荡、混合模式振荡和爆炸等现象存在于广泛的模型中；例如 [1,2,15,18]。然而，对于具有三个或更多时间尺度的系统的典型动力学，我们知之甚少，最近的一些工作有 [20,22,26,31]。

在这篇文章中，我们感兴趣的是解释在一个具有三时间尺度的常微分方程模型中观察到的复杂簇动力学的起源。该模型首先是由 Nan[25] 构建的，其解模拟了在 *Rosenzweig MacArthur* 食物链模型 [3,4,5,28] 中所看到的复杂振荡。这是一个最小的模型，它具有最小的维数和最简单的非线性性质，与感兴趣的行为一致，其优点是比食物链模型更容易操纵，可以相对地移动与模型相关的某些几何特征。我们对这个模型感兴趣有两个原因。首先，我们希望了解 Nan 在模型中观察到的独特振荡模式背后的机制，特别是阐明模型中不同的时间尺度如何相互作用以产生复杂的动力学。其次，模型参数化的方式使其成为一个理想的设置，以研究三尺度动态的一般特征；虽然我们主要关注的是解释模型在特定参数下的动力学，我们相信对于系统在不同参数下，彻底理解模型的动力学将有更广泛的相关性，特别是将有助于整体理解两个时间尺度和三个时间尺度模型之间的差异。

我们所考虑的模型的形式为 [25]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - (a_3x^3 - a_2x^2 + a_1x + a_0) := f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \delta (b_2x^2 - b_1x - c_1y - z + c_0) := \delta g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= \delta \varepsilon (x - \gamma) := \delta \varepsilon h(x),\end{aligned}$$

其中  $x, y, z \in \mathbb{R}$ 。常数  $\delta$  和  $\varepsilon$  控制模型动力学中的时间尺度分离，下面将进一步解释；我们总是考虑这些常数的小非负值，通常是  $\delta = 0.001$  和  $\varepsilon = 0.1$ 。参数  $\gamma$  是我们模型中的主要分岔参数；我们考虑  $\gamma \in [0, 1]$ 。我们按照 Nan [25] 选择的其他参数值，除非另有说明，这些参数值被设置为表 1 中指定的值。

表 1: 模型 (1) 中参数的默认值

$a_0$	0.1	$a_1$	1.56
$a_2$	5.1	$a_3$	4.0
$b_1$	80.25	$b_2$	60.0
$c_0$	27.75	$c_1$	12.5
$\delta$	0.001	$\varepsilon$	0.1

我们注意到，附录 A 中给出了另一种参数化系统的方法，即各种系数用其他常数表示。这种形式对于操纵模型的某些几何特征很有用，这将在第 4 节和第 5 节中进一步讨论。

对于选择的  $\gamma = 0.92$ ，系统 (1) 具有吸引周期解，如图 1 所示。不同的时间尺度在时间序列中是明显的：在  $x$  和  $y$  变量中出现两个时间尺度的弛豫振荡，在较慢的第三时间尺度  $z$  上出现上升和下降。该动力学与 Hindmarsh-Rose 模型 [14] 和许多类似的系统 [15,27] 中常见的簇振荡有一些相似之处，但 Hindmarsh-Rose 模型中簇期间的峰值通常不是弛豫振荡，这是该模型只有两个时间尺度的反映。

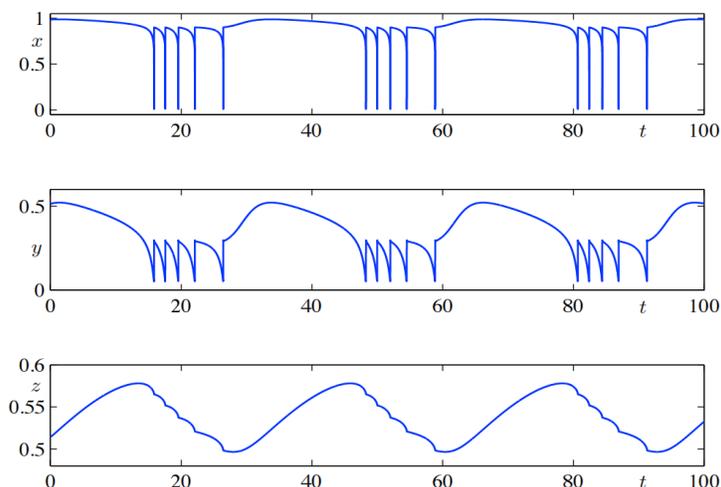


Figure 1: 时间序列显示系统 (1) 的吸引振荡， $\gamma = 0.92$ ，其他参数如表 1 所示。

图 1 中的时间序列显示，在每次簇发放期间， $x$  和  $y$  的振幅有 5 个值，但是，正如我们下面所示，不同的  $\gamma$  会导致从簇中添加或删除峰。[7,8,12,27,30] 在两个时间尺度的簇发放系统中得到了广泛的研究。本文的一个主要目的是研究我们的三时间尺度系统中的峰添加过程，并表明与在双时间尺度系统中看到的峰添加有重要的区别。特别是，我们观察到一些过程的特性类似于 Hindmarsh-Rose 系统（两时间尺度和一个慢的变量）和一些类似于方波簇的峰添加过程的特性（两时间尺度和两个慢的变量）。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们总结了来自几何奇异摄动理论 (GSPT) 的思想，随后我们将使用它们来解释我们模型的动力学。在第 3 节中，我们给出了模型在参数  $\gamma$  变化时的动力学概述，并通过数值模拟和模型的延续得到结果。在第 4 节中，我们详细研究了模型中的峰添加，在参数体系中，所有三个时间尺度都是至关重要的。在第 5 节中，我们总结了我们的结果及其与文献中早期工作的关系，并对我们的工作的可能扩展做出了一些说明。

## 2 初步分析

在我们对系统 (1) 的分析中，我们将利用不同时间尺度的存在，使我们能够使用来自 GSPT [11,16,19] 和吹胀理论 [10,19,29,32] 的方法。我们最感兴趣的是  $x, y, z < 1$  相空间的正八分体。在这种情况下，(1) 中定义的函数  $f, g$  和  $h$  都近似为  $O(1)$ ，这意味着 (1) 中三个方程的右侧分别近似为  $O(1), O(\delta)$  和  $O(\delta\varepsilon)$ 。对于足够小的  $\delta$  和  $\varepsilon$ ，我们可以把这些变量看作是在三个不同的时间尺度上演化的：我们说  $x$  是一个快变量， $y$  是慢的， $z$  是超慢的。因此， $\delta$  可以看作是编码快时间尺度和慢时间尺度之间的分离，而  $\varepsilon$  表示慢时间尺度和超慢时间尺度之间的分离。本文的目的主要时解释在  $\delta = 0.001$  和  $\varepsilon = 0.1$  时观察到的动力学现象；在  $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$  中，类似的动力学更普遍地存在。将看到， $\delta$  和  $\varepsilon$  选择的相对大小通过将系统作为一个双尺度系统（一个快和两个慢变量）允许我们取得一些进展，但我们下面开始定义子系统和适合三时间尺度的奇异限制。

根据 GSPT 的标准方法，我们使用不同的时间尺度定义了模型的等效版本。系统 (1) 是使用（快）时间  $t$  写的，被称为快系统。定义  $t_s = \delta t$ ，我们得到了慢系统，

$$\begin{aligned}\delta \frac{dx}{dt_s} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt_s} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt_s} &= \varepsilon h(x),\end{aligned}$$

其中， $f, g$  和  $h$  为系统 (1) 的定义。定义  $t_{ss} = \varepsilon t_s = \varepsilon \delta t$ ，我们得到了超慢系统，

$$\begin{aligned}\varepsilon \delta \frac{dx}{dt_{ss}} &= f(x, y) \\ \varepsilon \frac{dy}{dt_{ss}} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt_{ss}} &= h(x).\end{aligned}$$

如果  $\varepsilon \neq 0$  和  $\delta \neq 0$ ，那么这三个模型是等价的，但是当我们让  $\varepsilon$  和  $\delta$  中的一个或两个趋于零时，它们产生非等价的系统。在本工作中，我们将假设  $\delta \ll \varepsilon$ ，考虑  $\varepsilon > 0$  时，让  $\delta \rightarrow 0$  得到的  $\varepsilon$  依赖的奇异极限，或者让  $\varepsilon$  固定然后让  $\delta \rightarrow 0$ ，然后再令  $\varepsilon \rightarrow 0$  得到的双奇异极限。

让 (1) 中的  $\delta \rightarrow 0$  产生快层问题，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{dz}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

因此，在快层问题中，对于常数  $y_0$  和  $z_0$ ，快变量  $x$  沿着由  $(x, y, z) = (x, y_0, z_0)$  定义的一维快纤维演化。(4) 的二维平衡点集，

$$S_0 = \{(x, y, z) \mid f(x, y) = 0\},$$

被叫做临界流形，对于我们选择的  $f$ ，临界流形为

$$S_0 = \{(x, y, z) \mid y = a_3 x^3 - a_2 x^2 + a_1 x + a_0\}$$

是相对于  $y$  折叠的曲面，如图 2 所示；图 2 中的折线标记为  $L^-$  和  $L^+$ ，表 1 中的参数值出现在  $x = 0.20$  和  $x = 0.65$  处。折叠将  $S_0$  分为吸引和排斥层；位于两条折曲线之间的内层是排斥的，因为在快层问题中，相应的平衡是排斥的，两个外层是吸引的。

在慢系统 (2) 中令  $\delta \rightarrow 0$ ，得到了一个不同的奇异极限系统。这就产生了微分-代数慢简化问题

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt_s} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt_s} &= \varepsilon h(x), \end{aligned}$$

