Leonid Shilnikov 和动力学混沌的数学理论

Sergey Gonchenko[1], Alexey Kazakov[2], Dmitry Turaev[3,2], and Andrey L.Shilnikov[4]

[1]Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”,Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,23 Gagarina Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

[2]National Research University Higher School of Economics, 25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

[3]Imperial College, London, UK

[4]Neuroscience Institute and Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, 100 Piedmont Ave., Atlanta, GA 30303, USA.

Received 03 December 2021; accepted 17 December 2021; published online: 18 January 2022

1 引言

焦点问题“全局分岔、混沌和超混沌：理论和应用”是为了纪念 Leonid Pavlovich Shilnikov 这位伟大的数学家诞辰 85 周年，他是动力学混沌理论的创始人之一。他的作品决定性地影响了非线性动力学领域的整体。许多来自不同科学领域的学者的研究都深深植根于 Shilnikov 的科学遗产。

1965 年，他发现并描述了现在被称为螺旋或 Shilnikov 的混沌。从那时起，他就把研究全局分岔和混沌转迁作为他工作的中心主题。L.P.Shilnikov 和他创建的科学小组研究了许多同宿现象，首次对经典洛伦兹吸引子进行了全面的理论描述，并发现了通过环面破裂的同步到混沌的转迁。Shilnikov 的开创性成果早已成为经典著作，并被收录在大多数关于动力系统和分岔理论的文本和参考书中。

作为一名真正伟大的科学家，L.P.Shilnikov 有一种“神奇的愿景”的天赋，可以让他在看似不相关的话题之间建立联系，找到一个意想不到的问题公式，或者提出一种在多年后才突然变得明显的方法。也许，正因为如此，他成为了从数学、物理、生物学、神经科学、化学和工程学的许多同事和研究人员的全局“吸引子”，许多学者承认，他的思想和个人魅力极大地影响了他们自己的发展。

对我们所有人来说，Leonid Pavlovich 不仅仅是一位明智的建议者。他是一个很棒的人，是我们亲爱的同事，也是科学和生活中的榜样。我们非常想念他。为了纪念他，我们将焦点问题与整体想法放在一起，以强调 Shilnikov 的学生和追随者在高维动力学研究方面的最新进展。这可以追溯到我们与 Shilnikov 的多次对话。他强调，混沌动力学主要被合理地理解为三维微分方程组或二维映射，而动力学系统研究的重点必须转移到更高的维度。

我们决定从概述 Shilnikov 在动力系统理论上的工作开始，随后将是对这个焦点问题的描述。我们选择来讨论以下主题：

- 高维动力系统的全局分岔
- Shilnikov 鞍焦点和螺旋混沌
- 同宿混沌
- 同宿切线

- 同步的数学理论
- 洛伦兹吸引子、拟吸引子和伪双曲性

他的兴趣更广泛，包括各种其他的主题，如哈密顿混沌理论，非自治系统，马尔可夫链和双曲系统的符号动力学，孤立波的理论及其应用，等等。我们选择阐明的 shilnikov 部分，包含了最具开创性和基本的结果，对混沌理论产生了最大的影响，并确定了未来研究的主要方向。

2 早期的工作：全局分岔

分岔理论是从开创性的工作 A.A.Andronov 和 E. A.Leontovich[1-4] 在 1930 年代受辐射物理学（振荡理论）的启发发展起来的，他们表明，一个稳定的周期轨道的常微分方程系统可以生成半稳定的周期轨道或从平衡状态也就是现在说的 Andronov-Hopf 分岔，或从一个同宿环到一个鞍点或鞍结点。他们的结果依赖于先前发展的平面上的系统的庞加莱-本迪克森-杜拉克理论。当时，多维系统分析的数学方法还没有发展起来；因此，高维的分岔理论被留给了下一代。

大约 20 年后，Shilnikov 开始对同宿环的 Andronov-Leontovich 理论推广到任意维系统的问题产生了兴趣。其中的挑战是开发新的理论方法和数学技术来推广高维系统的平面结果；没有人期望他会做出突破性的发现。

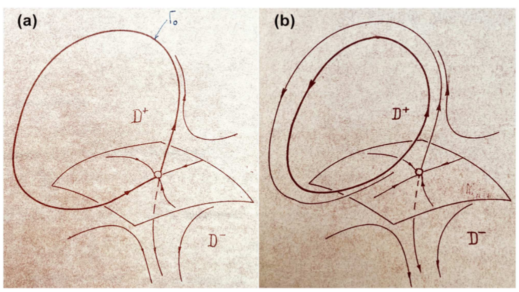

Figure 1: 如果特征指数满足 $\mathrm{Re}\,\lambda_i(0) > \lambda_n(0)(i = 1,\ldots,n-1)$ 的条件，则同宿轨道 Γ_0 分岔到鞍点，产生单一稳定周期轨道。该图和下一个图是 Shilnikov 博士论文的手绘。

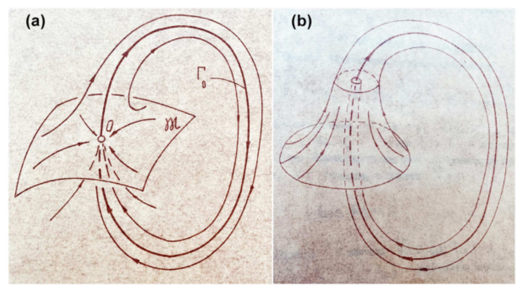

Figure 2: 同宿鞍结点平衡态的分岔导致鞍结点消失后出现单一稳定的周期轨道。

首先，他研究了两个同宿分岔，它们导致同宿环外出现单一稳定周期轨道。这些是:

1. 同宿环 Γ_0 到鞍点 O 的分岔，其特征值为 $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0(i = 1,\ldots,n-1)$，但 $\lambda_n > 0$，以及所谓的鞍值是负的，$\sigma \equiv \lambda_n + \max \mathrm{Re}\,\lambda_i$ 见图 1。
2. 同宿环 Γ_0 到鞍结平衡点 O 的分岔，满足 $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0, i = 1,\ldots,n-1, \lambda_n = 0$，见图 2。

这些结果发表在论文 [6,7]，成为他 1962 年的博士学位论文的内容。这些结果确实与在平面上发生的情况相一致。其原因是系统在同宿环附近的相空间中具有很强的耗散（面积收缩特性）。然而，新技术已经准备好应用于一般情况，也就是 Shilnikov 接下来做的。关键的发现是，当强耗散被阻止时，同宿环附近的行为取决于鞍点的线性化矩阵的特征值是实的还是复的，而在复杂的情况下，环附近的动力学可能是混沌的！

这个结果发表于 1965 年 [8]；“混沌”这个词在当时还不是一个科学术语；因此，结果被表述为在同宿环附近存在无限多个鞍周期轨道。这个事实，一个简单的轨道（一个鞍焦点的同宿）可以引起复杂的动力学，这是一个令人惊奇和令人不安的发现，是引发动态混沌理论的关键事件之一（类似于马蹄铁和阿诺索夫环面）。我们在第 III 节讨论了与 Shilnikov 鞍-焦点环相关的混沌行为的类型。

在另一种情况下，当最接近虚轴特征值为实数时，Shilnikov[9] 表明，在满足四个通用条件的情况下，同宿环出现鞍平衡：(i) 鞍值 σ 必须是非零，（ii）分离值 A 必须是非零，（iii）当同宿环进入鞍点时，它必须与引导方向相切，（iv）必须只有一个简单的优先特征值；见图 3。

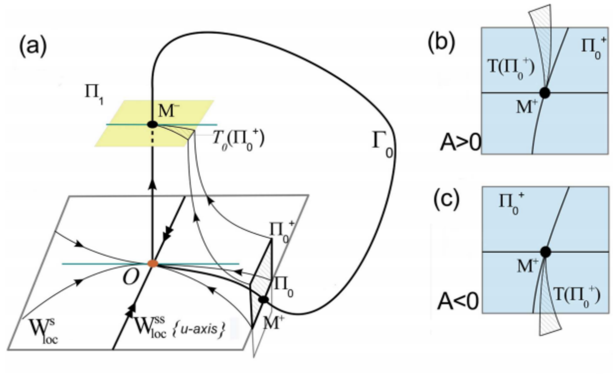

Figure 3: (a) 在三维相空间中，具有实特征值 $\lambda_{ss}<\lambda_s<0<\lambda_u$ 的同宿环 Γ_0 到鞍点 O 的例子。如果鞍值 $\sigma=\lambda_u+\lambda_s<0$，则该环产生一个稳定的周期轨道；见图 1。当 σ 为正时，则需要额外的条件来产生一个单鞍周期轨道。在 O 附近的一些局部坐标 (x,y,u) 中，不稳定流形和稳定流形是垂直 y 轴和 (x,u) 平面；前特征方向是 x 轴，非特征值对应的特征方向是 λ^{ss} 轴。我们要求分离线 Γ_0 不位于强稳定流形 W^{ss} 中。因此，Γ_0 沿 x 轴当 $t\to+\infty$ 时趋近 O。为了看到分离线值 A 没有消失，我们建立了同宿环的两个截面：Π_0 经过局部稳定流形 $t\to+\infty$，Π_1 经过局部不稳定流形。从 Π_0 开始的轨道靠近 O，在与 x 轴相切的薄楔点达到 Π_1；沿着 Π_0 的流动将这个楔形返回到 Π_0。条件 $A\neq0$ 意味着 Π_0 上的图像楔与 W^s_{loc} 不相切，如图 (b) 和 (c) 所示，它们代表了可定向 (b) 和不可定向 (c) 同宿环的情况

论文 [8-10] 给出了同宿现象理论的初步动力。这个理论成为了混沌行为的例子和概念模型的无穷无尽的来源。许多结果现在是一个民间传说；然而，它们有一个单一的起源——整个理论都是从早期的 Shilnikov 的作品中发展出来的。

Shilnikov 在鞍结点同宿的一般情况下的工作，在应用研究界不太知道，但它也导致了一个显著的发现。在参考文件 10 和 11 中，他检查了鞍-鞍平衡的同宿分岔；见图 4(a)。与他早期发表的同宿鞍结点不同 [7]，鞍-鞍除了具有零特征值和具有负实部的特征值外，还具有正实部。因此，其不稳定流形和稳定流形的维数都大于 1。Shilnikov 证明，如果 (i) 同宿环 Γ_0 离开鞍鞍 O，沿着零特征值对应的特征方向返回，（ii）O 的稳定和不稳定流形沿 Γ_0 横向相交，则单一鞍周期轨道从同宿轨道出现到鞍 0-鞍轨道消失后出现；见图 4(b). 这看起来像鞍结点的情况，稳定周期轨道现在被鞍轨道取代。

让我们强调，鞍-鞍可以有多个同宿环；见图 4(c)。Shilnikov[11] 表明，具有 p 同宿环的鞍鞍消失后，(i) 每个环产生一个鞍周期轨道，（ii）出现一个非平凡双曲集，它与 p 符号上的拓扑伯努利位移轨道一一对应；见图 5。

无论鞍鞍有多少个同宿环，这个分岔仍然是一个余维 1。因此，在任何与 SHilnikov 鞍鞍的分岔表面相交的单参数族中，我们观察到一个从简单动力学（一对鞍平衡）到混沌（鞍鞍消失后的双曲集）的突然转变。

这是向混乱转变的第一个例子。寻找向混沌过渡的情景及其分析，成为 Shilnikov 多年来研究的主要课题之一：这些情况解释了混沌动力学是如何在真实世界应用中产生的，并决定了该理论的进一步发展。其他的情况，如周期加倍和环面分解，在后来被发现。然而，Shilnikov 鞍鞍情形是特殊的，因为混沌动力学是在一个分岔中完全形成的。另一种具有相同特性的情况在很久以后被发现——在蓝天灾难中一个双曲吸引子的诞生 [14]；见第六节。

3 螺旋混沌

Shilnikov 环是一个具有正鞍值的鞍焦点的同宿轨道。在开创性的论文 [8] 中，Shilnikov 证明了在三维相空间中这样一个同宿环的存在意味着在三维相空间附近存在无限多个鞍周期轨道。接下来，他将这个结果扩展到四维情况 [15] 上，其中鞍焦点上的所有特征值都是复杂的。在接下来的论文 [16] 中，他分析了一般的多维情况，并证明了同宿环的一个邻域包含一个双曲（混沌）不变集，其中包含无限多个 Smale 马蹄铁。他还详细描述了混沌集合，并表明其结构远比马蹄铁复杂得多。特别地，与混沌集一起，Shilnikov 鞍焦环的一个邻域可以包含无限多个稳定的周期轨道 [17,18]。

图 6 说明了鞍焦环附近混沌存在背后的几何思想。我们考虑了鞍焦点具有特征值 $\lambda\pm i\omega$ 和 γ 的三维情况，即 $\omega\neq0$ 和 $\lambda<0<\gamma$；因此，鞍焦点的稳定流形是二维的，不稳定流形是一维的。让 $\lambda+\gamma>0$。这里，对于鞍同宿环的情况（见图

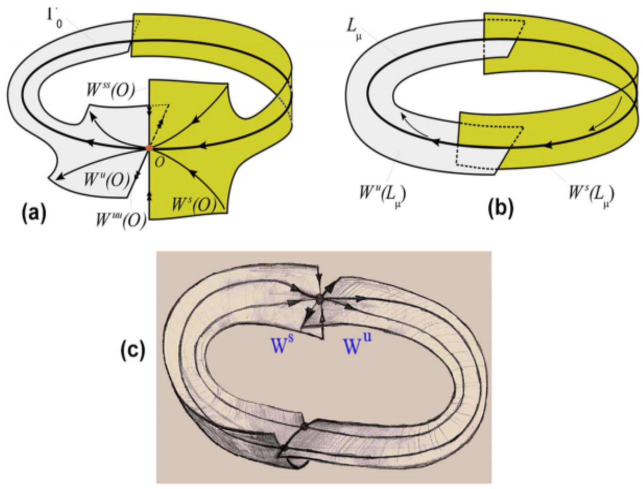

Figure 4: (a) 在三维相空间中具有单同宿轨道 Π_0 的鞍鞍平衡 O，沿此轨道的二维稳定和不稳定不变流形 $W^s(O)$ 和 $W^u(O)$ 横向相交。(b) 一旦鞍鞍消失，同宿轨跃迁到单鞍周期轨道 L_μ。(c) 鞍-鞍可以有几个横向同宿轨道；见参考文献 12。

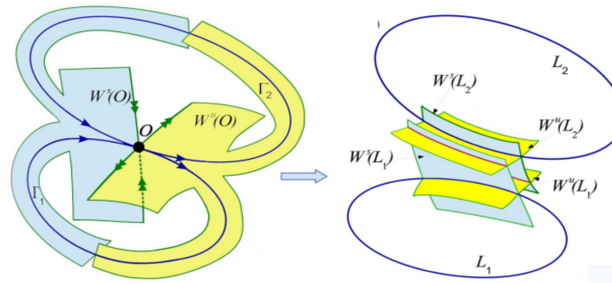

Figure 5: 当具有两个同宿环 Γ_1 和 Γ_2 的鞍鞍 O 消失时，鞍环 L_1 和 L_2 的稳定和不稳定流形横向相交，根据 Shilnikov 定理导致了双曲集的开始；见第 3 节。

3），动力学是由横向到环 Γ_0 的二维截面 Π_0^+ 的第一返回图 T 决定的。由于特征值复杂，图像 $T\left(\Pi_0^+\right)$ 具有螺旋形状，见图 6；因此，图像 $T^{-1}\left(\Pi_0^+\right)\cap\Pi_0^+$ 是一个在 $W_{loc}^s(O)\cap\Pi_0^+$ 上累积的不相交条带 σ_k 序列。鞍值 $\lambda+\gamma$ 的正性意味着 $T\left(\Pi_0^+\right)$ 足够大，因此对于每个 k，图像 $T\left(\sigma_k\right)$ 与 σ_k 相交，而 T 作为 σ_k 上的 Smale 马蹄形图。此外，$T\left(\sigma_k\right)$ 也与其他条带相交。就像 Shilnikov 证明 [16] 的，这创造了一个无限马尔科夫链，它的结构是由 $\rho=\lambda/\gamma$ 的值控制的。后一个结果成为同宿切理论的模型。它也直接暗示了 Shilnikov 混沌的精细结构的敏感参数依赖性，这实际上导致了其动力学和分岔的最大复杂性 (见第 5 节).

Shilnikov 在同宿结构附近发现了惊人的混沌，这是 Shilnikov 科学生涯的决定性时刻，也是他一生探索动力学混沌的许多面背后的同宿结构的起点。在 Arneodo 等人 [19-21] 发表了一系列论文，强调了 Shilnikov 同宿环对混沌理论的重要性后，他的作品在西方获得了认可。从上世纪 70 年代末开始，螺旋混沌由于 Shilnikov 在鞍焦点的发现已经变成各种各样模型中最具有影响力的动力学机制，例如流体动力学、电子学、光学、天体物理学、化学、生物学、力学、神经科学等 [22,23] 等。

这种爆炸性的发展让 Shilnikov 很吃惊：为什么螺旋混沌会发生在如此多不同的模型中，不管它们的性质如何？作为回答，他提出了一种螺旋混沌形成的普遍情况。在某些参数值下，系统通常运行在一个平稳的状态（一个全局稳定的平衡），但参数的变化使动力学混沌。向混沌的过渡需要失去平衡态的稳定性，这通常通过 Andronov-Hopf 分岔发生，在这个分岔中，线性化系统的一对共轭特征值穿过虚轴。Shilnikov 强调，在这个分岔之后，平衡点成为了一个鞍焦点。随着参数的进一步变化，鞍焦点的二维不稳定流形可以形成所谓的 Shilnikov 漩涡（图 7），它限制了一个生成吸引子的盆地。在那之后，随着 Shilnikov 鞍焦点的同宿环的形成，后者变成了螺旋混沌 [24]。

在同一篇论文中，[24]Shilnikov 描述了这种情况的几种实现：“安全”，与周期加倍的级联或环面分解有关，还有“危险”，螺旋混沌在亚临界 Andronov-Hopf 分岔之后立即出现。他为它们提出了几个几何模型和详细的其他类型的混沌吸引子出现的现象学原理，并在参考文献中进一步发展, 见文献 25 和 26。在一篇未发表的手稿中，他建立了一个通过鞍焦同宿分岔出现双曲吸引子的理论。

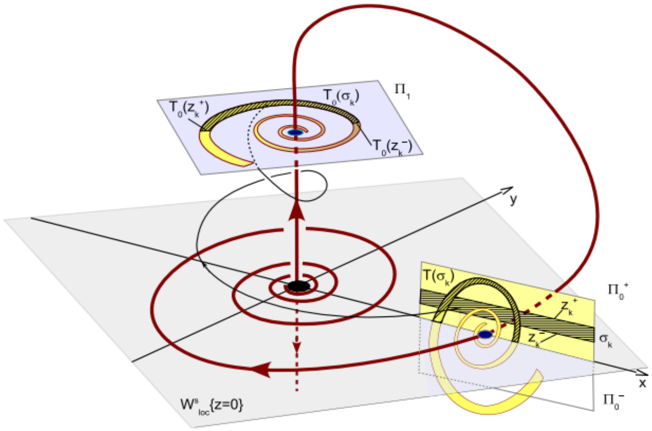

Figure 6: 三维相空间中的 Shilnikov 鞍焦环：一个具有二维稳定流形和一维不稳定流形的同宿轨道 γ_0 到一个鞍焦平衡 O。当鞍值为正时，在与局部稳定流形 $W^s_{\rm loc}(O)$ 横截的截面 π^+ 的回归图上有无穷多个 Smale horseshoes。

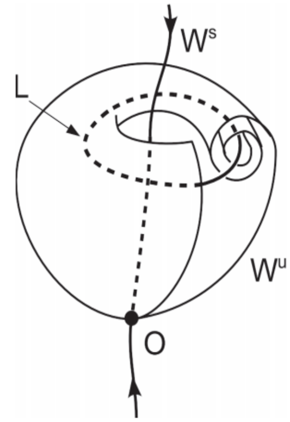

Figure 7: 在具有二维不稳定流形 W^u 的鞍焦平衡 O 附近的 Shilnikov 漩涡的形成先于同宿分岔。

4 同宿混沌

动力学混沌理论的最基本的结果之一是关于庞加莱同宿轨道附近的动力学的 Shilnikov-Smale 定理。该轨道属于鞍形周期轨道的稳定和不稳定不变流形 W^s 与 W^u 的交点，他在向前和向后的时间都趋向于同一个周期轨道。当 W^s 与 W^u 沿 Γ_0 横向相交时，同斜轨道 Γ_0 称为横向轨道；见图 8。

横向同宿轨道存在的可能性是由庞加莱发现的。这一时刻被普遍认为是动力学混沌历史的开始。庞加莱对同宿线缠结的复杂性感到敬畏 [见图 8(a)]，并强调了横向同斜缠结作为不可积性的普遍机制的特殊作用。然而，或多或少的详细的轨道行为附近的庞加莱同宿一直未知，直到 1960 年代中期（唯一的部分结果是 Birkhoff 在 1934 年显示的存在无限多个周期轨道的特殊情况下，映射是二维和区域保存 [28]）。

1965 年，Smale[29] 在横向同宿附近建立了一个非平凡双曲集（Smale 马蹄形）的存在 [图 8(b)]。1967 年，Shilnikov 通过提供了对完全位于横向庞加莱同宿轨道的一个小邻域内的轨道集合 N 的结构的完整描述，从而结束了这个问题。他证明 [13] 了：集合 N 是双曲的，与两个符号的无限序列的集合一一对应 [见图 8(c)]。

我们强调，Shilnikov 是第一个提出并解决了对横向同宿轨道附近动力学的完整描述问题的人，从而揭开了庞加莱同宿纠缠的神秘面纱。他自己认为这个结果在根本上是重要的，并且从不厌倦再次强调庞加莱同宿轨道是混乱的“基本基石”；可以看他的结果 [30]。

我们还应该注意到，Smale 对马蹄铁存在的证明只在假设系统靠近鞍点的情况下是线性的。然而，这种假设并不总是是合理的；例如，共振鞍点。Shilnikov 的方法没有这个缺点。

为了摆脱线性化的假设，他必须克服重大的技术困难。Shilnikov 创造了一种新的数学技术，用来构造鞍平衡态和周期轨道附近的解，使用所谓的边值问题的方法（这项方法在他的原始文章 [13,31] 和书 [32] 中详细描述了）。他系统地将这种强大的方法应用于分析各种同宿现象。他描述了与不变环面 [33] 相关的同宿结构，并与 Lerman 一起描述了无限维 [34] 和一般非自治系统中同宿轨道附近的动力学。这些作品远远超前于他们的时代。我们建议读者参考最近出版的 Shilnikov 精选论文集 [36]。

在这些突破性的结果之后，Shilnikov 启动了一个新的研究项目，系统地研究向混沌过渡的合理场景。自 20 世纪 70 年代初以来，一个由学生和有类似想法的同事组成的庞大团队开始以 L.P.Shilnikov 为中心。他的第一批学生是 N. K. Gavrilov, V. S. Afraimovich, L. M. Lerman, A. D. Morozov, V. Z. Grines, L. A. Belyakov, and V. V. Bykov, ，他们后来成为世界著名的研究人员。随着时间的推移，团队进一步扩大了，加入了 V. I. Lukyanov, Ya. L. Umanskii, N. V. Roschin, A. N.