它描述了限制在  $S_0$  范围内的动力学。对于足够小的  $\varepsilon$ ，这是一个两时间尺度的问题。在 (5) 中让  $\varepsilon \rightarrow 0$  给出了慢层问题，

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt_s} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt_s} &= 0. \end{aligned}$$

因此，在慢层问题中，对于常数  $z_0$  和限制在  $S_0$  的  $(x, y, z_0)$ ，慢变量  $y$  沿着  $(x, y, z) = (x, y, z_0)$  定义的一维纤维演化。(6) 的一维平衡点集，

$$\mathcal{L}_0 = \{(x, y, z) \mid f(x, y) = 0 \text{ and } g(x, y, z) = 0\},$$

被称为超慢流形。对于我们选择的  $f$  和  $g$ ，超慢流形是

$$\mathcal{L}_0 = \{(x, y, z) \mid z = -c_1 a_3 x^3 + (c_1 a_2 + b_2) x^2 - (c_1 a_1 + b_1) x + c_0 - c_1 a_0\},$$

是关于  $z$  折叠的曲线，如图 2 所示；折点标记为  $T^-$  和  $T^+$ ，表 1 中的参值分别在  $x = 0.70$  和  $x = 0.95$ 。 $T^-$  和  $T^+$  将  $S_0$  划分为限制在  $S_0$  的吸引和排斥的分支；位于  $T^-$  和  $T^+$  之间的内部分支是排斥的，两个外部分支是吸引的（在  $S_0$  内）。

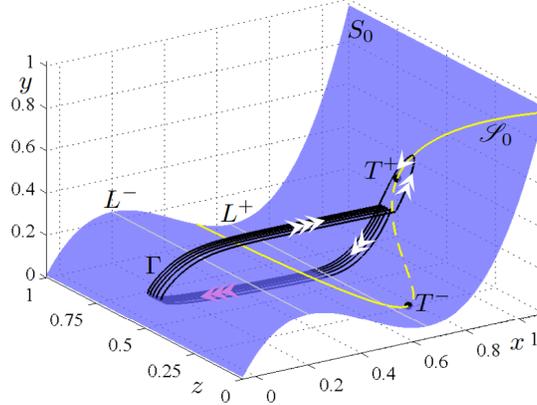


Figure 2: 系统 (1) 的临界流形  $S_0$  (蓝色曲线) 和超慢流形  $L_0$  (黄色曲线)，参数值如表 1 所示。黄色曲线的实线（虚线）表示  $L_0$  的吸引（排斥）的部分。标记为  $L^-$  和  $L^+$  的线为  $S_0$  相对于  $y$  的折点，标记为  $T^-$  和  $T^+$  的点为  $S_0$  相对于  $z$  的折点。注意， $S_0$  和  $L_0$  的位置与分岔参数  $\gamma$  无关。还显示了一个稳定的簇周期  $\Gamma$ ，由系统 (1) 当  $\gamma = 0.92$  的直接模拟得到。单箭头（双箭头和三箭头）表示演化速度为超慢（慢和快）时间尺度的轨道段。

为了完整起见，我们又定义了一个系统，即超慢简化问题，它是通过让 (3) 中的  $\varepsilon \rightarrow 0$  而得到的

$$\begin{aligned}
0 &= f(x, y) \\
0 &= g(x, y, z) \\
\frac{dz}{dt_{ss}} &= h(x).
\end{aligned}$$

该系统确定了限制在  $L_0$  的动力学。在我们的例子中，由于  $h$  很简单，我们很容易看到在  $x > \gamma$  时， $z$  坐标增加，在  $x < \gamma$  时减小；对于  $S_0$  上的动力学，更一般地，在整个相空间中都是如此。

为了理解我们系统的动力学行为，更仔细地研究限制在  $S_0$  的动力学是有用的。使用来自 GSPT 的想法，我们计算了慢约化流的投影，方程 (5)，在  $(x, z)$  平面上。具体来说，由于在  $S_0$  上  $f(x, y) = 0$ ，关于  $t_s$  微分得到

$$f_y \frac{dy}{dt_s} = -f_x \frac{dx}{dt_s}.$$

由于某些函数  $F$  的  $S_0$  可以表示为  $y = F(x)$ ，所以我们可以重新整理 (5) 中的方程得到

$$\begin{aligned}
-f_x \frac{dx}{dt_s} &= f_y g(x, F(x), z) \\
\frac{dz}{dt_s} &= \varepsilon h(x),
\end{aligned}$$

重新缩放时间，以便  $t_s = (-f_x) \tau$  允许我们移动在  $f_x = 0$  时 (8) 产生的（发生在折线  $L^-$  和  $L^+$  上）的奇点。然后我们得到了去奇异慢约化系统 (DSRS)，

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= f_y g(x, F(x), z) \\
\frac{dz}{d\tau} &= -\varepsilon f_x h(x).
\end{aligned}$$

注意，由于  $-f_x$  在  $S_0$  的吸引段上为正，在排斥段上为负，对应于  $S_0$  的排斥段上的轨道相对于慢系统 (5) 的轨道 (9)（以及其投影 (8)）。使用与 (1) 相关联的特定的  $f, g$  和  $h$ ，系统 (9) 变成

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= -c_1 a_3 x^3 + (b_2 + c_1 a_2) x^2 - (b_1 + c_1 a_1) x + (c_0 - c_1 a_0) - z \\
\frac{dz}{d\tau} &= \varepsilon (x - \gamma) (3a_3 x^2 - 2a_2 x + a_1).
\end{aligned}$$

对于足够小的  $\varepsilon$ ，系统 (9) 是一个双时间尺度系统，时间尺度的分离与  $\varepsilon$  成正比。在重写系统 (9) 的相关的慢时间  $\tilde{\tau} = \varepsilon \tau$  后，我们可以使用奇异极限  $\varepsilon \rightarrow 0$  来简化和去奇异化，按照类似的过程。这样做可以得到一个投影在  $x$  轴上的  $S_0$  上的动力学的方程：

$$\frac{dx}{d\tilde{\tau}} = -g_z f_x h(x),$$

其中， $\tilde{\tau} = -(g_x + F_x) \hat{\tau}$ 。(11) 的轨道对应于  $L_0$  的排斥分支，相对于 (9) 的轨道有一个相反的时间方向。对于我们选择的参数， $L_0$  的排斥分支完全包含在  $S_0$  的吸引段中，因此相对于整个系统的动力学没有进一步的符号变化。考虑到这个版本的动力学，我们提供了关于  $L_0$  在接近  $L_0$  的折叠时的一个吸引分支解的行为信息，下面将进一步解释。使用与 (1) 相关联的特定的  $f, g$  和  $h$ ，系统 (11) 变为

$$\frac{dx}{d\tilde{\tau}} = -(x - \gamma) (3a_3 x^2 - 2a_2 x + a_1)$$

利用上述定义的各种奇异极限系统和 GSPT 的思想，可以理解在  $S_0$  的吸引段附近和  $\mathcal{L}_0$  的吸引分支附近的整个系统的动力学。一个基本思想是临界流形和超低流形的正规双曲性。特别地，固定  $\varepsilon$  并将  $\delta$  视为一个小的正常数，如果快层问题 (4) 的雅可比矩阵没有零实部的特征值，则  $S_0$  在特定点上为正规双曲的。在我们的例子中， $S_0$  通常是正规双曲的，除

了在折曲线  $L^+$  和  $L^-$  上。然后 Fenichel 理论保证了接近  $S_0$  三个段的光滑流形的持久性，这些流形上的动力学是在慢简化问题 (5) 中对  $S_0$  上的动力学的平滑扰动。同样地，由于  $\varepsilon$  很小， $L_0$  上的动力学本身就是一个双时间尺度的问题；让  $\varepsilon \rightarrow 0$ ，我们发现  $L_0$  通常是双曲的，除了在其转折点， $T^+$  和  $T^-$ 。然后，Fenichel 理论保证了接近  $L_0$  的三个分支的光滑流形的持久性，而这些流形上的动力学是在 (5) 内的  $L_0$  上动力学的平滑扰动。

$S_0$  附近的动力学通常不是正规双曲的，可以用吹胀理论 [10,19,29,32] 发现。特别是，吸引和排斥慢流形可能在临界流形的非双曲区域附近相交；这样的交点对应于鸭解轨迹，这对于理解我们系统中的峰添加非常重要。同样有趣的是折奇点，也就是说，DSRS 的平衡点，而不是 (8) 的平衡点。折奇点对应于慢流形的点，在那里许多轨迹可以在有限时间内从  $S_0$  的吸引到排斥段；通过折奇点的轨迹是根据（奇异）鸭解定义的。

鞍型折奇点对于我们解释系统动力学 (1) 至关重要。这种折奇点有两个特殊的鸭解，一个真鸭和一个伪鸭，与 DSRS 中鞍平衡的稳定和不稳定流形有关，我们将在后面的章节中进一步讨论这些；关于折奇点的背景材料见 [6]。可以直接证明 (9) 的折奇点必须满足这些条件

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y g(x, F(x), z) &= 0. \end{aligned}$$

同样，利用吹胀理论，通常可以推导出  $L_0$  不是正规双曲的点附近的动力学。在极限  $\varepsilon \rightarrow 0$  中，(11) 发生在  $L_0$  转折点的平衡产生所谓的鸭解点，这是相关临界流形为一维情况下的折奇点的模拟；这些点出现在一维吸引和排斥流形（作为  $L_0$  分支的扰动出现）重合的参数值附近，并与鸭解轨迹的存在有关。