Bautin, S. V. Gonchenko, M. I. Malkin, I. M. Ovsyannikov, A. L. Shilnikov, V. S. Biragov, D. V. Turaev, M. V. Shashkov, O. V. Stenkin, I. V. Belykh, V. S. Gonchenko 等人，都来自 Nizhny Novgorod。Shilnikov 科学学派迅速增长的活动最终导致了动力系统理论的一个新分支的创建——高维系统的全局分岔理论。

这一新理论的关键挑战是识别和调查庞加莱同宿轨道出现的典型情况，从而，混沌动力学。我们已经在第 3 节中讨论了向螺旋混沌的过渡。下面，我们将回顾一下 Shilnikov 做出决定性贡献的以下主要情况：

1. 通过同宿切线 (非横向庞加莱同宿轨道过渡到混沌；见第 5 节)；
2. 不变环面的分解 (从准周期运动到混沌的转变；见第 6 节)。
3. 洛伦兹吸引子的开始。(见第 7 节)

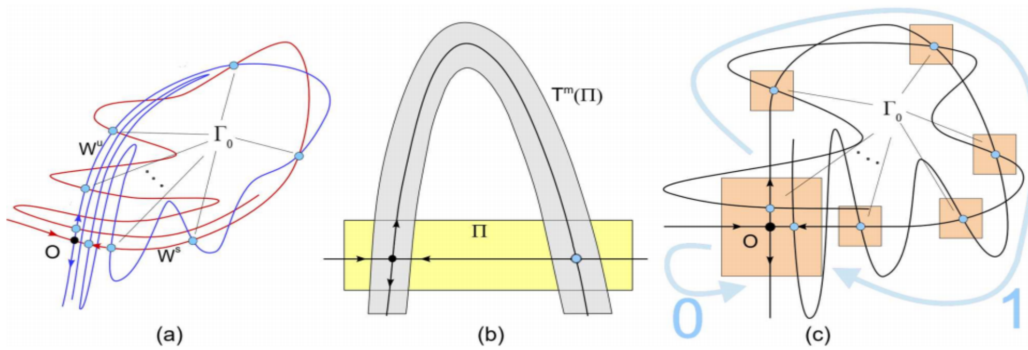

Figure 8: (a) 庞加莱同宿结。(b) 与横向同宿相交的 Smale horseshoe。(c)Shilnikov 方法允许人们解释在横向同宿轨道的一个小邻域（橙色盒子）中的所有轨道。这些轨道都由 0 和 1 的序列唯一编码：符号“0”对应周期轨道的一个小领域的迭代，“1”对应沿同宿的偏移。

5 同宿切线

众所周知，混沌动力学的主要性质是它的结构不稳定性（非双曲性）：一个典型的混沌系统通常通过任意小的参数变化来改变其行为。同宿切线（鞍形周期轨道不变流形的非横向交点）是非双曲混沌系统理论中的一个主要对象；见书 [37]。

同宿切线的系统研究是由 N. K. Gavrilov 和 L. P. Shilnikov 在两篇论文中开始的 [38,39]。首先，他们对不同类型的二次同宿切线进行了分类，并描述了完全位于同宿切轨道的一个小邻域内的非均匀双曲集的结构。他们还研究了一般单参数族中伴随切线分裂的主要分岔，并发现与双曲集共存的稳定周期轨道可以出现在这些分岔上。

让我们来说明二维微分同态的 Gavrilov - Shilnikov 理论。让一个鞍焦点 O 有乘子 λ, γ，使得 $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$ 和 $\sigma \equiv |\lambda\gamma| < 1$。设存在一个同宿轨道 Γ_0，与稳定和不稳定流形 $W^s(O)$ 和 $W^u(O)$ 的二次切线有关。确切来说，假设 $\lambda > 0, \gamma > 0$（λ 和/或 γ 是负数也在文献 38 和 39 中考虑了）。那么，有四种不同类型的同宿切线；见图 9。

具有同宿切线的系统 [图 9(a) 和 9(b)] 的下面属于第一类。在这种情况下，Gavrilov 和 Shilnikov 证明了所有轨道上完全位于 $O \cup \Gamma_0$ 的小邻域 U 的集合 N_0 是平凡的：$N_0 = \{O, \Gamma_0\}$。他们也证明了这一点

- 具有第一类同宿切线的系统可以形成具有简单动力学的系统（Morse-Smale 系统）和具有混沌动力学的系统之间的边界。

因此，第一类同宿切线的分岔（以及具有几个同宿环 [11] 的鞍鞍分岔）成为今天被称为同宿 Ω 爆炸的第一个例子，当混沌（由于横向同宿）瞬间出现时；在参考文献 [40-43] 中看到更多。

在这方面，我们也提到了 Shilnikov 的评论 [44]，在那里他描述了使 Morse-Smale 系统过渡到混沌的关键分支。这些分支的一种类型对应于 Ω 爆炸，如上所述；导致二维不变环面 [45,46] 被破坏的鞍结点分岔是 Ω 爆炸的另一个例子；见第 5 节。L. P.Shilnikov 还描述了只能通过无限序列（级联）分支达到的第二种边界——例如，他提到了因 M. Feigenbaum 的工作而闻名的周期加倍级联 [47]。

从上面开始，具有同宿切线的系统 [图 9(c) 和 9(d)] 属于第二类或第三类。第二类的同宿切线如图 9(c) 所示，在这种情况下，Gavrilov 和 Shilnikov 给出了对 N_0 的完整描述：它是一个非平凡的非均匀双曲集，与三个符号 0、1、2 上的伯努利偏移一一对应，其中两个同宿轨道 $(\ldots,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$ 和 $(\ldots,0,\ldots,0,2,0,\ldots,0,\ldots)$ 粘在一起。他们还展示了

- 具有第二类同宿切线的系统可以形成具有非平凡均匀双曲动力学的结构稳定系统集的边界。

二次同宿切线的分类划分对混沌动力系统的分岔理论的形成具有重要意义。根据切线的分类，与切线分裂相关的全局相空间转换可以导致系统行为的剧烈变化——从规则到混沌，或从结构稳定到非双曲。

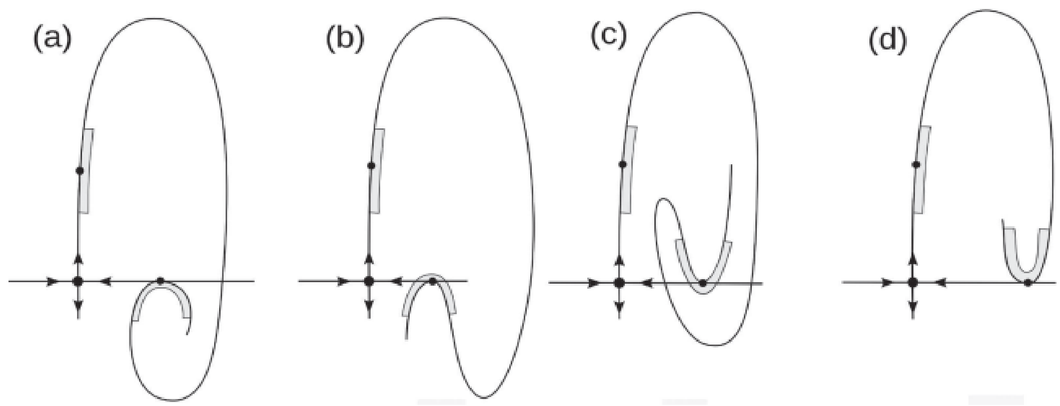

Figure 9: 二维微分同态中各种类型的同宿切线。

图 9(d) 所示的切线属于第三类。在这里，集合 N_0 的结构比前两种情况要复杂得多。Gavrilov 和 Shilnikov 描述了 N_0 的一个大的双曲子集，并证明了这一点

- 集合 N_0 的结构本质上取决于 $\theta = -\frac{ln|\lambda|}{ln|\gamma|}$ 的值, 因此，周期轨道的分岔密集地发生在具有第三类同宿切线的系统集合中；参见参考文献 48 和 49。

后来由 Gonchenko 和 Shilnikov[50-52] 展现，Gavrilov-Shilnikov 参数 θ 是一个不变的（模）ω 等价（拓扑等价的非蜿蜒集）系统的第三类（其他类，θ 不是 ω 模，但是，如下从同宿切线的结果 [53]，这是一个不变的拓扑等价）。进一步的研究显示

- 第三类切线的无穷多个独立 Ω 模的存在性 [54-56].

非正式地说，这意味着我们需要无限多个独立的参数来描述任何具有第三类同宿切线的给定系统的动力学。因此，对于任何在某个参数值上具有同宿切线的有限参数系统族，对动力学和分岔的完整描述都是不可能的！

这个理论的另一个基本发现是一个矛盾的，事实上 [37,54,55]，任何具有二次同宿切线的系统的分岔都会产生任意高阶的同宿切线。这意味着传统的通过在依赖于足够（有限）数量参数的参数位置族中展开来抵消分岔的简并性的逻辑不适用于非双曲混沌的研究。

以下是对 Shilnikov[30,57] 的直接引用:

- 这个令人沮丧的结果更重要，因为在 Newhouse 区域具有第三类同宿切线的系统的密度，也就是说，我们在光滑动力系统的空间中有整个区域，对动力学的完整描述⋯永远无法实现。当我们意识到这一切时，我想起了 E. A.Leontovich 关于在同宿环附近发现混沌的话：它只是不可能！在他关于庞加莱的回忆录的报告中，K.Weierstraß 写道，那篇论文的结果消除了哈密顿系统理论中的许多幻想。从本质上说，这是发展代表非线性动力学本质的定性方法的起点。今天，我们看到，对动力系统进行完整定性分析的可能性也应该被放弃。在这两种情况下，危机的原因都是庞加莱的同宿曲线。

由于对非双曲混沌的完整描述是无法实现的，人们应该集中于它最有趣的性质。这种最一般的性质是不同稳定类型的周期轨道的共存。这一事实，即所谓的“混沌中稳定窗口”的出现，对于任何用具有奇怪吸引子的系统进行数值实验的人来说都是众所周知的。关于这个问题的第一个结果属于 Gavrilov 和 Shilnikov：[39]

- 对于 $\sigma < 1$，对于具有二次同宿切线的二维映射的单参数展开 X_μ，存在一个关于参数 μ 的收敛到 $\mu = 0$ 的无限序列不相交间隔 δ_k，这样 X_μ 有一个稳定的轨道，具有周期 k。

几年后，NewHouse[58,59] 说明有开放区域空间动力系统的系统同宿切线和密集的通用系统从 NewHouse 地区 $\sigma < 1$ 无限许多稳定周期轨道的关闭包含一个非平凡双曲集。

Shilnikov 很清楚，同宿切线的分岔是在混沌系统中发生的最基本的结果之一。因此，对于非双曲混沌，具有足够长周期稳定周期轨道的双曲集共存几乎是不可避免的。这一事实，连同他早期对洛伦兹模型 [60-62] 的研究，使他提出了准吸引子 [63] 的概念，我们将在第 7 节中讨论

接下来，我们想让人们关注到基于本研究的另一个理论。具体地说，用二维微分同态 f 的 $\sigma > 1$ 代替条件 $\sigma < 1$ 等价于用它的逆，f^{-1} 代替 f。因此，Gavrilov-Shilnikov 关于在同宿切线附近的周期汇的结果变换为周期源（绝对值中所有乘数都大于 1 的不稳定周期轨道）的存在问题。正如 Gonchenko, Shilnikov, and Turaev[64] 在二维微分空间中存在开放区域，即所谓的绝对 NewHouse 区域，在那里，具有同宿切线的系统与 $\sigma < 1$ 和 $\sigma > 1$ 都密集。这就意味着：

- 一个来自绝对 NewHouse 区域的一般微分同态具有无穷多个周期的汇、源和鞍，而汇的闭包具有一个非空的交集（它包含一个非平凡的双曲集）。

属于绝对 NewHouse 区域参数值的间隔存在 [64] 在任何通用的单参数展开的二维微分的非横向异宿周期，其中包含至少一个鞍周期轨道的雅可比矩阵（回归映射）大于 1 和一个鞍周期轨道的雅可比矩阵小于 1[图 10(a)]。因此，当非双曲混沌映射存在映射扩展区域和映射收缩区域没有动态分离时，非双曲混沌映射可以属于绝对 NewHouse 区域。

事实上，这种情况在可逆映射和封闭表面上的映射中很常见。对于“动力系统的吸引子”，有几个相互竞争的定义。然而，在任何这样的定义中，吸引子必须包含所有的周期汇。同样地，所有周期源都必须属于排斥子。因此，[64]

- 对于来自绝对 NewHouse 区域的系统，吸引子和排斥子是不可分割的。

总的来说，到更高的维度，请参见参考文献 [65-69]。重要的是，数值观察吸引子和排斥子的鲁棒交集已经被检测到许多例子。这种现象在参考文献中被称为混合动力学。除了经典的保守和耗散混沌外，还可以被认为是一种新的混沌动力学 [79]。

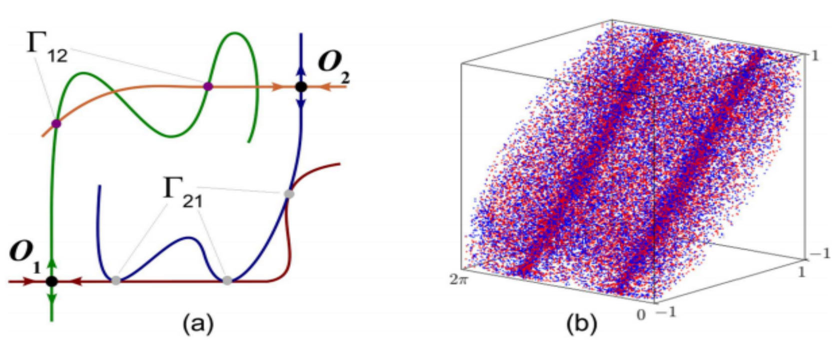

Figure 10: (a) 二维微分 f_0 非横向异宿环包含两个鞍点 O_1 和 O_2 和两个异斜轨道 Γ_{12} 和 Γ_{21} ，使得 $0 < J(O_1) < 1 < J(O_2)$，和 $W^u(O_1)$ 和 $W^s(O_2)$ 在轨道 Γ_{12} 的点上横向相交，而 $W^u(O_2)$ 和 $W^s(O_1)$ 在轨道 Γ_{21} 的点上有一个二次切线。(b)Celtic stone 模型 [70] 产生了混合动力学：一个吸引子（红点）与一个排斥子（蓝色点）共存，它们的相交使图片呈现紫色。

6 通过环面分解得到的同步和混沌的数学理论

经典的同步理论研究了外部周期强迫对自振荡系统的影响或两个自振荡系统的相互作用。该理论的目标是识别参数空间中对应于渐近稳定周期轨道存在的同步区域，并描述发生在同步边界上的动态现象。

对这个问题的兴趣最初是由应用引起的，从 Van der Pol 和 Van der Mark 的实验研究和 Andronov 和 Vitt[81] 的理论工作开始。在同步问题中出现的数学模型是多维的，可以表现出非平凡的动力学和混沌，就像 Cartwright and Littlewood[82-84] 首次发现的那样。现代同步数学理论始于 Afraimovich and Shilnikov[45,46,63,85] 的基本著作，他们提出并发展了新的从同步状态到混沌过渡的普遍机制。在他们的工作之前，大多认为退出的同步区域必然导致准周期机制，即，出现一个光滑的二维不变环面（通过类比系统在一个平面，同宿鞍结点的消失导致一个稳定的极限环的出现）。他们的论文通过证明共振环面可能是不光滑的，并且它的崩溃可能导致一个混沌不变集的开始，从而破坏了这个信条 [45,46,63,85]。

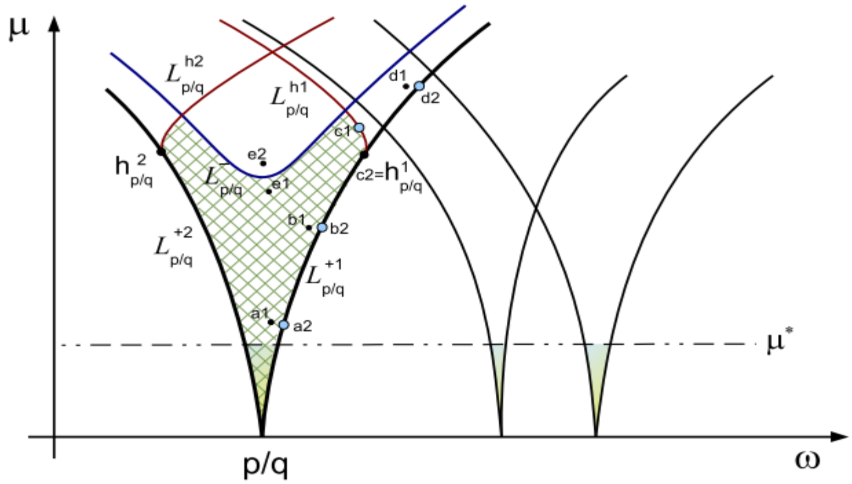

Figure 11: (ω, μ) 参数平面的同步区域

当耗散自振荡系统受到一个小振幅的外部信号的扰动时，初始极限环在扩展的相空间中转化为一个二维渐近稳定、光滑不变的环面 τ。利用环面横截面 S 的双参数族 $T_{\mu\omega}$ 可以研究环面上轨道的行为。这里，参数 μ 和 ω 分别为外力的振幅和频率。

对小参数 μ 情况下映射 $T_{\mu\omega}$ 分岔集的结构如下 [86,87]：对于每个有理数 p/q，在 μ 轴上有一个点 $(\omega = p/q, \mu = 0)$，这是参数平面 (ω, μ) 上同步区域 $A_{p/q}$ 的尖端，如图 11 所示；这也被叫做 Arnold tongue。对于充分小的 $\mu\,(\mu < \mu^*$ 图 11 中)，不同的同步区域不相交，而对于 $(\mu, \omega) \in A_{p/q}$，微分同态 $T_{\mu\omega}$ 有一个合理的旋转数 p/q。因此，在不变环面 τ 上至少存在两个周期轨道。为简单起见，假设恰好有两个这样的轨道。在与横截面 S 的交点上，他们对应于不变曲线 $l_\mu = \tau \cap S$ 上的一对周期 q 轨道-一个稳定 (P_s) 和一个鞍点 (P_u)。区域 $A_{p/q}$ 的边界由两条分岔曲线 $L^{+1}_{p/q}$ 和 $L^{+2}_{p/q}$ 组成，对应于周期 q 的鞍结点轨道的存在，由 P_s 和 P_u 合并形成；见图 11。

为了解释 Afraimovich-Shilnikov 的发现, 我们在图 12 中说明了共振环 l_μ 的演化 (为了简单起见，我们将 P_s 和 P_u 描述为不动点)。请注意不变环 l_μ 是 P_u 的不稳定流形的闭包; 即 $l_\mu = \overline{W^u(P_u)}$。

对于较小的 μ，不变曲线 l_μ 保持平滑：鞍点 P_u 的两个不稳定分离线均平滑地进入 P_s，如图 12（a1）所示。然而，随着 μ 的增加，P_u 的分离物可以开始振荡并不平稳地进入 P_s，如图 12（b1）所示。在同步区域的边界上，P_s 和 P_u 合并成一个鞍结点 O。如果不变曲线 l_μ 此时是平滑的，见图 12（a2)，鞍结点的消失并不破坏不变曲线，动力学保持准周期或周期性。但是，如果 O 的不稳定流形以非光滑的方式返回到它，见图 12（b2)，那么同步区域的推出可以伴随着混沌动力学的出现。与共振环面可以不光滑的事实共同构成开创性工作的主要发现 [45,46,85]。

如果非光滑性足够强，即满足所谓的大环条件 [24,45,85,88]，则在同步区域外边界附近的所有参数值都存在混沌。当非光滑性为“小”且不满足大环条件时，随着同步边界的跨越，具有混沌和简单动力学的区间可以交替出现 [89,90]。

Lukyanov 和 Shilnikov[91] 研究了鞍结点的不稳定流形与其强稳定流形有横向相交的另一个相关分支 [图 12（d2）]。本文为规则振荡和混沌振荡之间的交替现象提供了理论基础，这种现象后来被称为间歇性 [92]。

在下面的论文中]14,93] 中，Shilnikov 和 Turaev 提出了一种新的同宿鞍结分岔，称为“蓝天突变”，如图 13 所示。这个分岔产生了一个无界长度的稳定周期轨道。这是周期轨道的稳定边界的一个例子，与其他八个已知的显著不同 [32,94,95]。最有可能的是，余维 1 已经没有这样的边界了；因此，蓝天突变的发现完成了周期体系的稳定边界的经典问题。研究还表明 [96]，蓝天灾难提供了向混沌过渡的新场景；例如，其中一些可以导致非平凡双曲吸引子的瞬间形成。

在进一步的研究中，我们确定了蓝天灾难是慢-快系统中的一种自然现象 [97]，特别是那些与神经元模型相关的系统 [98-100]。当一系列的快速振荡（簇放电）一个接一个的跟随时，这种分岔负责从快速振荡的状态过渡到所谓的簇放电状态 [101,102]，如图 14 所示。

同样有趣的是，Lukyanov 和 Shilnikov[91] 所考虑的同宿鞍结点分岔在许多神经元模型中都是典型的，在这些模型中，它产生了复杂的脉冲动力学，以及快峰放电和慢簇放电活动的共存 [103,104]。导致复杂动态活动的 Afraimovich-Shilnikov 环面分岔，也恰好是各种低维和高维神经元模型的普遍现象；看参考文献 105 和 106。

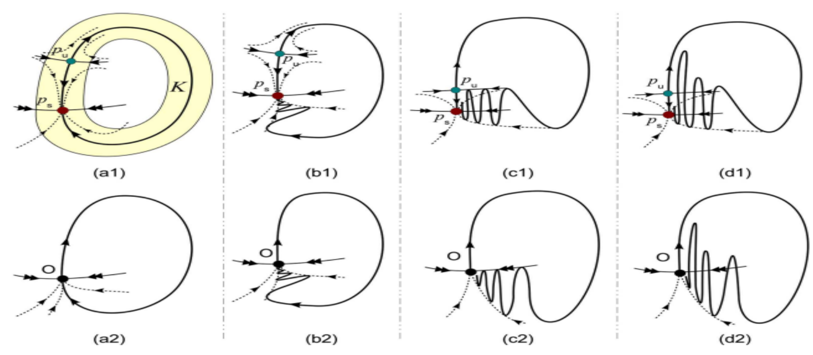

Figure 12: 鞍点 P_u 的不稳定不变流形 W_u 的行为如上一行的图所示；鞍结点 O 的流形 $W_u(O)$ 如下一行的图所示。参数值从图 11 的分岔图中对应的区域中选取；例如，上行对应同步区域的内部，下行对应其边界。