鸭解点和折奇点（至少在所谓的 II 型折鞍结奇点附近）都可以与鸭解环的出现相关联，鸭解环是包含鸭解轨迹段的周期轨道。从分岔理论的角度来看，鸭解环诞生于奇异 Hopf 分岔 [13]，其特征是周期轨道的振幅快速增长，在分岔图中给出周期轨道的近垂直分支 [6]。

标准 GSPT 的应用现在允许我们对 (1) 的动力学做出一些一般陈述。对于足够小的  $\delta$  和  $\varepsilon$ ，整个系统的轨道通常会紧跟  $S_0$  (或  $L_0$ ) 的吸引段 (或分支)，直到它达到  $S_0$  (或  $L_0$ ) 的折点。然后，它要么以更快的时间尺度跳到另一个吸引片 (或分支) 的  $S_0$  (或  $L_0$ ) 或开始鸭解段，在此期间，它跟随  $S_0$  (或  $L_0$ ) 的排斥段 (或分支)。轨道通常最终会离开排斥层或分支，并以更快的时间尺度过渡到吸引层或分支之一。这样，整个系统的轨道可以理解为来自慢简化流或超慢简化流的一系列轨道段的扰动，其中与快或慢层问题的轨道段相交。

### 3 模型动力学的概述

使用 AUTO 软件包 [9] 进行计算，得到如图 3(a) 所示的系统 (1) 的部分分岔图。对于参数  $\gamma$  的每一个值，都有一个平衡解。平衡分支在标记为  $HB_1, HB_2, HB_3$  和  $HB_4$  的 Hopf 分岔处稳定性发生变化。由  $HB_1$  和  $HB_2$  产生的周期解的分支终止于  $\gamma \approx 0.90$  ( $Hom_1$ ) 和  $\gamma \approx 0.76$  ( $Hom_2$ ) 的平衡点同宿分岔；图 3(b) 和 (c) 中显示了靠近同宿分岔的这些分支上周期轨道的相位图。

由  $HB_3$  分岔的周期解分支在标记为  $HPo$  的点处终止于周期轨道的同宿分岔。从  $HB_3$  开始的分支上的周期轨道的时间序列和相位图，对于  $\gamma$  非常接近其在  $HPo$  处的值，如图 3(d) (黑色曲线) 和 (e) 所示。在图 (d) (红色曲线) 中也显示了在相同  $\gamma$  值下由  $HB_2$  产生的分支上的周期轨道；正是这个周期轨道在  $HPo$  处发生同宿分岔。

由  $HB_4$  产生的周期轨道分支在  $\gamma \approx 0.90$  的同宿平衡分支结束之前经历了一系列复杂的转变；该分支的放大如图 3(f) 所示，其中终止该分支的同宿分支被标记为  $Hom_4$ 。沿着这最后一个分支发生的精确变化序列是第 4.1 节的重点。

通过考虑系统 (10) 的动力学，可以进一步了解图 3(a) 所示的分岔。回想一下，这些方程在极限  $\delta \rightarrow 0$  中近似于  $S_0$  上的动力学。这个系统有两种类型的平衡点。所谓的普通奇点出现在

$$x_o = \gamma, \quad z_o = -c_1 a_3 \gamma^3 + (b_2 + c_1 a_2) \gamma^2 - (b_1 + c_1 a_1) \gamma + (c_0 - c_1 a_0).$$

这些对应于 (1) 的真奇点，并发生在对于每个  $\gamma$ ， $z$ -零斜线（即平面  $x = \gamma$ ）切割  $L_0$  的点上。此外，还有折奇点的两个分支，其  $x$  坐标为

$$x_{L^+} = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}}{3a_3} \text{ and } x_{L^-} = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}}{3a_3}$$

$z$  坐标为

$$z_{L^\pm} = -c_1a_3x_{L^\pm}^3 + (b_2 + c_1a_2)c_1a_3x_{L^\pm}^2 - (b_1 + c_1a_1)c_1a_3x_{L^\pm} + (c_0 - c_1a_0).$$

这些折奇异点对应于  $L_0$  与折线  $L^-$  和  $L^+$  相交的点；对于表 1 中给出的参数值， $x_{L^+} = 0.65$  和  $x_{L^-} = 0.2$ 。如前所述，折奇异点并不对应于整个系统的真实奇点，但是  $(x_{L^+}, z_{L^+})$ ，在  $x = 0.65$  处的折奇异点，对于我们的模型中峰发放的开始是非常重要的，这将在 4.1 节中讨论。

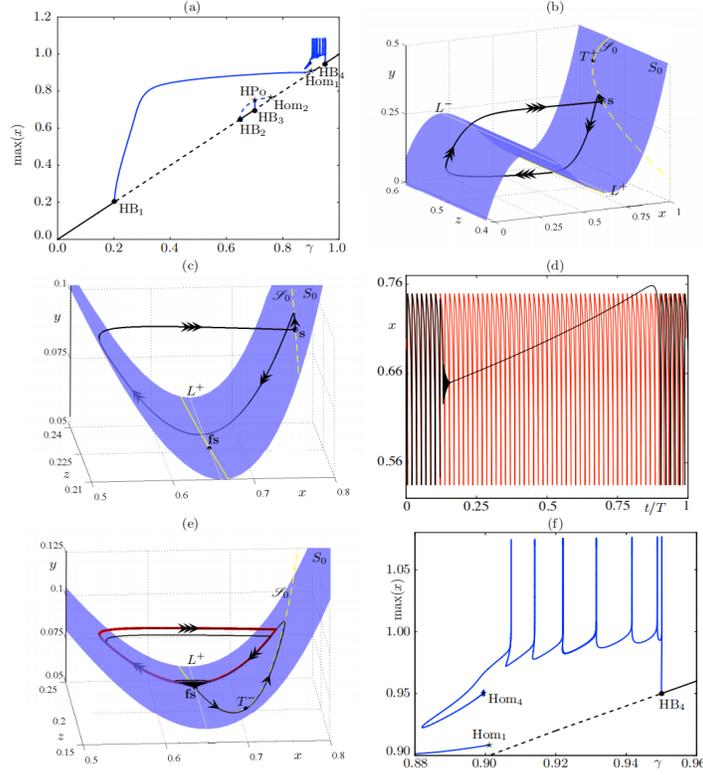


Figure 3: (a) (1) 的部分分岔图，显示了  $\gamma \in [0, 1]$  的平衡点和周期解。黑色曲线表示平衡解 (实线表示稳定，虚线表示不稳定)。蓝色曲线表示周期解的最大值 (稳定性未注明)。符号  $HB_1 - HB_4$  表示 Hopf 分岔的位置， $Hom_1$  和  $Hom_2$  表示平衡解的同宿分岔， $HP_0$  表示周期轨道同宿分岔的位置。(b)  $\gamma$  值非常接近  $Hom_1$  时  $HB_1$  分支上周期轨道的相位图。点标记的是平衡解的位置。所有其他符号和颜色 (此处和图 (c) 和 (e)) 与图 2 相同。(c) 在  $\gamma$  值非常接近  $Hom_2$  时， $HB_2$  产生的分支上的周期轨道相图。标记为 fs 的点表示折奇异点的位置。(d) 黑色曲线是在非常接近  $HP_0$  值时  $HB_3$  分支上的周期轨道的时间序列。红色曲线显示了在相同  $\gamma$  值下  $HB_2$  分支上周期轨道的时间序列。(e) (d) 以黑色和红色标出周期轨道的相位图。(f) 图 (a) 的放大部分， $HB_4$  产生的周期轨道分支的更多细节；这个分支终止于平衡点  $Hom_4$  的同宿分支。

方程 (10) 的分岔图如图 4 所示。普通奇点的分支改变了标记为  $HB_3$  和  $HB_4$  的 Hopf 分岔处的稳定性。这些是由  $z$ -零斜先跨越  $L_0$  的折叠而产生的奇异 Hopf 分岔。正如 GSPT 所预期的那样，这些 Hopf 分岔在整个系统中持续存在，在图 3(a) 中成为  $HB_3$  和  $HB_4$ ，其参数值接近图 4 中的相应值。在方程 (10) 和图 4 中，由  $HB_3$  和  $HB_4$  产生的周期轨道的分支在与鞍型折奇异点碰撞时，都终止于同宿分岔处。这些同宿分岔在整个系统中被更复杂的分岔序列所取代，如图 3(a) 和 (f) 所示。作为参考，我们注意到对于  $\gamma > x_{L^+} = 0.65$ ， $(x_{L^+}, z_{L^+})$  是 (10) 的鞍点，特征值近似由  $\lambda_1 = 2.4\varepsilon(\gamma - 0.65)$  和  $\lambda_2 = -2.25 - \lambda_1$  给出。

(10) 的普通奇点分支的稳定性在两个跨临界分支处变化, 如图 4 中的  $T_1$  和  $T_2$ , 当该分支跨越折奇异点的分支时, 也会发生变化。这些分岔在整个模型中成为奇异的 Hopf 分岔, 在图 3(a) 中表示为  $HB_1$  和  $HB_2$ , 并与跨越  $S_0$  折点的  $z$ -零斜先有关。我们已经检查了, 随着  $\delta$  变小, 整个模型中周期轨道的分岔分支变得更陡, 正如奇异 Hopf 分岔所预期的那样。

## 4 峰添加过渡

如图 1 所示, 具有表 1 中参数值的系统 (1) 对某些  $\gamma$  的选择簇发放解。图 1 所示的解每个簇有 5 个峰, 但这个数字可以随着  $\gamma$  或其他参数的变化而变化。我们感兴趣的是在参数变化时可以添加或减去峰的机制。在本节中, 我们将讨论两种类型的峰添加过渡, 一种是三种不同的时间尺度在添加单个峰时很重要, 另一种是只有两个时间尺度发挥重要作用。

首先, 我们阐明了我们在系统 (1) 中所说的峰的含义, 并给出了我们用来决定何时添加了一个新的峰的标准。我们将峰定义为系统周期吸引子的一部分, 并包含最快时间尺度上的两个部分。因此, 峰对应的是遵循  $S_0$  的两个吸引的轨道段。根据这个定义, 带有头部的折鞍鸭解属于峰, 即使它们只存在于一个较窄的参数间隔中。类似地, 如图 6 所示的 11 所示, 也符合我们对峰的定义, 但也是瞬时存在型。我们感兴趣的是完全发展的、稳健的峰的出现, 即没有超慢鸭解段的弛豫振荡, 如图 6 的 12 所示。在我们的系统中, 在周期轨道包含最大折鞍段的参数值后不久, 峰很快就会出现, 如图 6 的 10 所示。因此, 对于我们的系统, 一个计算方便的 (如果近似的) 新峰的准则是折鞍鸭解段达到  $L^-$  的点, 即  $x = 0.2$ 。

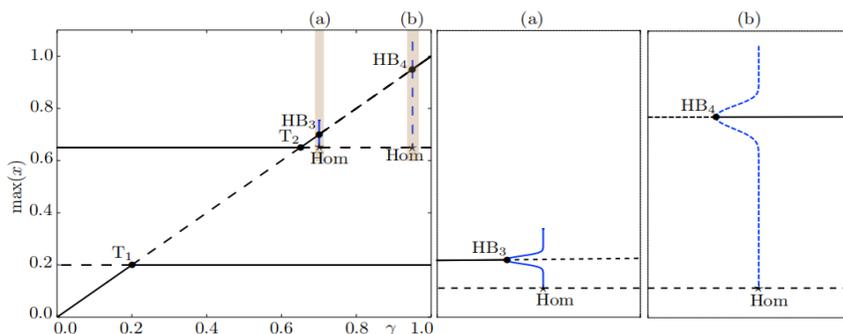


Figure 4: 系统 (10) 的分岔图如图所示。对角线表示普通奇点的分支 (实线表示稳定, 虚线表示不稳定)。两条水平线表示折奇异点分支 (实线表示稳定, 虚线表示不稳定)。普通和折奇异点在标记为  $T_1$  和  $T_2$  的跨临界分岔处相交。近垂直曲线 (蓝色) 表示周期解的两个分支 (两个分支都不稳定) 上的最大值和最小值, 每个分支都由普通奇点的 hopf 分岔 (HB) 引起。左图阴影部分的放大显示在右边的两个图中。周期解的每个分支终止于一个同宿分岔, 分支在  $x = 0.65$  处与折奇异点碰撞。

### 4.1 利用三个时间尺度的峰添加

在系统 (1) 中可以看到一个涉及三个时间尺度的峰添加转变的例子, 其参数值如表 1 所示, 并且发生在图 3(f) 中标记为  $HB_4$  的 Hopf 分岔产生的周期解的分支上。在这一体系中添加一个峰是鸭解介导的过程, 它涉及到与慢和超慢时间尺度相关的鸭解爆炸, 以及与靠近折鞍点 ( $x_{L^+}$   $z_{L^+}$ ) 的通道相关的鸭解轨道。下面, 我们描述了观察到的变化, 即  $\gamma$  从  $HB_4$  值减小 ( $\gamma$  刚好大于 0.95), 直到周期轨道有一个峰 ( $\gamma$  刚好小于 0.95); 第二个和随后的值的增加以类似的方式发生。我们注意到系统 (1) 的平衡点的  $x$  坐标等于  $\gamma$ , 这意味着它的位置在第一个加峰过渡过程中几乎没有变化。

该转变发生在以下步骤中, 相应的相位图如图 5 和图 6 所示。

(1) 当平衡点穿过  $T^+$  时, 超低流形  $L_0$  的上折点, 出现奇异的 Hopf 分岔, 形成了一个小的鸭解环, 如图 5 中 1 所示。鸭解环包含出现在慢和超慢时间尺度上的段。

(2) 鸭解环增长到包含一个最大鸭解, 当它的一部分到达  $T^-$  附近,  $L_0$  的下折点; 见图 5 中 2 所示。

(3) 然后环沿  $L_0$  的左吸引分支形成一个段, 变成带头鸭解环; 见图 5 中 3。到目前为止, 鸭解环本质上是二维的, 因为它接近  $S_0$ , 只涉及慢和超慢的时间尺度。

(4) 随着  $\gamma$  的进一步减小, 鸭解环的头部不断增大, 直到它接近折鞍点的附近, 标记为  $fs$ , 位于  $L_0$  和  $L^+$  的交叉处。然后慢段 (由图 5 的 4 中向左的双箭头表示) 跟随折鞍的真实鸭解, 然后沿着折鞍的假弯道螺旋流回  $L_0$ ; 假鸭解周围的振荡在图 5 使用的比例上是不可见的。注意, 这种振荡的振幅取决于在设计的慢约化系统中折鞍的特征值的相对大小。更多关于假折鞍鸭解附近的细节可以在 [24] 中找到。

(5) 随着  $\gamma$  进一步减小, 折鞍真鸭解后面的段将穿过  $L^+$ 。当它形成快速部分, 离开  $S_0$  的排斥段, 跳回右侧  $S_0$  的吸引段时, 环就会变为三维。见图 5 中 5。

(6)  $S_0$  的排斥段的环段随着  $\gamma$  的减少而增长, 直到它达到一个长度, 使随后的快速跳跃落在  $S_0$  的右侧片上, 以指数形式接近  $L_0$  的中间分支。这使得第二个超慢鸭解段出现在环中, 然后在慢时间尺度上向  $L_0$  的左吸引分支跳跃, 轨道段沿着  $L_0$  的左吸引分支向  $T^-$  移动, 如图 5 中 6 所示。

(7)  $\gamma$  进一步降低,  $L_0$  中间分支的第二超慢鸭解段增大, 而  $L_0$  左侧吸引分支的轨道段缩小。最终第二超慢鸭解段达到  $T^+$  并达到最大, 如图 6 中 7 所示。在这一点上, 超慢鸭解段之后慢跳跃到  $L_0$  的右吸引分支。

(8) 第二个超慢鸭解开始缩小, 见图 6 中 8。

(9) 当第二个超慢鸭解缩小为零时, 快跳跃后环不再有超慢段, 见图 6 中 9。

(10) 一旦第二个超慢鸭解段消失, 沿折鞍真正的慢鸭解段 (在  $S_0$  排斥段上) 可以恢复增长。它增长到  $L^-$  的最大值 (见图 6 中 10)。

(11) 当  $\gamma$  进一步减小时, 在沿折鞍鸭解的轨道段收缩的同时, 向左侧吸引层快速跃迁。在这一点上, 我们认为新的峰已经出现。随着  $\gamma$  的减小, 沿真鸭解的轨道段完全消失; 见图 6 中 11。

(12) 一旦沿真鸭解的轨道段消失, 第一个超慢鸭解段的长度开始减小, 从  $L^-$  到  $S_0$  右吸引的快速段移动到较大的  $z$  值。最终, 这个快速段在  $S_0$  上有一个指数接近  $L_0$  的中间排斥分支。在此之后, 发展另一个超慢鸭解段是可能的, 导致一个有一个峰和两个超慢鸭解段的轨道, 如图 6 中 12 所示。如果  $\gamma$  进一步下降, 则开始形成第二个峰, 其转变类似于上述步骤 2 至 12。

从上面的描述可以清楚地看出, 这个转变的步骤 1 到 3 只涉及慢时间尺度和超慢时间尺度, 并且类似于在双时间尺度系统中常见的鸭解爆炸。当环在步骤 4 中接近折鞍点时, 快时间尺度对于转变变得重要, 并且所有三时间尺度都涉及发生在步骤 4 和步骤 5 中的变化。从第 5 步开始, 环继续在所有三个时间尺度上都有段, 但是在第 5 步到第 9 步中发生的重大变化只涉及慢时间尺度和超慢时间尺度。在步骤 10 到 12 中, 超慢时间尺度不涉及主要的变化; 只有在步骤 12 之后从一个峰到两个峰的转变开始时, 它的峰添加作用才会恢复。

我们注意到, 在 [8] 中研究了步骤 4 中发生的极限环与折鞍之间的相互作用。这种相互作用在具体化慢简化系统中有一个相应的分支 (10), 特别是在  $HB_4$  产生的分支上结束的同宿分岔; 如图 4(b) 所示。这种现象在 [8] 中被称为折同宿连接, 并在整个系统中组织了从超慢/慢时间尺度上演化的周期到具有峰的周期的转变。

上面给出的峰添加的描述集中在与过渡相关的主要几何变化上。除了上述的变化外, 极限环的分支还经历了几个第二分支 (如折、倍周期分岔, 可能是一个或多个产生环面的 hopf 分岔) 和含有鸭解段的中间环, 但我们不进一步讨论这些分岔, 因为它们对这里感兴趣的添加现象并不重要。

在双时间尺度系统峰添加的计算工作中, 利用鸭解环周期局部最大值处的参数值来识别峰添加的时刻是很容易做到的 [27]。这种识别源于认识到在鸭解段上花费的时间随着鸭解段长度的增加而增加, 然后在最大鸭解后减少。由于新的峰通常在参数值指数接近的附近出现, 因此从计算的角度来看, 峰添加发生在最大周期点处。在三时间尺度的情况下, 类似的考虑也很重要, 但有更多的复杂性。特别是, 在图 5 和图 6 所示的峰添加的几个阶段, 即在图 2、7 和 10 所示轨道的参数值处, 有最大鸭解。其中前两个对应于  $L_0$  排斥分支上 (超慢) 鸭解的最大长度, 第三个对应于  $S_0$  排斥分支上 (慢) 鸭解的最大长度。