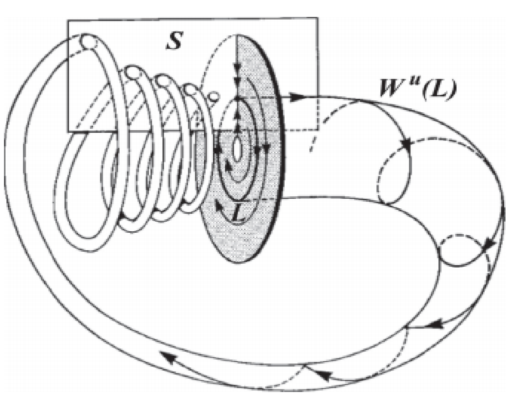

Figure 13: 参考文献 [32] 中说明了蓝天灾难的机制。被压缩的不稳定流形 $W_u(L)$ 从其结点区域返回到鞍结点周期轨道 L，使其与截面 S 的交点圆在随后的每次迭代中越来越收缩。

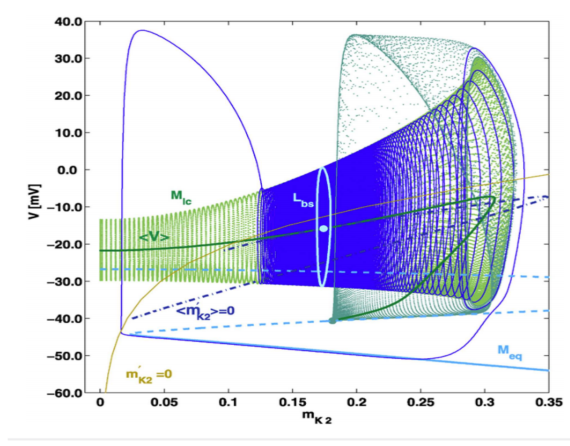

Figure 14: 深蓝色显示的是，一旦鞍结点极限环（浅蓝色）在慢流形 M_{LC} 中消失，在神经模型的三维相空间中从峰放电活动过渡到蓝天灾难的簇轨道转换；见参考文献 103 和 104。

7 洛伦兹吸引子与其他

20 世纪 70 年代末，确定性混沌成为非线性科学的热门话题。数学家们发现在多大程度上与自然科学有关的问题的混沌得到了广泛的讨论，L.P.Shilnikov 积极参与了这个内容 [24,44,107-110]。

转折点——动态混沌是一种基本自然现象的事实证明——是在洛伦兹系统中发现一个奇怪的吸引子 [111]。到那时，在动力系统理论中已知的唯一混沌吸引子是双曲奇异吸引子的抽象例子。然而，由于这些在应用中没有被观察到，非线性科学家仅仅将它们视为纯粹的数学结构。当 Shilnikov 了解了洛伦兹的工作，他立即意识到洛伦兹模型的重要性，这项研究应该导致对多维动力学的新观点。Shilnikov 很清楚，在他之前对同宿分岔的研究中，他已经为研究洛伦兹系统创造了所有必要的机制。他委托 V. S. Afraimovich a 和 V. V. Bykov 开始了关于洛伦兹吸引子的团队工作，从而产生了一系列深刻和有影响力的出版内容。

为了严格研究洛伦兹模型中的混沌，他们引入了所谓的几何模型——一种二维分段光滑映射，其导数满足某些特定的不等式。这是横截面 Π 上的庞加莱映射，它与鞍平衡状态 O 的稳定流形相交；该映射在交线 Π_0 处是不连续的；见图 15。在交线附近，导数的条件与具有正鞍值和非零分线值的同宿环附近的庞加莱映射相同 [9]，见第 2 节。在全局范围内，这些条件的形式类似于 Shilnikov 早期论文 [45,46] 中提出的“环原理”(关于不变环面的分解，见第 6 节)。本质上，这些都是双曲条件——它们表示在平行于不连续线的方向上的收缩和在横向方向上的扩展。重要的是，Afraimovich-Bykov-Shilnikov 双曲性条件是明确可验证的。首先，由 Sinai 和 Vul[112] 以及 Bykov 和 Shilnikov[113] 对洛伦兹模型（在一个参数值下）进行了数值检查，他们通过计算确定了洛伦兹吸引子的存在区域。在经典的洛伦兹参数（$\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$)）下，由 Tucker[114] 验证了双曲性条件，他使用区间算法来严格评估数值精度。

利用几何模型，Afraimovich, Bykov 和 Shilnikov 获得了对洛伦兹吸引子结构的详细描述 (参见参考文献中 [62] 的定理). 他们表明吸引子是一个（奇异）双曲集，在它的邻域中存在一个强收缩不变叶状，这使得庞加莱映射的动力学有效地呈现处一维（即可以用区间的分段扩展映射来描述 [115,116]）。他们还建立了由一个二维传递分量组成的吸引极限集，其中鞍周期轨道稠密，当展开式较弱时，它也可能包含一个一维分量，其中动力学用马尔可夫链描述。后一种情况对应于在一维分量所在的吸引子内出现的空隙。

它也显示在参考文献 [62] 中。洛伦兹吸引子是结构不稳定的：吸引子本身持续存在，但鞍点 O 的同宿环随着参数的变化而出现和消失。文中还描述了导致洛伦兹吸引子的形成、腔隙的出现和吸引子的破坏的关键分岔 [60,117]。

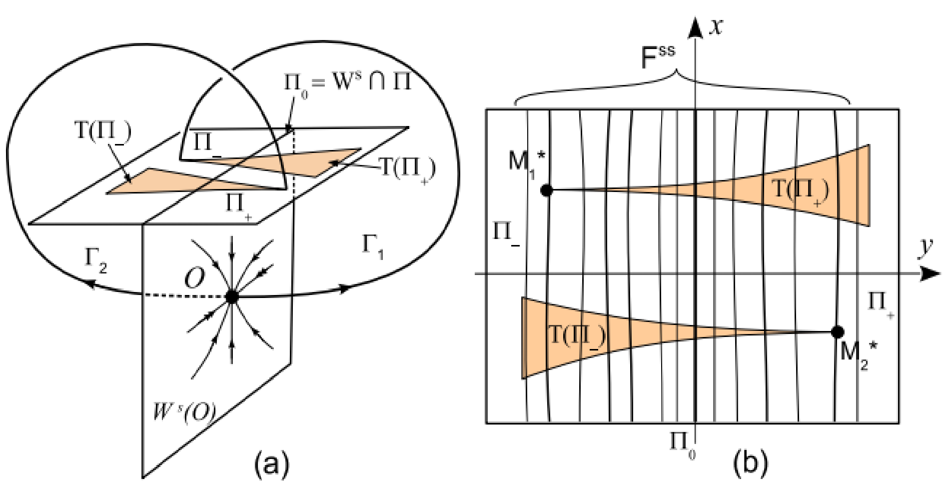

Figure 15: (a) 回归映射 T 由 Afraimovich-Bykov-Shilnikov 几何模型的轨迹生成。映射 T 有一条与鞍平衡 O 的稳定流形相关联的不连续线，它将横截面 π 映射成一对三角形。(b) 在 π 上由水平扩张和垂直收缩引起的强稳定不变叶理。

他们发现的总结 [60] 首次发表于 1977 年，详细的论文 [62] 中包含了 5 年来发表的严格的理论和完整的证明，由于奇怪的情况，这与科学无关。L. P. Shilnikov 准备了一项开创性的调查 [117]，专门用来传播于俄语非线性区域的洛伦兹模型

中关于奇异吸引子及其分岔的数学发现。

西方几乎同时地、独立地出现了大量关于洛伦兹吸引子的出版物 [118-124]，同时参见论文 [125]。然而，Afraimovich-Bykov-Shilnikov 理论仍然是各种系统中类洛伦兹吸引子最完整和最方便的实际性分析。

Shilnikov 对这些结果感到非常自豪，而洛伦兹吸引子的主题一直是他的首要任务，直到他生命的结束。首先以及最重要的是，Shilnikov 最感兴趣的是寻找导致类似洛伦兹吸引子的看似合理的分岔机制。他描述了一组同宿环的特殊分岔 [130]，它保证了在附近的一个开放的参数值集中洛伦兹吸引子的存在，而不需要验证几何模型的双曲性条件。这些准则随后被用于检查 Shimizu-Morioka 模型 [131-134] 和其他系统中的洛伦兹吸引子 [135,136]。在下面的论文中 [137]，标准扩展了，并提出了在局部分岔处洛伦兹吸引子开始的新机制。

洛伦兹吸引子是完全混沌的：其中的每个轨道都是不稳定的。然而，在洛伦兹吸引子研究的论文中 [60,62]，Shilnikov 清楚认识到这种性质并不总是成立的。在洛伦兹模型本身中，参数的变化使动力学保持混沌，但最终，稳定的周期轨道开始在吸引子中出现，正如在参考文献 [61] 中首次报道的那样。Shilnikov 将此与庞加莱图中所谓的钩子造成的双曲性的损失联系起来 [见图 16(a)]；在洛伦兹模型的参数空间中，形成钩子的边界后来在参考文献 [113] 中被数值发现。这在参考文献 [61] 中已经提到过了。钩子的形成和稳定周期轨道的产生与包含鞍点 O 和一对鞍焦点的对称异宿环的出现有关 [图 16(b)]。Bykov[138-140] 在他的博士论文中，对涉及不稳定流形不同维数平衡的异宿环的分岔进行了研究。

通过“Bykov point”的奇怪的洛伦兹模型可能失去其双曲特性并获得稳定的周期轨道作为提出准吸引子吸引不变集的概念，以及非平凡双曲子集，也可以包含长稳定的周期轨道。这些轨道出现在 (通过一个同宿切线，见第 5 节) 在几乎任何场景中的混沌的发展。因此，Shilnikov 认为，准吸引子的概念为大多数计算模型中观察到的动力学混沌提供了最充分的数学描述。

探索这一范式的需要规定了 Shilnikov 和他的研究小组在许多工作中产生伴随稳定周期轨道的双曲集的全局分岔的重点。因此，对于同宿环到鞍焦点的多维系统，Ovsyannikov and Shilnikov[17,18] 建立的条件稳定周期轨道附近的同宿环，以及他们缺失的具体标准（对于系统本身和任何接近它的系统）。后者的结果导致在 4 维及更高的系统中发现了野生螺旋吸引子 [141]。当原点处的鞍点被鞍焦点取代时，得到了洛伦兹吸引子。与洛伦兹吸引子一样，螺旋吸引子不包含稳定的周期轨道（由于 Ovsyannikov-Shilnikov 准则的全局版本）；此外，它所有的轨道都是不稳定的，并且对于系统的任何小扰动都是这样的。图 17 显示了在洛伦兹系统的四维扩展中的野生螺旋吸引子 [142]。

在野生螺旋吸引子中发生的同宿切线使其对其结构和分岔的完整描述不可能实现 [见第 5 节]。尽管如此，主要的事实——吸引子中每个轨道的强大不稳定——已经建立在它伪双曲线的基础上。伪双曲奇异吸引子的概念和理论由 Shilnikov and Turaev 提出并发展 [127,141]。

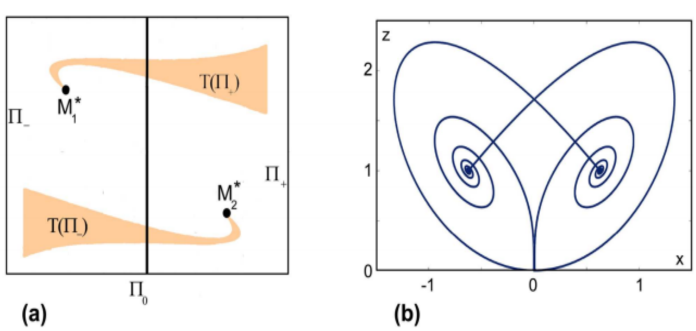

Figure 16: (a) 在 $T(\pi_+)$ 和 $T(\pi_-)$ 尖端的“钩子”导致同宿切线，从而导致稳定的周期轨道。(b) 连接一个鞍点和两个对称鞍焦点的异宿环（在 Shimizu-Morioka 模型 [126] 中）。