图 6 的 10 中所示的最大鸭解相对于排斥慢流形 ( $S_0$  中间扰动) 是最大的, 并且与折鞍奇异点  $fs$  相关。如上所述, 我们用系统中随  $\gamma$  变化而增加的峰时刻来确定这个过渡周期。然而, 如图 7(a) 所示, 该周期与周期的最大值无关; 图 6 的 10 中显示的周期对应于图 7(a) 中标记为 (b1) 的点。相反, 在峰出现之前有两个局部最大值, 在图 7 (a) 中标记为 (c1) 和

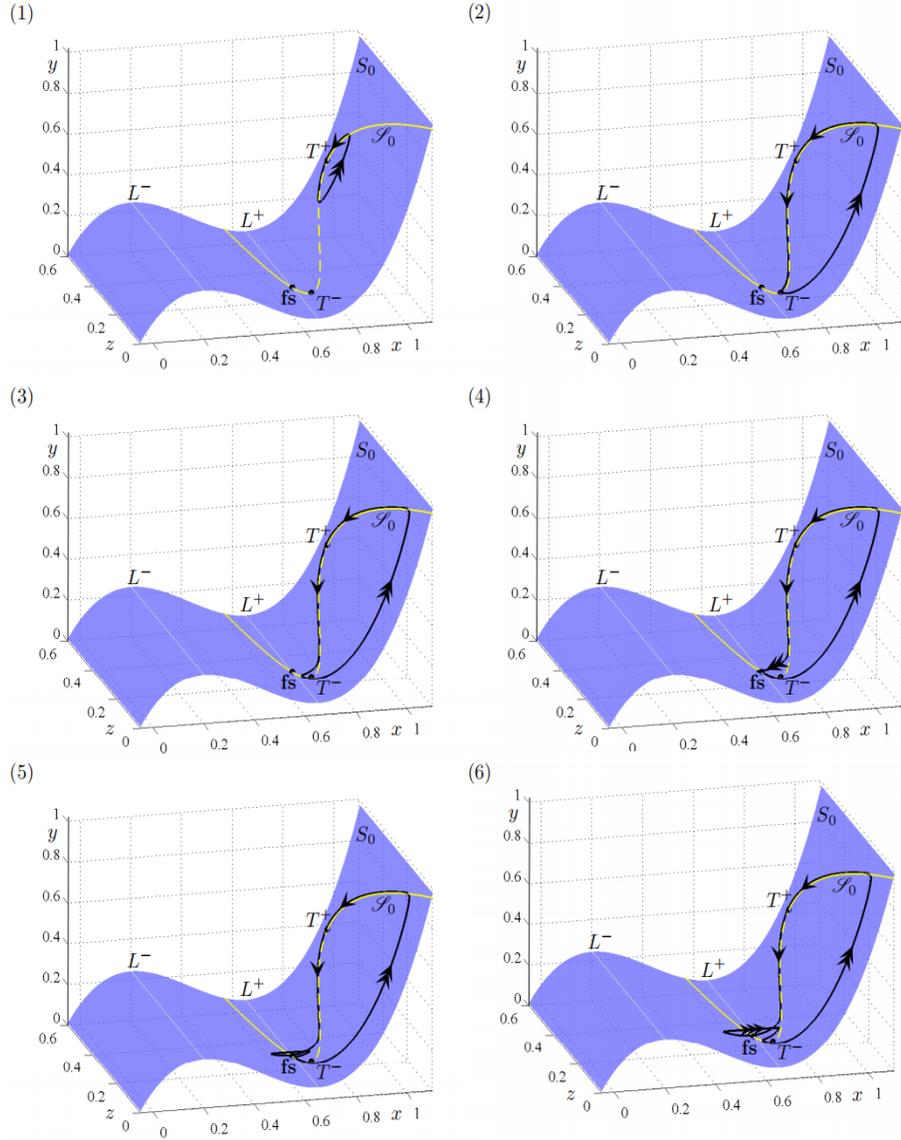


Figure 5: 方程 (1) 中的峰添加，参数值如表 1 所示: 步骤 1-6, 从吸引平衡解过渡到吸引单峰周期轨道。在 1 中,  $\gamma \approx 0.95012327$ ; 图中的 2 至 6  $\gamma \approx 0.95012344$ 。

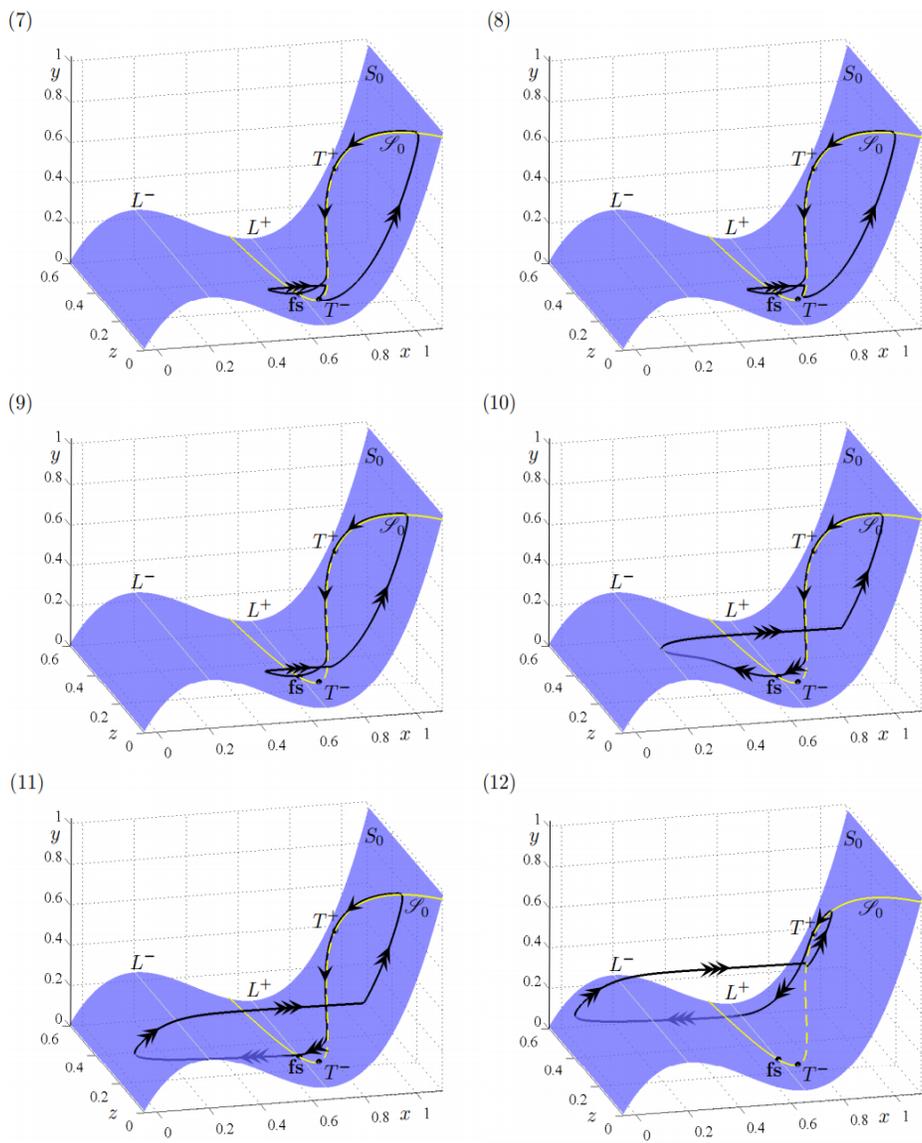


Figure 6: 方程 (1) 中的峰添加, 参数值如表 1 所示: 步骤 7-12, 在 7-10 中,  $\gamma \approx 0.95012344$ ; 在 11 中,  $\gamma \approx 0.94905122$ ; 在 12 中,  $\gamma \approx 0.94883380$ .