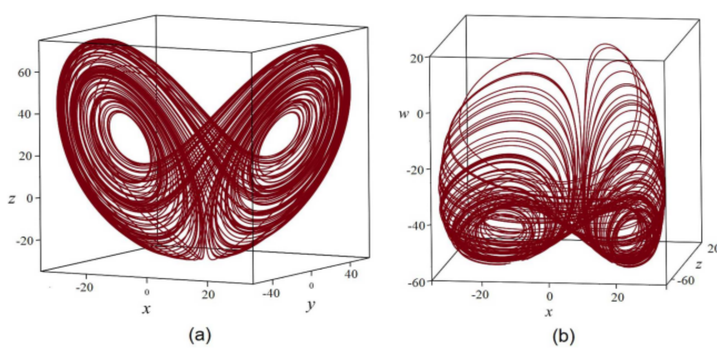

Figure 17: (a) (x, y, z) 相空间 (b) 在 $\sigma = 10, b = 8/3, r = 25$ 点处，4 维类洛伦兹系统 $\{\dot{x} = \sigma(y-x), \dot{y} = x(r-z) - y, \dot{z} = xy - bz + \mu y, \dot{w} = -bw - \mu z\}$ 的奇怪吸引子在 (x, z, w) 相空间的投影; 见参考文献 142。

Shilnikov 提出将这一理论应用于混沌性的证明和进一步研究耦合和周期性扰动的类洛伦兹系统 [127]。在这种情况下

出现的伪双曲吸引子的一个特殊例子是由离散的洛伦兹吸引子给出的 [143]。它们看起来与经典的洛伦兹吸引子非常相似，但顾名思义，出现在具有离散时间的系统中（即微分同态）。这种吸引子已经在广泛的应用中被检测到 [70,143,144]。普遍分岔情形解释了为什么洛伦兹吸引子的离散类比是在 3 维及以上的微分同态是自然的，见参考文献 25。

8 焦点问题的内容

这个焦点问题包含 22 篇文章，致力于动力系统和确定性混沌理论中的各种问题。

论文（参考文献 145-148）研究的重点是螺旋混沌。

Xing, Pusuluri, and Shilnikov[145] 揭示了具有中心对称的系统中 Shilnikov 鞍焦点的主图 8 连接附近的复杂的同宿分岔，并揭示了该系统参数空间中相应分岔曲线的可容许形状。他们用一个新开发的符号工具箱来说明他们的理论，以揭示在两个模型对称系统中的分岔展开的精细组织和自相似性。

A. Gonchenko, M. Gonchenko, Kozlov, and Samylina[146] 提出并研究了三维非定向映射中离散同宿吸引子诞生的情景。这些情况包括离散螺旋吸引子和 Shilnikov 吸引子的出现。

hmamedov, and Kazakov[147] 详细研究了具有形式 $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Cy + Az - y^2$ 的三维非定向 Henon 映射的 Shilnikov 离散同宿吸引子。

Sataev and Stankevich[148] 揭示了改进的 Anishchenko-Astakhov 生成子中超混沌形成的场景。结果表明，这些情况包括分岔级联，导致了离散螺旋 Shilnikov 吸引子的出现。

以下三篇论文 (参考文献 149-151）聚焦在洛伦兹类吸引子上。

Malkin and Safonov[149] 考虑了区间的类洛伦兹映射的双参数族。他们在其中找到了参数平面上拓扑熵单调依赖于参数的区域，以及单调性被打破的区域。

V. Belykh, Barabash, and I. Belykh[150] 研究了分段光滑洛伦兹型系统中的同宿分岔。他们解析地构造了庞加莱回归图，并利用它来建立滑动运动的存在，从而严格地描述了破坏混沌洛伦兹型吸引子的滑动同宿分岔。

S. Gonchenko, A. Gonchenko, Kazakov, and Samylina 综述了离散类洛伦兹吸引子的几何和动力学性质，并提出了新的离散伪双曲吸引子。

以下四篇论文 (参考文献 152-155）研究了双曲吸引子。

Kuznetsov, Kruglov, and Sataev[152] 提供了解析和数值证据，证明了在一个具有复变量的简单自振荡系统中存在 Smale-Williams 型一致双曲吸引子的情况。

在 Kuptsov and Kuznetsov 的论文中，研究了一个具有非线性时滞特性的慢调节自振荡系统。结果表明，该系统是两个耦合的双曲混沌子系统，可以发生向双曲超混沌的过渡。

Barinova, Grines, Pochinka 和 Yu[154] 建立了具有双曲吸引子和双曲排斥子的三维微分同态的能量函数的存在性。

Grines and Mints[155] 描述了对曲面的 A-微分同态的平凡和非平凡双曲基本集的可能类型的限制。

以下四篇论文 (参考文献 156-159) 讨论了同步和到混沌的转化。

Garashchuk and Sinelshchikov[156] 研究了在两个相互作用的微气泡造影剂暴露在外部超声场下的模型中，同步振荡的破坏过程。

Kashchenko[157] 考虑了大量耦合 Van der Pol 方程的环链中两种单向平流耦合的影响。研究了局部近平衡动力学，并描述了解的渐近性态。

Deng 和 Li[158] 提出了一个简单的混沌忆阻器电路，并证明了其动力学特性。

Munyaev, Khorkin, Bolotov, Smirnov, and Osipov[159] 研究了具有恒定转矩的局部耦合相同钟摆链。他们表明，混沌和超混沌是由于个体属性和所考虑的整体属性的变化的结果。

以下四篇论文 (参考文献 78 和 160-162）研究了可逆的哈密顿系统和新型的动力学混沌-混合动力学。

Turaev[160] 给出了具有横向和非横向同宿轨道的可逆图中的非保守动力学的准则。

Emelianova and Nekorkin[78] 描述了在谐波外力作用下，两个自适应耦合相位振荡器系统中混合动力学的出现。他们表明，混合动力学阻止了混沌状态的强制同步，并且，如果一个外力被施加于一个可逆的核，其分形维数减小。

Lerman and Trifonov[161] 研究了具有鞍中心平衡和鞍周期轨道的可逆哈密顿系统中的同宿和异宿分岔。

Bizyaev, Bolotin, and Mamaev[162] 研究了具有周期性变化的质量分布的非完整系统（Chaplygin sleigh 和 Suslov 系统）的动力学。

以下三篇论文 (参考文献 163-165) 研究了具有简单动力学的系统，以及叶状结构的动力学。

Iljashenko[163] 研究了平面上矢量场族的分岔图的结构。在其他结果中，他构造了双参数分岔图的可数成对非等价项。

Bazaikin, Galaev, and Zhukova[165] 阐述了 Cartan 叶状的理论及其与混沌动力学的关系。

Malyshev, Morozov, and Pochinka[164] 提出了一种新的在二维曲面上分类 Morse-Smale 微分同态的方法，它允许开发有效的算法，可以在多项式时间内计算 Morse-Smale 微分同态的拓扑类（作为周期点数量的函数）。

参考文献

[1] A. Andronov and E. Leontovich, ”Some cases of dependence of limit cycles on a parameter,” Uchenye zapiski Gorkovskogo Universiteta, 1937, Vol. 6, pp. 3-24.

[2] A. Andronov, E. A. Leontovich et al., To the theory of changing of qualitative structure of trajectories on the plane,” Dokl. Akad. Nauk 21, 427-430 (1938).

[3] A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon, and A. Mayer, Qualitative Theory of Dynamical Systems of the Second Order (Mir, Moscow, 1966).

[4] A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon, and A. Mayer, Bifurcations Theory for Dynamical Systems on the Plane (Nauka, Moscow, 1967).

[5] L. Shilnikov, ”On some cases of the birth of periodic orbits in n-dimensional space,” Ph.D. thesis (Gorky University, 1962).

[6] L. P. Shilnikov, ”Some instances of generation of periodic motions in n-space,” Dokl. Akad. Nauk 143, 289-292 (1962).

[7] L. P. Shilnikov, ”Some cases of generation of period motions from singular trajectories,” Mat. Sb. 103, 443-466 (1963).

[8] L. P. Shilnikov, ”A case of the existence of a denumerable set of periodic motions,” Dokl. Akad. Nauk 160, 558-561 (1965).

[9] L. P. Shilnikov, ”On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type,” Mat. Sb. 119, 461-472 (1968).

[10] L. P. Shilnikov, ”Generation of a periodic motion from the trajectory going from the state of equilibrium of the saddle-saddle type into the same state,” Dokl. Akad. Nauk 170, 49-52 (1966).

[11] L. P. Shilnikov, ”A certain new type of bifurcation of multidimensional dynamic systems,” Dokl. Akad. Nauk 189, 59-62 (1969).

[12] L. P. Shilnikov and A. Shilnikov, ”Shilnikov saddle-node bifurcation,” Scholarpedia 3, 4789 (2008).

[13] L. P. Shilnikov, ”On a Poincaré-Birkhoff problem,” Mat. Sb. 116, 378-397 (1967).

[14] D. V. Turaev and L. P. Shilnikov, ”Blue sky catastrophes,” Dokl. Akad. Nauk 342, 596-599 (1995).

[15] L. P. Shilnikov, ”Existence of a countable set of periodic motions in a fourdimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus,” Dokl. Akad. Nauk 172, 54-57 (1967).

[16] Shilnikov, ”On the question of the structure of an extended neighborhood of a structurally stable state of equilibrium of saddle-focus type,” Mat. Sb.(NS) 81, 92-103 (1970).

[17] I. M. Ovsyannikov and L. P. Shilnikov, ”On systems with a saddle-focus homoclinic curve,” Math. USSR Sb. 58, 557 (1987).

[18] I. Ovsyannikov and L. P. Shilnikov, ”Systems with a homoclinic curve of multidimensional saddle-focus, and spiral chaos,” Mathematics of the USSR-Sbomik 73(2), 415-443 (1992).

[19] A. Arneodo, P. Coullet, and C. Tresser, ”Occurence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations,” Phys. Lett. A 79, 259-263 (1980).

[20] A. Arneodo, P. Coullet, and C. Tresser, ”Possible new strange attractors with spiral structure,” Commun. Math. Phys. 79, 573-579 (1981).

[21] A. Arneodo, P. Coullet, and C. Tresser, ”Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov,” J. Stat. Phys. 27, 171-182 (1982).

[22] V. S. Afraimovich, S. V. Gonchenko, L. M. Lerman, A. L. Shilnikov, and D. V. Turaev, ”Scientific heritage of LP Shilnikov,” Regul. Chaotic Dyn. 19, 435-460 (2014).

[23] S. V. Gonchenko, A. S. Gonchenko, A. O. Kazakov, A. D. Kozlov, and Y. V. Bakhanova, ”Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 2. Spiral chaos of three-dimensional flows,” Izv. VUZ. Appl. Nonlinear Dyn. 27, 7-52 (2019).

[24] L. Shilnikov, ”Bifurcation theory and turbulence-I,” in Methods of Qualitative Theory of Differential Equations (Gorki University, 1986), pp. 150-163.

[25] S. V. Gonchenko, A. S. Gonchenko, and L. P. Shilnikov, ”Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps,” Russ. J. Nonlinear Dyn. 8, 3-28 (2012).

[26] A. Gonchenko, S. Gonchenko, A. Kazakov, and D. Turaev, ”Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps,” Int. J. Bifurc. Chaos 24, 1440005 (2014).

[27] H. Poincaré, New Methods of Celestial Mechanics (National Aeronautics and Space Administration, 1967), Vol. 2.

[28] G. D. Birkhoff, Nouvelles Recherches Sur Les Systémes Dynamiques... (Ex aedibus academicis in Civitate Vaticana, 1934).

[29] S. Smale, Diffeomorphisms with Many Periodic Points (Princeton University Press, 1965), pp. 63-80.

[30] L. Shilnikov, ”Homoclinic trajectories: From Poincaré to the present,” in Mathematical Events of the Twentieth Century (Springer, 2006), pp. 347-370.

[31] V. S. Afraimovich and L. P. Shilnikov, ”The singular sets of Morse-Smale systems,” Tr. Mosk. Mat. Obs. 28, 181-214 (1973).

[32] L. P. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev, and L. Chua, Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Parts I and II, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A (World Scientific, 1998, 2001), Vol. 5.

[33] L. P. Shilnikov, On the Question of the Structure of the Neighborhood of a Homoclinic Tube of an Invariant Torus (Russian Academy of Sciences, 1968), pp. 286-289.

[34] L. M. Lerman and L. P. Shilnikov, ”Homoclinic structures in infinitedimensional systems,” Sib. Math. J. 29, 408-417 (1988).

[35] L. Lerman and L. Shilnikov, ”Homoclinical structures in nonautonomous systems: Nonautonomous chaos,” Chaos 2, 447-454 (1992).

[36] V. Afraimovich, L. Belyakov, S. Gonchenko, L. Lerman, A. Morozov, D. Turaev, and A. Shilnikov, Selected Scientific Works of L.P. Shilnikov (UNN, Nizhny Novgorod, 2017).

[37] S. Gonchenko and L. Shilnikov, ”Homoclinic tangencies,” Thematic Issue: Moscow-Izhevsk RCD, 52-54 (2007).

[38] N. Gavrilov and L. Shilnikov, ”On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. I,” Math. USSR-Sb. 17, 467 (1972).

[39] N. Gavrilov and L. Shilnikov, ”On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. II,” Math. USSR-Sb. 19, 139 (1973).

[40] S. Newhouse and J. Palis, ”Cycles and bifurcation theory,” Astérisque 31, 98 (1976).

[41] . Palis and F. Takens, ”Cycles and measure of bifurcation sets for twodimensional diffeomorphisms,” Invent. Math. 82, 397-422 (1985).

[42] O. V. Stenkin and L. P. Shilnikov, ”Homoclinic Ω-explosion and domains of hyperbolicity,” Sb.: Math. 189, 603 (1998).

[43] S. V. Gonchenko and O. V. Stenkin, ”Homoclinic Ω-explosion: Hyperbolicity intervals and their boundaries,” Russ. J. Nonlinear Dyn. 7, 3-24 (2011).

[44] L. Shilnikov, ”Theory of bifurcations of dynamical systems with homoclinic Poincaré curves,” in VII International Conference for Nonlinear Oscillations. Bd (Ukrainian Mathematical J. 1977), Vol. 12.

[45] V. S. Afraimovich and L. P. Shilnikov, ”On some global bifurcations connected with the disappearance of a fixed point of saddle-node type,” Dokl. Akad. Nauk 219, 1281-1284 (1974).

[46] V. Afraimovich and L. Shilnikov, ”The ring principle in problems of interaction between two self-oscillating systems,” Prikl. Mat. Mekh. 41, 618-627 (1977).

[47] M. J. Feigenbaum, ”Quantitative universality for a class of nonlinear transformations,” J. Stat. Phys. 19, 25-52 (1978).

[48] S. V. Gonchenko and L. P. Shilnikov, ”Dynamical systems with structurally unstable homoclinic curves,” Dokl. Akad. Nauk 286, 1049-1053 (1986).

[49] S. Gonchenko and L. Shilnikov, ”Arithmetic properties of topological invariants of systems with nonstructurally-stable homoclinic trajectories,” Ukr. Math. J. 39, 15-21 (1987).

[50] . Gonchenko, ”Moduli of systems with non-rough homoclinic orbits (the cases of diffeomorphisms and vector fields),” in Methods of Qualitative Theory of Differential Equations (American Mathematical Society, 1989), pp. 34-49.

[51] . Gonchenko and L. Shilnikov, ”Invariants of Ω-conjugacy of diffeomorphisms with a nontransversal homoclinic orbit,” Ukr. Math. J. 42, 134-140 (1990).

[52] S. Gonchenko and L. Shilnikov, ”On the moduli of systems with a non-rough Poincaré homoclinic curve,” Izv. RAN 41, 417-445 (1993).

[53] . Palis et al., ”A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability,” Asterisque 51, 335-346 (1978).

[54] S. Gonchenko, L. Shilnikov, and D. Turaev, ”On models with non-rough Poincaré homoclinic curves,” Physica D 62, 1-14 (1993).

[55] S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, and L. P. Shilnikov, ”Homoclinic tangencies of arbitrary order in Newhouse domains,” Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. J. Math. Sci. 105(1), 1738-1778 (2001).

[56] . Gonchenko, ”Dynamics and moduli of Ω-conjugacy of 4D-diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic orbit to a saddle-focus fixed point,” in Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics, American Mathematical Society Translations (American Mathematical Society, 2000), pp. 107-134.

[57] L. Shilnikov, ”Homoclinic orbits: Since Poincaré till today,” (2000).

[58] S. E. Newhouse, ”Diffeomorphisms with infinitely many sinks,” Topology 13, $9-18$ (1974).

[59] S. E. Newhouse, ”The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms,” Publ. Math. l’IHÉS 50, 101-151 (1979).

[60] V. S. Afraimovich, V. Bykov, and L. P. Shilnikov, ”On the origin and structure of the Lorenz attractor,” Akad. Nauk SSSR Dokl. 234, 336-339 (1977).

[61] V. Afraimovich, V. Bykov, and L. Shilnikov, ”On the existence of stable periodic orbits in the Lorenz model,” Russ. Math. Surveys 36, 164-165 (1980).

[62] V. S. Afraimovich, V. Bykov, and L. P. Shilnikov, ”Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type,” Tr. Mosk. Mat. Obs. 44, 150-212 (1982).

[63] V. Afraimovich and L. Shilnikov, ”Invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity,” in Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations (Gorki University, 1983), pp. 3-26.

[64] S. Gonchenko, L. P. Shilnikov, and D. Turaev, ”Quasiattractors and homoclinic tangencies,” Comput. Math. Appl. 34, 195-227 (1997).

[65] Turaev, ”On dimension of non-local bifurcational problems,” Int. J. Bifurc. Chaos 6, 919-948 (1996).

[66] S. Gonchenko, L. Shilnikov, and O. Stenkin, ”On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori,” in Proceedings of the International Conference on ”Progress in Nonlinear Science” dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov (Institute of Applied Physics, University of Nizhny Novgorod, 2002), pp. 2-6.

[67] S. V. Gonchenko, O. V. Stenkin, and L. P. Shilnikov, ”On the existence of infinitely many stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse regions with heteroclinic tangencies,” Russ. J. Nonlinear Dyn. 2, 3-25 (2006).

[68] D. Turaev, ”Richness of chaos in the absolute Newhouse domain,” in Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (ICM 2010) (4 Vols.) Vol. I: Plenary Lectures and Ceremonies Vols. II-IV: Invited Lectures (World Scientific, 2010), pp. 1804-1815.

[69] . Turaev, ”Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain,” Commun. Math. Phys. 335, 1235-1277 (2015).

[70] A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, and A. O. Kazakov, ”Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone,” Regul. Chaotic Dyn. 18, 521-538 (2013).

[71] A. O. Kazakov, ”Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane,” Regul. Chaotic Dyn. 18, 508-520 (2013).

[72] A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, and D. V. Turaev, ”On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotators,” Physica D 350, 45-57 (2017).

[73] A. Emelianova and V. I. Nekorkin, "On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators," Chaos 29, 111102 (2019).

[74] Kazakov, "On the appearance of mixed dynamics as a result of collision of strange attractors and repellers in reversible systems," Radiophys. Quantum Electron. 61, 650-658 (2019).

[75] A. A. Emelianova and V. I. Nekorkin, "The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators," Chaos 30, 051105 (2020).

[76] S. V. Gonchenko, A. S. Gonchenko, and A. O. Kazakov, "Three types of attractors and mixed dynamics of nonholonomic models of rigid body motion," Proc. Steklov Inst. Math. 308, 125-140 (2020).

[77] A. Kazakov, "Merger of a Hénon-like attractor with a Hénon-like repeller in a model of vortex dynamics," Chaos 30, 011105 (2020).

[78] A. A. Emelianova and V. I. Nekorkin, "Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators," Chaos 31, 033102 (2021).

[79] S. V. Gonchenko and D. V. Turaev, "On three types of dynamics and the notion of attractor," Proc. Steklov Inst. Math. 297, 116-137 (2017).

[80] B. Van der Pol and J. Van Der Mark, "Frequency demultiplication," Nature 120, 363-364 (1927).

[81] A. Andronov and A. Vitt, "On mathematical theory of entrainment," Zh. Prikl. Fiz. (J. Appl. Phys.) 7, 3 (1930).

[82] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, "On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $\ddot{y}-k\left(1-y^2\right)\dot{y}+y=b\lambda k\cos(\lambda t+\alpha), k$ large," J. London Math. Soc. 1, 180-189 (1945).

[83] Littlewood, "On non-linear differential equations of the second order: III. The equation $\ddot{y}-k\left(1-y^2\right)\dot{y}+y=b\mu k\cos(\mu t+\alpha)$ for large k, and its generalization," Acta Math. 97, 267-308 (1957).

[84] Littlewood, "On non-linear differential equations of the second order: IV. The general equation $\ddot{y}-kf(y)\dot{y}+g(y)=bkp(\varphi), \varphi=t+\alpha$," Acta Math. 98, 1-110 (1957).

[85] V. S. Afraimovich and L. P. Shilnikov, "On small periodic perturbations of autonomous systems," Dokl. Akad. Nauk 214, 739-742 (1974).

[86] V. I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations (Springer Science and Business Media, 2012), Vol. 250.

[87] V. Afraimovich, V. Arnold, Y. S. Ilyashenko, and L. Shilnikov, Dynamical Systems V, Encyclopedia of Mathematical Sciences (Springer, 1989).

[88] A. Shilnikov, L. Shilnikov, and D. Turaev, "On some mathematical topics in classical synchronization.: A tutorial," Int. J. Bifurc. Chaos 14, 2143-2160 (2004)

[89] S. E. Newhouse, J. Palis, and F. Takens, "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms," Publ. Math. l'IHÉS 57, 5-71 (1983).

[90] D. Turaev and L. Shilnikov, "Bifurcation of torus-chaos quasi-attractors," in Mathematical Mechanisms of Turbulence: Contemporary Theory of Nonlinear Dynamics with Application to Turbulence Modeling (1986), pp. 113-121.

[91] V. I. Lukyanov and L. P. Shilnikov, "On some bifurcations of dynamical systems with homoclinic structures," Dokl. Akad. Nauk 243, 26-29 (1978).

[92] Y. Pomeau and P. Manneville, "Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems," Commun. Math. Phys. 74, 189-197 (1980).

[93] L. P. Shilnikov and D. V. Turaev, "A new simple bifurcation of a periodic orbit of blue sky catastrophe type, " in Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics, Translations of the American Mathematical Society: Series 2 (American Mathematical Society, 2000), Vol. 200, pp. 165-188.

[94] Bautin, The Behaviour of Dynamical Systems Close to the Boundaries of a Stability Domain (Gostekhizdat, Leningrad, 1949) (in Russian).

[95] Bautin and L. Shilnikov, "Behavior of dynamical systems near a boundary of stability domain of equilibrium states and periodic motions ("dangerous" and "nondangerous" boundaries)," in Appendix to Russian edition of The Hopf Bifurcation and Its Applications, edited by J. Marsden and M. McCraken (M.: Mir, 1980), pp. 294-316.