(c2)。它们对应于图 5 的 2 和图 6 的 10，此外，在加入峰后，参数值处的周期还有两个局部最大值；它们在图 7(a) 中被标记为 (d1) 和 (d2)，并对应于类似于 (c1) 和 (c2) 的最大鸭解，发生在第二个峰被添加的过渡期间。

在这个系统中，包含最大折鞍鸭解段的环不对应于周期函数的局部最大值的原因可以通过观察我们系统中的特定几何来理解。随着最大折鞍鸭解的接近 (图 6 中从图 9 移动到图 10)，跟随真鸭解的慢段变长，这导致在  $S_0$  右侧吸引段附近的慢段变短。由于在前一个慢段上花费的额外时间并不能补偿后一个慢段上损失的时间，因此在折鞍的真鸭解附近花费更多时间的环最终具有更小的总周期。

任何三时间尺度系统中超慢流形鸭解段的长度相比慢流形鸭解段的长度有一个更强的影响。这意味着，在三时间尺度系统中，通过识别有最大周期的参数值来定位峰添加可能存在问题，而涉及相图的策略是可取的。

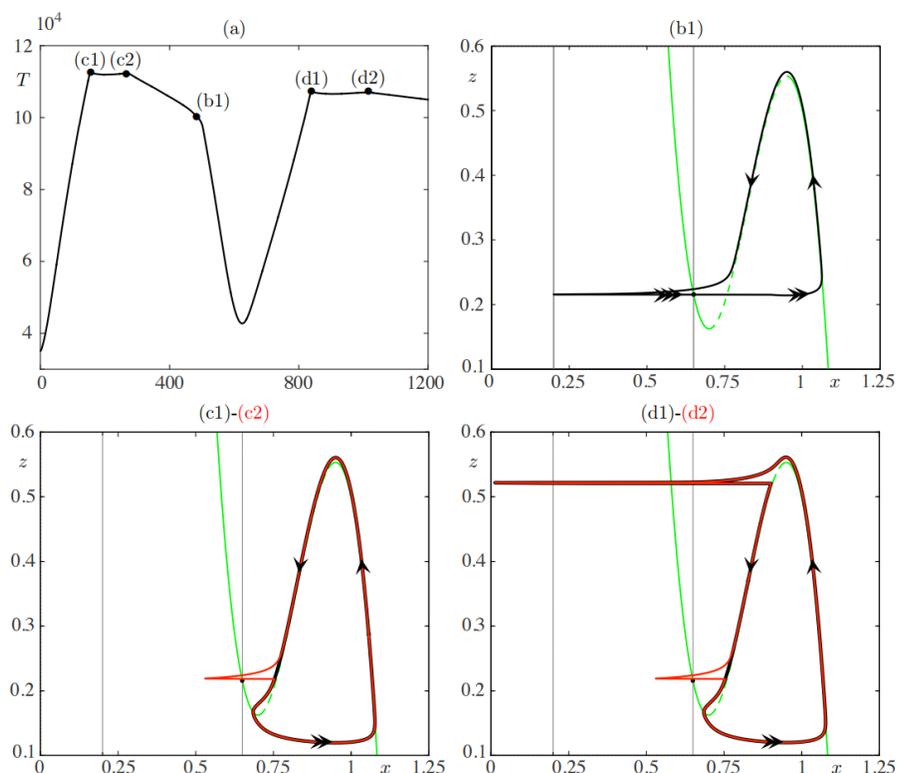


Figure 7: 从  $HB_4$  产生的峰添加分支轨道的周期和相位图。(a) 沿分支以数值步长函数表示的轨道周期:  $x$  轴上的点 0 对应  $\gamma = 0.95004655032$ , 点 1200 对应  $\gamma = 0.94883293533$ 。这样选择的  $x$  刻度可以区分周期的临界点。(b) 图 (a) 中点 (b1) 对应的轨道投影到  $x-z$  平面; 这与图 5 的 10 中的轨道相对应。在这个和下面的图中, 绿色曲线是  $L_0$  的投影, 灰色垂线是  $L^+$  和  $L^-$  的投影。(c) 图 (a) 中点 (c1)(黑色曲线) 和点 (c2)(红色曲线) 对应的轨道在  $x-z$  平面上的投影; 这些轨道分别对应于图 5 的 2 和图 6 的 7 中的轨道。(d) 图 (a) 中点 (d1)(黑色曲线) 和点 (d2)(红色曲线) 对应的轨道在  $x-z$  平面上的投影。

## 4.2 利用两个时间尺度的峰添加

只有当快返回段 (从  $S_0$  的排斥段附近到  $S_0$  的右侧吸引段) 足够靠近  $L_0$  的排斥分支时, 才会发生图 5 和图 6 所示的峰添加。如果返回段离排斥分支不够近, 则省略与第二个超慢鸭解段存在相关的步骤 (即图 5 和图 6 中的步骤 6 至步骤 8)。在这种情况下, 新峰的增加只涉及两个时间尺度的相互作用, 并且与靠近折鞍的通道有关。

使用附录中给出的系统 (1) 的替代参数化, 可以很容易地发现  $\alpha_2$  的变化将改变  $L_0$  与快速返回段到达  $S_0$  的位置之间的距离, 而不会改变图 3(a) 所示的基本分岔结构。特别是, 我们检查了, 改变  $\alpha_2$  并不影响图 3(a) 所示的平衡分支或

Hopf 分岔的数量, 尽管从不同的 Hopf 分岔发出的周期轨道分支的性质可以改变。例如, 当  $\alpha_2 = 0.6$  时, 来自  $HB_1$  的周期轨道分支终止于  $HB_2$ , 而当  $\alpha_2 = 0.65$  时, 来自这两个 Hopf 分岔的分支都终止于同宿分岔。

我们这里主要讨论  $\alpha_2 = 0.6$  的情况, 其他参数和前面一样; 请注意, 到目前为止考虑的参数值, 包括图 5 和图 6, 对应于  $\alpha_2 = 0.65$ 。我们对从  $HB_4$  产生的峰添加分支感兴趣, 部分显示在图 8(a) 中。请注意, 与图 3(f) 不同, 该图使用  $L_2$  范数作为沿极限环分支的解的度量, 因为这更容易区分峰添加的过渡。对比图 8(a) 和图 3(f) 可以看出, 这两种情况的加峰添加机制可能是不同的, 事实也确实如此。特别是, 随着  $\gamma$  的减小, 该分支的第一个峰添加转变的主要步骤如下:

步骤 1 到步骤 5 和以前一样。即在  $HB_4$  的 Hopf 分岔处出现一个小鸭解环, 振幅逐渐增大, 直至在  $L_0$  的中间分支处出现一个最大鸭解段, 然后成为有头鸭环, 最终进入折鞍区  $fs$  附近, 如图 9 的 1 所示。然后环与折鞍的真鸭和假鸭相互作用, 如步骤 4 所述, 最终穿过  $L^+$ , 并从  $S_0$  的排斥片到  $S_0$  的吸引段右侧形成快返回段; 见图 9 中 2。注意, 快速返回段位于  $S_0$  的右边, 远低于  $L_0$  的中间分支。

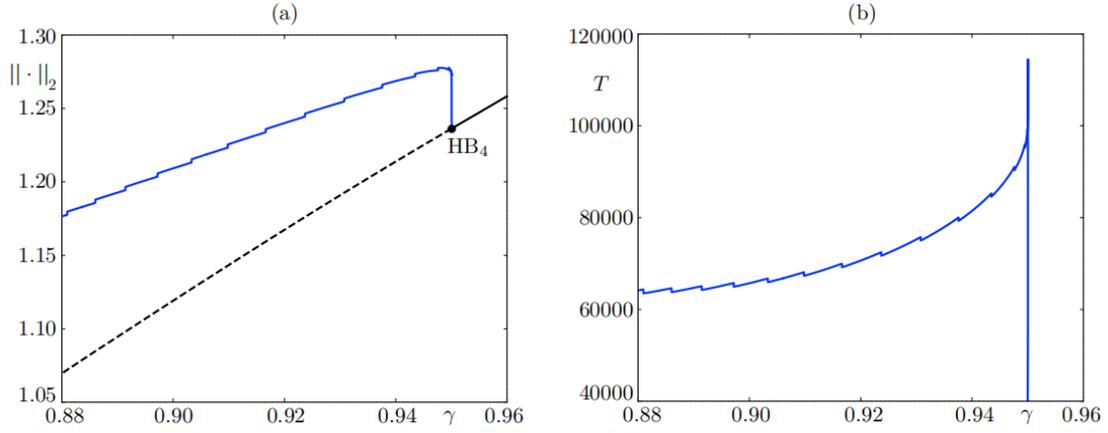


Figure 8: (a) 当  $\alpha_2 = 0.6$  及其它参数值如表 3 时,  $\gamma$  变化时方程 (14) 的部分分岔图。黑色曲线表示平衡解 (实线表示稳定, 虚线表示不稳定)。蓝色曲线表示在 Hopf 分岔  $HB_4$  中创建的周期解的  $L_2$  范数。(b) 沿图 (a) 所示极限环分支的周期作为  $\gamma$  的函数。

(2) 随着  $\gamma$  的进一步减小,  $S_0$  排斥中间层上的鸭解段逐渐增大, 一直延伸到  $L^-$  时达到最大值; 见图 9 中 3。与  $\alpha_2 = 0.65$  的情况不同, 在鸭解段的生长过程中, 没有任何阶段的快速返回段接近于  $L_0$  的中间分支, 其结果是缺少了早期峰添加过渡的步骤 6 到 8。图 9 的 3 和图 6 的 10 的比较突出了  $\alpha_2 = 0.6$  情况下的另一个重要区别, 即在所有  $\gamma$  值处, 快速返回段在  $L_0$  的高  $z$  值的一边返回到  $S_0$ , 这意味着环在沿着  $L_0$  从折鞍到  $T^-$  演化时具有第二个超慢段, 然后缓慢跳到  $L_0$  的右侧吸引分支。相比之下, 当  $\alpha_2 = 0.65$  时, 在类似的峰添加阶段, 快速段之后直接缓慢跳到  $\alpha_2 = 0.65$  的右吸引分支, 或者在  $\alpha_2 = 0.65$  的中间分支附近偏移, 然后缓慢跳到  $\alpha_2 = 0.65$  的右分支。

(3) 一旦达到图 9 的 3 所示的配置, 我们认为增加了一个新的峰。这个过程像前一种情况一样, 随着有头鸭解的发展 (图 9, 图 4), 直到慢鸭解完全消失, 出现充分的松弛振荡 (图 9, 图 5)。我们注意到, 图 9, 图 5 所示的周期接近折鞍的假鸭解, 看到的小振荡是围绕假鸭解的轨道振荡; 参见 [24] 了解关于这种动力学的更多细节。

(4) 随着  $\gamma$  进一步减少, 轨道以类似上述的方式增加了新的峰。图 9, 图 6 显示了第二个峰的添加时刻, 此时再次出现与图 9, 图 3 中所示的情况类似的最大慢鸭解。

本节中描述的峰添加机制与 4.1 节中描述的机制之间的关键区别在于所涉及的时间尺度。在图 9 所示的峰添加中, 一旦碰到折鞍 (图 9 的 1), 出现的轨道与慢或快时间尺度的运动有关。相比之下, 图 5 和图 6 所示的峰添加也需要添加在超慢时间尺度上演化。在本节描述的情形中, 在峰添加中没有超慢鸭解跃迁的结果, 新峰的添加对应于周期的局部最大值, 并且该特性可用于数值检测峰添加; 见图 8 (b) 关于这方面的说明。

总的来说, 我们模型中出现的折鞍峰添加机制让人联想到其他双时间尺度的峰添加情况, 特别是在抛物型簇 [8] 中, 新峰的增加完全来自与折鞍奇异点相关的真鸭解附近的通道。类似于在抛物型簇模型的背景下所报道的, 我们在 DSRS 中发现了同宿分岔 (见图 4); 这些被称为折同宿分岔 [8]。

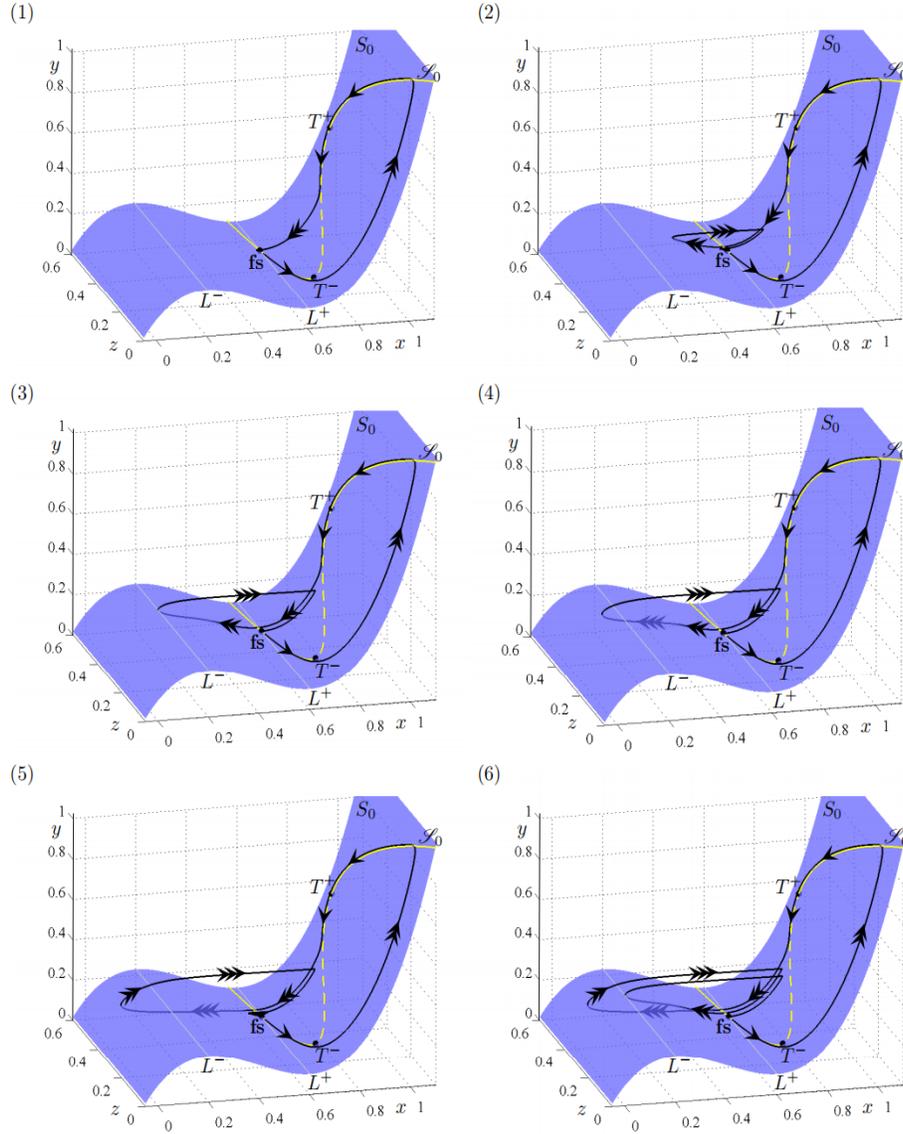


Figure 9: 当  $\alpha_2 = 0.6$  时方程 (14) 中的峰添加, 其他参数值如表 3 所示。在图中 1:  $\gamma \approx 0.95003602$ ; 在图中 2:  $\gamma \approx 0.95003601$ , 在图中 3 和 4:  $\gamma \approx 0.95003596$ ; 在图中 5:  $\gamma \approx 0.95003533$ ; 在图中 6:  $\gamma \approx 0.95003509$ 。

## 5 结论和讨论

在这项工作中，我们分析了时间尺度在三维，三时间尺度模型中形成和组织簇极限环族中的作用。该模型是现象学的，尽管其发展的动机是试图理解神经元活动的一些特征 [25]。该模型的状态变量数量少，非线性化小，参数众多，是一个典型的三时间尺度簇发放模型，其灵活性使其特别适合于分析和计算。

我们提出的簇发放动力学，在这项工作中提供了初步的分析，是通过二维立方临界流形  $S_0$  (及其相关的二维吸引和排斥 Fenichel 慢流形) 和一维立方超慢流形  $L_0$  (及其相关的一维吸引和排斥 Fenichel 超慢流形) 之间的相互作用形成的。选取参数值如 [25] 所示，该模型生成的典型簇发放动力学可描述如下。簇发放周期的静息阶段在两个时间尺度上演化：在超慢时间尺度上，它遵循  $L_0$  的吸引分支，其相关部分位于  $S_0$  的吸引段上；当它到达  $L_0$  的折点时，它停留在相同的  $S_0$  吸引段附近，并在慢时间尺度上沿着它流动。随后的活跃阶段由一个或多个弛豫振荡形成，这些振荡以经典的方式由沿  $S_0$  的吸引段的两个慢段和从  $S_0$  的折线到相反的吸引段的两个快速跳跃组成。因此，总的来说，在一个簇周期中有三个明显的时间尺度。

上述对应于 [25] 中最初指定的参数值在我们的模型中发生的簇发放环，如图 2 所示。在参数空间中，这些环是通过 hopf 分岔产生的，该分岔最初产生小的无峰周期解，然后沿着连续分支一个接一个地生成新的峰。在这项工作中，我们已经确定了发生这种情况的许多步骤。特别是，我们已经证明了两种类型的鸭解有助于峰添加的转变：发生在  $L_0$  的吸引和排斥分支上的超慢鸭解，以及位于  $S_0$  的吸引和排斥段上的慢鸭解。对于这种参数的选择，我们已经表明，由于簇的最后一个峰的返回点和  $L_0$  接近，因此存在多个超慢鸭解爆炸，如图 5 和图 6 所示。我们还表明，折鞍的存在对峰添加有显著影响。

然后，我们研究了改变  $L_0$  相对于  $S_0$  的位置对整个系统动力学的影响。我们表明，一个参数的微小变化，即改变  $S_0$  相对于  $L_0$  位置的高度，足以显著改变峰添加过程。具体来说，几何形状的变化导致簇中最后一个峰在  $S_0$  的返回点从  $L_0$  离开，从而防止了多次超慢鸭解爆炸的发生。通过删除一些步骤 (见图 9) 简化了峰添加，并导致在整个分岔图中出现较小的准垂直段，如图 8 所示。我们所描述的两类峰添加之间的一个重要区别在于所涉及的时间尺度的数量。第一种情况 (图 5 和图 6) 涉及问题的所有三个时间尺度，但是，在从 hopf 分岔持续到第一次遇到折鞍奇异点的初始阶段之后，第二种情况 (图 9) 中的峰添加只涉及两个不同的时间尺度轨道段。

在第一种情况下，峰添加是由于一维超慢流形  $L_0$  的排斥分支和二维临界流形  $S_0$  的排斥段附近的通道。前一类通道由鸭解点组成，后一类通道由折鞍奇异点组成。因此，在某种程度上，我们的第一个峰添加转换情形类似于之前在三维方波簇中看到的混合，例如 [7,27,30]，以及在四维抛物型簇中所看到的 [8]。特别是，当轨迹在最后一个峰的快速段之后返回到指数接近  $L_0$  的  $S_0$  的右吸引段位置时，在  $L_0$  附近鸭解转换的可能性，使人想起方波簇中发生的情况。

实际上，正如 [7,12] 所解释的那样，在方波簇中，当轨迹在最后一个峰的快速段之后返回时，每个峰添加鸭解跃迁发生在非常接近快子系统的同宿连接处；这就终止了簇发放。由于现在的轨迹指数接近于一维慢流形，它可以连接到慢流形并形成一个新的鸭解段。第二个峰添加情形只涉及折鞍通道，在这方面，更接近于抛物型簇中的峰添加。这显示了该模型的强大功能，因为它可以在最小的三维情形中显示多个鸭解介导的峰添加情形，其代价是与更经典的簇情形相比，需要多一个时间尺度。

从计算的角度来看，在我们模型中的峰添加与许多两时间尺度模型中看到的有一个重要的区别。特别是，在我们的模型中，在第一种情况下，新峰的开始通常与簇振荡周期的局部最大值无关，这与两时间尺度峰添加的情况不同。这在计算上是很重要的，因为检测峰添加的算法通常会检测周期中的转折点。显然，这种方法不适用于像我们这样的三时间尺度系统中峰添加的检测。相反，在我们的第一个情形中，通过声明最大折鞍鸭解段 (在我们的约定中对应于新峰的开始) 当变量  $x$  沿簇周期的最小值等于  $x_{L_-} = 0.2$  时，可以检测到峰值的发生。