[96] Shilnikov and D. Turaev, ”Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors,” Comput. Math. Appl. 34, 173-193 (1997).

[97] A. L. Shilnikov, L. P. Shilnikov, and D. V. Turaev, ”Blue-sky catastrophe in singularly perturbed systems,” Moscow Math. J. 5, 269-282 (2005).

[98] G. S. Cymbalyuk, R. L. Calabrese, and A. L. Shilnikov, ”How a neuron model can demonstrate co-existence of tonic spiking and bursting,” Neurocomputing 65, 869-875 (2005).

[99] P. Channell, Jr., G. Cymbalyuk, and A. Shilnikov, ”Applications of the Poincaré mapping technique to analysis of neuronal dynamics,” Neurocomputing **70**, 2107-2111 (2007).

[100] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, and D. V. Turaev, ”Showcase of blue sky catastrophes,” Int. J. Bifurc. Chaos 24, 1440003 (2014).

[101] A. Shilnikov and G. Cymbalyuk, ”Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe,” Phys. Rev. Lett. 94, 048101 (2005).

[102] A. Shilnikov, R. L. Calabrese, and G. Cymbalyuk, ”Mechanism of bistability: Tonic spiking and bursting in a neuron model,” Phys. Rev. E 71, 056214 (2005).

[103] A. L. Shilnikov and G. Cymbalyuk, ”Homoclinic bifurcations of periodic orbits en a route from tonic spiking to bursting in neuron models,” Regul. Chaotic Dyn. 9, 281-297 (2004).

[104] A. Shilnikov, ”Complete dynamical analysis of a neuron model,” Nonlinear Dyn. 68, 305-328 (2012).

[105] H. Ju, A. B. Neiman, and A. L. Shilnikov, ”Bottom-up approach to torus bifurcation in neuron models,” Chaos 28, 106317 (2018).

[106] K. Pusuluri, H. Ju, and A. L. Shilnikov, ”Chaotic dynamics in neural systems,” in Synergetics, Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series (Springer, 2020), pp. 197-209.

[107] E. Leontovich-Andronova and L. Shilnikov, ”The current state of the theory of bifurcations of dynamical systems,” in Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Oscillations, Kiev (Ukrainian Mathematical Journal, 1970), Vol. 2, pp. 282-291.

[108] V. Afraimovich and L. Shilnikov, ”Strange attractors and quasiattractors,” in Nonlinear Dynamics and Turbulence, edited by G. I. Barenblatt, G. Iooss, and D. D. Joseph (Pitman, New York, 1983).

[109] L. P. Shilnikov, ”Bifurcation theory and strange attractors,” in Proceedings, Kiev (Ukrainian Mathematical Journal, 1984), p. 8.

[110] L. P. Shilnikov, ”Bifurcation theory and turbulence,” in Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Gorki University, 1984), p. 1627.

[111] E. N. Lorenz, ”Deterministic nonperiodic flow,” J. Atmos. Sci. 20, 130-141 (1963).

[112] J. G. Sinai and E. B. Vul, ”Hyperbolicity conditions for the Lorenz model,” Physica D 2, 3-7 (1981).

[113] Bykov and A. Shilnikov, ”On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor,” in Methods of Qualitative Theory and Theory of Bifurcations (Gorky State University, 1989), pp. 151-159.

[114] W. Tucker, ”The Lorenz attractor exists,” C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. 328, 1197-1202 (1999).

[115] M. Malkin, ”Rotation intervals and dynamics of Lorenz-like maps,” in Methods of Qualitative Theory of Differntial Equations (Gorki, 1985), pp. 122-139.

[116] M. Malkin and K. Safonov, ”Entropy charts and bifurcations for Lorenz maps with infinite derivatives,” Chaos 31, 043107 (2021).

[117] L. Shilnikov, ”Bifurcation theory and the Lorenz model,” in Appendix to Russian edition of The Hopf Bifurcation and Its Applications, edited by J. Marsden and M. McCraken (M.: Mir, 1980), pp. 317-335.

[118] O. Lanford, ”Appendix to lecture VII: Computer pictures of the Lorenz attractor,” in Turbulence Seminar (Springer, 1977), pp. 113-116.

[119] D. Ruelle, ”The Lorenz attractor and the problem of turbulence,” in Turbulence and Navier Stokes Equations (Springer, 1976), pp. 146-158.

[120] Guckenheimer, ”A strange, strange attractor,” in The Hopf Bifurcation and Its Applications (Springer, 1976), pp. 368-381.

[121] R. F. Williams, ”The structure of Lorenz attractors,” Publ. Math. l'IHES 50, 73-99 (1979).

[122] J. A. Yorke and E. D. Yorke, ”Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model,” J. Stat. Phys. 21, 263-277 (1979).

[123] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, ”Preturbulence: A regime observed in a fluid flow model of Lorenz,” Commun. Math. Phys. 67, 93-108 (1979).

[124] D. Rand, ”The topological classification of Lorenz attractors,” Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 83, 451-460 (1978).

[125] Y. G. Sinai and L. Shilnikov, Strange Attractors, A Collection of Papers (Mir, Moscow, 1981).

[126] A. L. Shilnikov, ”On bifurcations of the Lorenz attractor in the ShimizuMorioka model,” Physica D 62, 338-346 (1993).

[127] D. Turaev and L. P. Shilnikov, ”Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-type attractors,” Dokl. Math. 77, 17-21 (2008).

[128] S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, and D. V. Turaev, ”On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors,” Regul. Chaotic Dyn. 14, 137-147 (2009).

[129] R. Barrio, A. Shilnikov, and L. Shilnikov, ”Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos,” Int. J. Bifurc. Chaos 22, 1230016 (2012).

[130] Shilnikov, ”The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors,” Usp. Mat. Nauk 36, 240-241 (1981).

[131] A. Shilnikov, ”Bifurcations and chaos in the Shimizu-Marioka system,” in Methods and Qualitative Theory of Differential Equations (Gorky State University, 1986), pp. 180-193.

[132] A. Shilnikov, ”Bifurcations and chaos in the Shimizu-Morioka system: II,” in Methods and Qualitative Theory of Differential Equations (Gorky State University, 1989), pp. 130-137.

[133] A. Shilnikov, ”Bifurcation and chaos in the Morioka-Shimizu system,” Sel. Math. Sov. 10, 105-117 (1991).

[134] M. J. Capiński, D. Turaev, and P. Zgliczyński, ”Computer assisted proof of the existence of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka system,” Nonlinearity 31, 5410 (2018).

[135] C. Robinson, ”Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type,” Nonlinearity 2, 495 (1989).

[136] M. R. Rychlik, ”Lorenz attractors through Šil'nikov-type bifurcation. Part I,” Ergod. Theory Dyn. Syst. 10, 793-821 (1990).

[137] A. L. Shilnikov, L. P. Shilnikov, and D. Turaev, ”Normal forms and Lorenz attractors,” Int. J. Bifurc. Chaos 3, 1123-1139 (1993).

[138] Bykov, ”On the structure of a neighborhood of a separatrix contour with a saddle-focus,” in Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations (Gorki University, 1978), pp. 3-32.

[139] Bykov, ”Bifurcations of dynamical systems close to systems with a separatrix contour containing a saddle-focus,” in Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations (Gorki University, 1980), pp. 44-72.

[140] Bykov, ”The bifurcations of separatrix contours and chaos,” Physica D 62, 290-299 (1993).

[141] D. Turaev and L. P. Shilnikov, ”An example of a wild strange attractor,” Sb.: Math. 189, 291 (1998).

[142] S. Gonchenko, A. Kazakov, and D. Turaev, ”Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system,” Nonlinearity 34, 2018-2047 (2021).

[143] S. V. Gonchenko, I. Ovsyannikov, C. Simó, and D. Turaev, ”Threedimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors,” Int. J. Bifurc. Chaos 15, 3493-3508 (2005).

[144] S. Gonchenko, A. Gonchenko, I. Ovsyannikov, and D. Turaev, ”Examples of Lorenz-like attractors in Hénon-like maps,” Math. Model. Nat. Phenom. 8, 48-70 (2013).

[145] T. Xing, K. Pusuluri, and A. L. Shilnikov, ”Ordered intricacy of Shilnikov saddle-focus homoclinics in symmetric systems,” Chaos 31, 073143 (2021).

[146] A. Gonchenko, M. Gonchenko, A. Kozlov, and E. Samylina, ”On scenarios of the onset of homoclinic attractors in three-dimensional non-orientable maps,” Chaos 31, 043122 (2021).

[147] E. Karatetskaia, A. Shykhmamedov, and A. Kazakov, ”Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps,” Chaos 31, 011102 (2021).

[148] I. Sataev and N. Stankevich, ”Cascade of torus birth bifurcations and inverse cascade of Shilnikov attractors merging at the threshold of hyperchaos,” Chaos 31, 023140 (2021).

[149] M. Malkin and K. Safonov, ”Entropy charts and bifurcations for Lorenz maps with infinite derivatives,” Chaos 31, 043107 (2021).

[150] V. N. Belykh, N. V. Barabash, and I. V. Belykh, ”Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs,” Chaos 31, 043117 (2021).

[151] S. Gonchenko, A. Gonchenko, A. Kazakov, and E. Samylina, ”On discrete Lorenz-like attractors,” Chaos 31, 023117 (2021).

[152] S. Kuznetsov, V. Kruglov, and I. Sataev, ”Smale-Williams solenoids in autonomous system with saddle equilibrium,” Chaos 31, 013140 (2021).

[153] P. V. Kuptsov and S. P. Kuznetsov, ”Route to hyperbolic hyperchaos in a nonautonomous time-delay system,” Chaos 30, 113113 (2020).

[154] M. Barinova, V. Grines, O. Pochinka, and B. Yu, ”Existence of an energy function for three-dimensional chaotic ”sink-source” cascades,” Chaos 31, 063112 (2021).

[155] Grines and D. Mints, ”On interrelations between trivial and nontrivial basic sets of structurally stable diffeomorphisms of surfaces,” Chaos 31, 023132 (2021).

[156] I. R. Garashchuk and D. I. Sinelshchikov, ”Bubbling transition as a mechanism of destruction of synchronous oscillations of identical microbubble contrast agents,” Chaos 31, 023130 (2021).

[157] Kashchenko, ”Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain,” Chaos 31, 033147 (2021).

[158] Y. Deng and Y. Li, ”Symmetrical Hopf-induced bursting and hyperchaos control in memristor-based circuit,” Chaos 31, 043103 (2021).

[159] V. O. Munyaev, D. S. Khorkin, M. I. Bolotov, L. A. Smirnov, and G. V. Osipov, ”Appearance of chaos and hyperchaos in evolving pendulum network,” Chaos 31, 063106 (2021).

[160] Turaev, ”A criterion for mixed dynamics in two-dimensional reversible maps,” Chaos 31, 043133 (2021).

[161] L. Lerman and K. Trifonov, ”Saddle-center and periodic orbit: Dynamics near symmetric heteroclinic connection,” Chaos 31, 023113 (2021).

[162] I. Bizyaev, S. Bolotin, and I. Mamaev, ”Normal forms and averaging in an acceleration problem in nonholonomic mechanics,” Chaos 31, 013132 (2021).

[163] Y. Ilyashenko, ”Germs of bifurcation diagrams and SN-SN families,” Chaos 31, 013103 (2021).

[164] D. Malyshev, A. Morozov, and O. Pochinka, ”Combinatorial invariant for Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic,” Chaos 31, 023119 (2021).

[165] Y. V. Bazaikin, A. S. Galaev, and N. I. Zhukova, ”Chaos in Cartan foliations,” Chaos 30, 103116 (2020).