这种方法不如寻找周期最大值的方法精确，但给出了接近奇异极限  $\delta = 0$  的最大折鞍鸭解段的良好近似。然而，正如第 4.2 节所解释的那样，在我们的模型中选择的一些参数，超慢流形相对于簇周期的快速段的返回点相对较远，因此添加情形更多的是两个时间尺度的情形；在这种情况下，新峰的开始总是对应于周期函数的局部最大值，这可以用于数值检测新峰的添加时刻，见图 8(b)。

这里研究的模型展示了三时间尺度系统如何比两个时间尺度系统具有更丰富的动力学性质，特别是允许不同的两时间

尺度之间有趣的相互作用。在这项研究中，我们保持了时间尺度的等级固定，因此只部分描述了可能的单一极限。对该模型中出现的不同时间尺度进行更充分和严格的分析，以及对所有一般情况下与公式 (1) 相关的奇异极限的完整调查，超出了当前工作的范围，将成为未来研究的有趣主题。

总的来说，这项研究增加了最近越来越多的关于三时间尺度系统中的复杂振荡的文献 [20,21,22,23,26]。虽然设置接近 [23]，但由于存在折鞍奇异点而不是折结点，因此本文分析的动力学是不同的。考虑到我们主要集中研究峰添加机制以及慢和超慢流形的潜在几何结构，重点也有所不同。本文研究的模型最初设计于 [25]，也与 [20] 中的三时间尺度最小模型有一些相似之处，[20] 研究了复杂的 MMOs；然而，关键的区别在于超慢流形的形状，在 [20] 中通常是双曲的，而在这里有折点。就输出时间序列而言，这里报告的动力学与 [22,26] 中提出的耦合慢振荡器的动力学相当，尽管这里方程的紧凑形式使该模型既动态丰富，又更易于分析和计算。这项研究可以为三时间尺度动力学的进一步研究打开大门，例如，在两个或更多这样的系统中由鸭解介导的同步性质特性，例如 [17] 所做的工作。

最后，虽然这个模型完全是现象性的，但它是生物学可靠的，这里提出的结果可以揭示在生物物理模型和实验中观察到的三时间尺度现象。特别是，后续工作可能包括使用这种模型来识别三时间尺度动力学的标记（特别是在振荡模式，阈值交叉等方面），无论是在人造的还是与实验数据相关的神经元研究中。

## 6 模型的可替代参数化

有时，以可替代且等价的形式考虑方程 (1) 是有用的

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - (2ax^3 - 3a(\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + 6a\alpha_1\alpha_2x + a_0) \\ \frac{dy}{dt} &= \delta \left( 3b((\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2))x^2 - 6b(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)x - \frac{b}{a}y - z + \frac{ab_0 + a_0b}{a} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= \delta\varepsilon(x - \gamma).\end{aligned}$$

系统 (1) 和 (14) 之间的唯一区别是每一项的系数。(1) 和 (14) 中的系数之间的关系如表 2 所示。

表 2: (1) 中的系数以 (14) 中的系数表示

$a_1$	$6a\alpha_1\alpha_2$
$a_2$	$3a(\alpha_1 + \alpha_2)$
$a_3$	$2a$
$b_1$	$6b(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)$
$b_2$	$3b((\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2))$
$c_0$	$(ab_0 + a_0b)/a$
$c_1$	$b/a$

(14) 中的常数  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  和  $\beta_2$  具有特殊的几何符号： $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别是临界流形  $L^-$  和  $L^+$  的两条折线的  $x$  值，如图 2 所示， $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别是超慢流形的两个转折点  $T^-$  和  $T^+$  的  $x$  值，如图 2 所示。如 (14) 所示的模型参数化使超慢流形相对于临界流形移动很容易，因此，很容易探索对动力学的任何影响。模型 (14) 中的参数与表 1 中常数的选择如表 3 所示。

## 参考文献

- [1] R. Bertram, M.J. Butte, T. Kiemel and A. Sherman A, Topological and phenomenological classification of bursting oscillations, *Bulletin of Mathematical Biology*, 57:413-439, 1995.
- [2] M. Brøns, K. Bar-Eli, Canard explosion and excitation in a model of the Belousov-Zhabotinskii reaction, *J. Phys.Chem.*, 95:8706-8713, 1991.

表 3: 模型 (14) 中参数的默认值

$\alpha_1$	0.2	$\alpha_2$	0.65
$\beta_1$	0.7	$\beta_2$	0.95
$a$	2.0	$b$	25.0
$a_0$	0.1	$b_0$	26.5
$\delta$	0.001	$\varepsilon$	0.1

- [3] B. Deng, Food chain chaos due to junction-fold point, *Chaos* 11:514-525, 2001.
- [4] B. Deng and G. Hines, Food chain chaos due to Shilnikov's orbit, *Chaos*, 12:533-538, 2002.
- [5] B. Deng and G. Hines, Food chain chaos due to transcritical point, *Chaos*, 13:578-585, 2003.
- [6] M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. Kuehn, H. M. Osinga and M. Wechselberger, Mixed-mode oscillations with multiple time scales, *SIAM Rev.* 54(2): 211-288, 2012.
- [7] M. Desroches, T. J. Kaper, M. Krupa, Mixed-mode bursting oscillations: Dynamics created by a slow passage through spike-adding canard explosion in a square-wave burster, *Chaos* 23: 046106, 2013.
- [8] M. Desroches, M. Krupa and S. Rodrigues, Spike-adding in parabolic bursters: the role of folded-saddle canards, *Phys. D* 331: 58-70, 2016.
- [9] E.J. Doedel, R.C. Paffenroth, A.C. Champneys, T.F. Fairgrieve, Yu.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede and X.J. Wang, AUTO-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations, available at <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>.
- [10] F. Dumortier and R. Roussarie, Canard cycles and center manifolds, *Memoir of the AMS* 121(577), American Mathematical Soc., 1996.
- [11] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eqn* 31: 53-98, 1979.
- [12] J. Guckenheimer and C. Kuehn, Computing slow manifolds of saddle type, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 8: 854-879, 2009.
- [13] J. Guckenheimer, Singular Hopf bifurcation in systems with two slow variables, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 7(4): 1355-1377, 2008.
- [14] J. L. Hindmarsh and R.M. Rose, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. London, Ser. B* 221: 87-102, 1984.
- [15] E.M. Izhikevich, Neural Excitability, Spiking, and Bursting, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10:1171-1266, 2000.
- [16] C. K. R. T Jones, Geometric Singular Perturbation Theory, In: *Dynamical Systems*, R. Johnson Ed., Lecture Notes in Mathematics vol. 1609, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [17] E. Köksal Ersöz, M. Desroches, M. Krupa and F. Clément, Canardmediated (de)synchronization in coupled phantom bursters, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 15(1): 580-608, 2016.
- [18] I. Kosiuk and P. Szmolyan, Geometric analysis of the Goldbeter minimal model for the embryonic cell cycle, *Journal of Mathematical Biology*, 72:1337-1368, 2016. doi:10.1007/s00285-015-0905-0
- [19] M. Krupa and P. Szmolyan, Extending geometric singular perturbation theory to non-hyperbolic points - fold and canard points in two dimensions, *SIAM J Math Anal* 33 : 286-314, 2001.
- [20] M. Krupa, N. Popovic, and N. Kopell, Mixed-mode oscillations in three time-scale systems: A prototypical example, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7: 361-420, 2008.
- [21] M. Krupa and M. Wechselberger, Local analysis near a folded saddle-node singularity, *J. Differential Equations* 248(12): 2841-2888.
- [22] M. Krupa, A. Vidal, M. Desroches, and F. Clément, Mixed-mode oscillations in a multiple time scale phantom bursting system, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11:1458-1498, 2012.
- [23] B. Letson, J. E. Rubin and T. Vo, Analysis of interacting local oscillation mechanisms in three-timescale systems, *SIAM J. Appl. Math.* 77(3): 10201046, 2017.
- [24] J. Mitry and M. Wechselberger, Folded saddles and faux canards, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 16:546-596, 2017.

- [25] P. Nan, Dynamical Systems Analysis of Biophysical Models with Multiple Timescales, PhD thesis, The University of Auckland, 2014.
- [26] P. Nan, Y. Wang, V. Kirk, and J.E. Rubin, Understanding and distinguishing three-time-scale oscillations: a case study in a coupled Morris-Lecar system, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14:1518-1557, 2015.
- [27] J. Nowacki, H. M. Osinga and K. Tsaneva-Atanasova, Dynamical systems analysis of spike-adding mechanisms in transient bursts, *The Journal of Mathematical Neuroscience* 2: 1-28, 2012.
- [28] M. L. Rosenzweig and R. H. MacArthur, Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions, *The American Naturalist*, 97:209-223, 1963.
- [29] P. Szmolyan and M. Wechselberger, Canards in  $\mathbb{R}^3$ , *Journal of Differential Equations* 177(2): 419-453, 2001.
- [30] D. Terman, Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes, *SIAM J. Appl. Math.* 51: 1418-1450, 1991.
- [31] T. Vo, R. Bertram and M. Wechselberger, Multiple geometric viewpoints of mixed mode dynamics associated with pseudo-plateau bursting, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 12:789-830, 2013.
- [32] M. Wechselberger, Existence and Bifurcation of Canards in  $\mathbb{R}^3$  in the Case of a Folded Node, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 4(1): 101139, 2005.